Mesures du p-rang

ou : Saine réaction à un article de Burdges et Cherlin

3 mai 2010

Résumé

J'établis quelques liens entre les trois manières de mesurer le p-rang d'un groupe à dimension, et réfute un théorème de Burdges et Cherlin.

Les groupes de rang de Morley fini sont des analogues abstraits des groupes algébriques ; comme eux ils portent une dimension propre à divers calculs de généricité. Ces objets ne sont pas d'origine géométrique, et pourtant de nombreux travaux affirment les liens entre groupes algébriques et groupes de rang de Morley fini. Le lecteur pourra donc considérer ce qui suit comme quelques propriétés naïves des groupes algébriques, obtenues par des méthodes élémentaires.

Un groupe de rang de Morley fini est *connexe* s'il ne possède pas de sous-groupe propre définissable d'indice fini. On note H° la composante connexe d'un sous-groupe définissable H, c'est-à-dire son plus petit sous-groupe définissable connexe d'indice fini. On peut étendre ce concept au cas où H n'est pas définissable : H est inclus dans un plus petit sous-groupe définissable noté $d(H)$, dont on prend la composante connexe $d(H)^\circ$, et l'on pose $H^\circ = H \cap d(H)^\circ$.

Un groupe de rang de Morley fini est $U_p^\perp$ s'il ne contient pas de p-sous-groupe abélien élémentaire de p-rang (au sens algébrique) infini. Un groupe $U_p^\perp$ conjugue ses *p-sous-groupes de Sylow* [2], qui sont par définition ses p-sous-groupes maximaux ; on sait même que ceux-ci sont extension finie d'une puissance du p-groupe quasi-cyclique de Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Donc si S est un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe $U_p^\perp$, alors $S^\circ \simeq \mathbb{Z}_{p^\infty}^d$ pour un entier d.

Étant donné un groupe $U_p^\perp$, nous pouvons mesurer son p-sous-groupe de Sylow d'au moins trois façons. Nous pouvons considérer son *p-rang de Prüfer* $\mathrm{Pr}_p(G)$, qui est le nombre de facteurs $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dans un sous-groupe de Sylow. Nous pouvons aussi estimer son *p-rang normal* $n_p(G)$, qui est le rang maximal d'un p-groupe abélien élémentaire distingué dans un p-sous-groupe de Sylow. Enfin nous pouvons calculer simplement son *p-rang* $m_p(G)$, qui est le p-rang maximal d'un p-groupe abélien élémentaire. Ces trois nombres sont bien définis par conjugaison des p-sous-groupes de Sylow, et l'on a $m_p(G) \geq n_p(G) \geq \mathrm{Pr}_p(G)$.

1 Le rang n

Lemme 1. *Si G est un groupe connexe $U_p^\perp$, alors $n_p(G) = \mathrm{Pr}_p(G)$.*

Démonstration. Soient S un p-sous-groupe de Sylow de G, $V \lhd S$ un sous-groupe distingué, et $\alpha \in V$. Comme V est distingué, $\alpha^{S^\circ} \subseteq V$ qui est fini ; par connexité, α centralise S°. Donc $\alpha \in C_S(S^\circ) = S^\circ$ d'après [2]. Ainsi $V \leq S^\circ$. $\square$

2 Le rang m

Lemme 2. *Si G est un groupe connexe $U_p^\perp$, alors $m_p(G) \leq \mathrm{Pr}_p(G) + \lfloor \frac{\mathrm{Pr}_p(G)}{p-1} \rfloor$.*

Démonstration. Par commodité, nous noterons $m = m_p(G)$ et $d = \mathrm{Pr}_p(G)$. Soit V un p-groupe abélien élémentaire ; soit $S \geq V$ un p-sous-groupe de Sylow le contenant. Écrivons $V = A \oplus W$ où $A \leq S^\circ$ et $W \cap S^\circ = 1$. Il est clair que $\mathrm{rg}\, A \leq d$; on s'intéresse à $\mathrm{rg}\, W$. Comme $C_S(S^\circ) = S^\circ$, W agit fidèlement sur $S^\circ \simeq \mathbb{Z}_{p^\infty}^d$; puisque la prise du groupe d'automorphismes change la limite inductive en limite projective, W est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p) \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$.

Décomposons $E = \mathbb{Q}_p^d$ en la somme d'espaces irréductibles $\oplus_i A_i \bigoplus \oplus_j B_j$, à la manière de Maschke ; les A_i sont les droites W-triviales. Chaque $\mathrm{End}\, B_j$ est un corps gauche d'après le Lemme de Schur, donc l'image de W dans $\mathrm{End}\, B_j$ est cyclique, et le noyau de la restriction à B_j est d'indice p. Comme $C_W(E) = 1$, il suit que $\mathrm{rg}\, W$ est inférieur au nombre de B_j.

Or ces espaces sont de dimension $p-1$. En effet, le polynôme minimal d'un automorphisme de B_j d'ordre p doit diviser $X^p - 1 = (X-1)(X^{p-1} + \cdots + X + 1)$; le second facteur est irréductible sur $\mathbb{Z}$ d'après le critère d'Eisenstein, d'où $\dim B_j \geq p-1$. Donc il y a au plus $\frac{d}{p-1}$ espaces B_j, et $\mathrm{rg}\, W \leq \lfloor \frac{d}{p-1} \rfloor$. $\square$

3 Sous-groupes maximaux

Burdges et Cherlin avancèrent dans [1] la thèse suivante.

Thèse ([1, Théorème 1.2])**.** *Let G be a connected group of finite Morley rank and $p^\perp$ type with $m_p(G) \geq 3$. Then any maximal elementary abelian p-subgroup $V < G$ has p-rank at least 3.*

Contre-exemple. Considérons dans $\mathrm{PSL}_5(\mathbb{C})$ l'élément naturellement associé au 5-cycle $\sigma = (12345)$. Le centralisateur de σ dans le tore T est d'ordre 5 ; soit $a \in C_T(\sigma)^\#$. Alors $C(a) = T \rtimes \langle \sigma \rangle$; on voit que $C(a, \sigma) = \langle a, \sigma \rangle$, et que ce groupe ne saurait s'étendre en un 5-groupe abélien élémentaire de rang 3.

Je laisse au lecteur le soin d'identifier où pèche l'argument de mes confrères ; il verra pour son plaisir qu'un contre-exemple satisfait toujours $p - 1 \mid \mathrm{Pr}_p(G)$.

Références

[1] Jeffrey Burdges and Gregory Cherlin. A generation theorem for groups of finite Morley rank. Soumis, 2008.

[2] Jeffrey Burdges and Gregory Cherlin. Semisimple torsion in groups of finite Morley rank. Soumis, 2008.