

DEUX CORPS

Bruno POIZAT¹

Résumé. Cet article est écrit à l'ombre de la *Conjecture d'Algébricité*, ouverte depuis cinquante ans, qui postule que la simple existence d'une dimension (le *rang de Morley*), de nature combinatoire, attribuée aux ensembles interprétables (au sens de la Théorie des Modèles) dans un groupe simple infini G pourvoie nécessairement ce dernier de la structure géométrique d'un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos K (pour lequel le rang de Morley n'est rien d'autre que la dimension géométrique).

Les sections propres simples et définissables d'un éventuel contre-exemple de rang minimal G sont algébriques, mais il est a priori possible que G leur impose une structure plus forte que celle de groupe "nu", c'est à dire une structure que le langage des groupes ne peut pas décrire à lui seul, si bien que toute attaque par induction de la Conjecture a pour préliminaire une étude du comportement des groupes algébriques simples quand ils sont transférés dans un univers inconnu de rang de Morley fini.

Les résultats de ce genre reposent sur un mélange délicat de Théorie des Modèles et de Géométrie Algébrique, dont le dosage dépend de la personnalité de leur auteur. S'il a l'esprit géométrique, il va décrire les groupes algébriques simples comme des *groupes de Chevalley*, engendrés par un système de Tits de groupes radiciels, sous le contrôle d'un *graphe de Dynkin*. S'il est plutôt sous l'influence de la Logique Mathématique, il préférera éviter une inspection aussi minutieuse de la structure des groupes algébriques, et se cantonnera dans la théorie de Galois, plus abstraite et de portée très générale, associée à la notion modèle-théorique d'*Internité* ; la génération par les groupes radiciels est un cas particulier d'internité.

Ce n'est que récemment que je me suis rendu compte que la possibilité d'interpréter *sans paramètres*, dans un groupe algébrique simple G , un corps en caractéristique nulle, un multicorps en caractéristique p , formé de copies du corps de base K , combinée avec cette théorie de Galois, permet d'obtenir une description convaincante de ses automorphismes définissables, et même de caractériser ceux qui sont géométriques (autrement dits, birationnels) comme formant le plus grand groupe définissable, qui est aussi le plus grand groupe superstable, d'automorphismes de G . Cette approche explique par la Théorie des Modèles le Théorème de Borel-Tits (restreint aux corps algébriquement clos), tout en rendant compte de ses cas exceptionnels, d'une manière sensiblement différente de sa démonstration géométrique. Elle permet de montrer des résultats de la sorte décrite dans le paragraphe précédent, ou de les ramener à des faits mathématiques bien connus, et de rectifier des démonstrations publiées antérieurement, qui sont déficientes pour la raison qu'elles négligent les cas exceptionnels.

L'article commence par une liste de faits, réunis pour la première fois en une synthèse de Géométrie Algébrique et de Théorie des Modèles. Leurs démonstrations, anciennes ou nouvelles, sont seulement esquissées et référencées, sauf quand les originales peuvent être simplifiées ou doivent être corrigées. La raison principale qui détermine les propriétés modèle-théoriques des groupes algébriques simples, c'est qu'ils sont *autonomes*, ce qui signifie que toute partie d'une puissance cartésienne d'un de ces

¹ Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon-1, 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

groupes G , qui est définissable au sens du corps de base K , l'est en fait, avec paramètres, au sens du groupe nu G .

Mais, dans la section suivante, une confrontation avec le Théorème de Borel-Tits original met en évidence une propriété de nature modèle-théorique très particulière des groupes algébriques simples, qui les singularisent parmi les structures autonomes en caractéristique p : leurs automorphismes sont contrôlés par un corps dans les cas ordinaires, par un bicorps dans les cas exceptionnels, et non pas par un multicorps de taille supérieure.

Et en effet, dans une dernière section, consacrée à la description des multicorps en général, nous montrons l'existence de multicorps de taille arbitrairement grande ne permettant pas d'interpréter sans paramètres des multicorps de taille inférieure, et nous vérifions la justesse de l'interprétation modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits.

On conclut par une série d'appendices, traitant de questions à la marge de la ligne d'argumentation principale. Le plus long d'entre eux, destinés à convaincre les lect/rices/eurs qui découvrent la Théorie des Modèles, explicite de la manière la plus calculatoire et la plus élémentaire possible, dans le cas des groupes $SL_2(K)$ et $PSL_2(K)$, les développements étherés et abstraits du corps de l'article.

Abstract. This paper is written under the shade of the *Algebraicity Conjecture*, which is open since fifty years. This conjecture postulates that the mere existence of a combinatorial notion of dimension of model-theoretic origin – the Morley rank – on the definable sets of a simple group G will necessarily provide G with the geometric structure of an algebraic group over some algebraically closed field, in which the Morley rank is nothing but the geometric dimension.

The proper definable simple sections of a supposed minimal counter-example G to the Conjecture are algebraic, but G may a priori induce on them a structure stronger than that of a plain group (otherwise said, of a "naked group"), and therefore a preliminary step to any inductive attack of the Conjecture is to understand, and control, the behaviour of a simple algebraic group when imported in an unknown setting of finite Morley rank.

This kind of results involves a delicate blend of Algebraic Geometry and Model Theory, the proportion of which being influenced by the personality of their author. If he has a geometric mind, he will describe the simple algebraic groups as *Chevalley groups*, generated by a Tits system of root subgroups; if he is more receptive to Mathematical Logic, he will try to avoid such a minute inspection of the structure of the group, and use instead a very general Galois theory associated to the model-theoretic notion of *Internality*. Generation by root subgroups is a particular case of internality.

It was realized only recently that the possibility to interpret *without parameters* a field in characteristic zero, a multifield in characteristic p , in any simple algebraic group G , combined with this Galois theory, gives a convincing description of the definable automorphisms of G , and even permits to characterize its geometric automorphisms. It provides a model-theoretic explanation for Borel-Tits Theorem, including its exceptionnal cases (we consider only simple algebraic groups over an algebraically closed field). This may be used to prove results of the kind described above, or to reduce them to well-known mathematical facts.

This work begins by a collection of facts, making a bridge between Model Theory and Algebraic Geometry: they are listed here for the first time as a synthesis between the two disciplines. Their proofs, old or new, are only sketched and referenced, except when their originals can be shortened, or need to be amended.

Then a call to Borel-Tits Theorem makes explicit how these facts are under the control of a field in the ordinary cases, a bifield in the exceptional cases, which are defined free from parameters in the algebraic simple group G .

In the last section, consecrated to a study of multifields in general, we check the correctness of our model-theoretic interpretation of the Theorem of Borel-Tits, and show that this limitation to bifields is a very specific property of algebraic simple groups among structures definable in an algebraically closed field. Indeed, there exist multifields of arbitrarily large size which cannot interpret without parameters multifields of a smaller size.

Some appendices are added at the end of the paper, to answer some questions which lie on the banks of its mainstream. In the longest of them, specifically addressed to the readers discovering the tools and the methods of the Theory of Models, the new and rather abstract arguments of the body of the paper are hammered into their most elementary computational aspect, in the case of the groups $SL_2(K)$ and $PSL_2(K)$.

Mots-clefs : groupes algébriques, groupes de Chevalley, isogénies exceptionnelles, Théorème de Borel-Tits, structures constructibles autonomes, multicorps

Index des sujets : 03C45, 03C60, 14L15

1. GROUPES ALGÈBRIQUES, SOL GLISSANT

La présente étude modèle-théorique des groupes algébriques est motivée par la *Conjecture d'Algèbricité* (ZIL'BER 1977, CHERLIN 1979). Elle se formule ainsi, et demande une explication de texte :

Tout groupe simple de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique G sur un corps K algébriquement clos.

Le *rang de Morley* est une notion modèle-théorique de nature combinatoire, qui généralise la dimension en Géométrie Algébrique. POIZAT 1987 sera notre référence pour les propriétés très particulières du rang de Morley dans le cas des groupes ; cet ouvrage rend compte, en particulier, des premiers travaux de Boris Zil'ber, qui montrent que bien des propriétés des groupes algébriques ne mettent en jeu que la dimension, et s'adaptent au cas général des groupes de rang de Morley fini (ZIL'BER 1977). Pour ce qui concerne leurs propriétés algébriques, nos manuels seront BOROVIK-NESIN 1994 et ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008.

Nous allons voir trois définitions possibles de la notion de *groupe algébrique* qui, selon moi, conditionnent l'approche de la Conjecture.

Nous parlons ici d'isomorphismes qui sont qualifiés d'*abstraits* en Géométrie, c'est à dire des isomorphismes pour la seule loi de groupe, sans propriétés géométriques particulières.

Le mot *simple* est pris ici au sens commun en Théorie des Groupes, mais nous considérons à l'occasion les groupes *quasi-simples*, définis dans l'Appendice B, qui sont souvent qualifiés de simples par les géomètres.

Comme toute structure finie est algébrique pour une raison triviale, dans cet article, G sera toujours un groupe *infini*, le plus souvent algébrique sur un corps K algébriquement clos.

2. CAS PARTICULIER : LES GROUPES ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

On me pardonnera de commencer par quelque chose de très élémentaire, à seule fin de préciser de quoi je parle.

$GL_n(K)$ est le fermé de Zariski de K^{n^2+1} défini par l'équation $\det(X).y = 1$. Un *groupe algébrique linéaire* G est un sous-groupe de $GL_n(K)$ défini par des équations polynomiales. Nous remarquons que ses fonctions $x.y$ et x^{-1} sont des polynômes.

Je dirai qu'un homomorphisme entre deux groupes algébriques linéaires G_1 et G_2 est *géométrique* si c'est une application-polynôme, et qu'un isomorphisme entre deux groupes algébriques linéaires est *géométrique* s'il est polynomial dans les deux directions. Ces deux groupes sont alors considérés par les géomètres comme étant un même objet.

Je me permets de m'écarter de l'usage des géomètres, pour qui ces applications sont respectivement *rationnelles* et *birationnelles*, mais je le suivrai par contre en qualifiant de *constructible* tout ce qui est définissable, avec paramètres, dans un corps K algébriquement clos, au sens de la Théorie des Modèles. En caractéristique nulle, tout homomorphisme constructible entre groupes algébriques est géométrique. Ce n'est pas vrai en caractéristique p , où il est seulement *quasi-géométrique*, c'est-à-dire polynôme en les racines p^n -ièmes des x_i (POIZAT 1987, p. 125). Il y a alors des groupes algébriques qui sont constructiblement (c'est-à-dire définissablement) isomorphes sans l'être géométriquement ; ils sont identifiés par les théoriciens des modèles, mais pas par les géomètres.

On verra dans l'Appendice D un exemple facile, mais pas simple.

3. TROIS FAÇONS DE VOIR UN GROUPE ALGÈBRIQUE SIMPLE

Il y a au moins trois façons de définir ces groupes, dont les tenants et aboutissants seront discutés dans la section suivante.

1. Comme un groupe constructible, c'est-à-dire comme un groupe définissable dans un corps algébriquement clos K .
2. Comme une variété algébrique, munie d'une loi de groupe géométrique.
3. Comme un groupe de Chevalley, engendré par un *système de Tits* de *sous-groupes radiciels* (qui sont des copies de K^+), sous le contrôle d'un graphe fini, le *diagramme de Dynkin*.

Cette génération par les sous-groupes radiciels est une façon d'associer aux points de G des coordonnées dans K , ou plutôt (comme nous le verrons) dans une copie de K , qui illustre la notion modèl-théorique d'*Internité*, dont elle est un cas particulier.

En fait, les systèmes de Tits constituent des formes d'internité extrêmement concrètes, jusqu'à permettre des calculs précis. Par contraste, l'*Internité* en Théorie des Modèles peut être de nature générale et totalement abstraite, comme celle associée par Ehud Hrushovski à un groupe simple de rang de Morley fini (POIZAT 1987, p. 151).

4. UNE SÉRIE DE QUATORZE FAITS ÉVIDENTS OU SOPHISTIQUÉS

Cette section rapproche pour la première fois une série de faits, dont certains sont connus depuis longtemps, permettant d'interpréter la génération des groupes de Chevalley comme un cas particulier de la notion, abstraite et générale, d'internité en Théorie des Modèles ; des propriétés très particulières de la théorie des corps algébriquement clos, les FAITS 6 et 7, conditionnent le reste. Les faits classiques ou anciens sont presque tous montrés dans POIZAT 1987, et les nouveautés le sont dans POIZAT 2026.

FAIT 1. *Tout groupe algébrique affine est géométriquement isomorphe à un groupe algébrique linéaire* (POIZAT 1987, p. 145).

FAIT 2. *Il y a des groupes algébriques non linéaires, mais ceux qui sont simples sont affines* (POIZAT 1987, p. 147 ; cela permet de formuler avec précision la Conjecture, sans que cela soit très utile pour la résoudre !).

FAIT 3. *Un groupe algébrique simple est géométriquement isomorphe à un groupe linéaire défini par des équations polynomiales à coefficients entiers. Par conséquent tout automorphisme du corps K induit un automorphisme du groupe G .*

Voir BOREL 1970. C'est un fait très profond, lié au suivant, au cœur de la découverte par Claude Chevalley que ce qui était à l'origine une théorie des groupes de Lie – variétés analytiques sur le corps des complexes – pouvait s'adapter à un contexte purement algébrique, valable sur n'importe quel corps, même de caractéristique p , et même fini (CHEVALLEY 1955). On voit que les groupes algébriques simples forment une famille bornée (en contraste saisissant avec les variétés abéliennes), classifiable indépendamment de la caractéristique ; on remarque que l'action sur G des automorphismes de K dépend de la représentation sans paramètres choisie pour G : elle n'est pas canonique.

FAIT 4. *Un groupe algébrique simple est un groupe de Chevalley, et réciproquement, mais pas toujours de manière unique.*

FAIT 5 (Weil, van den Driess, Hrushovski). *Un groupe constructible est constructiblement isomorphe à un groupe algébrique.*

POIZAT 1987, p. 137 ; il s'agit de la version modèle-théorique du Théorème d'André Weil sur les morceaux de groupe, promise à un bel avenir ; bien que n'ayant reçu de réponse qu'en 1986, c'était la première question qui aurait dû venir à l'esprit à propos de la Conjecture d'Algébricité : a-t-elle un contre-exemple définissable dans un corps K algébriquement clos ?

FAIT 6. *Tout corps constructible infini L est constructiblement isomorphe au corps de base K* (POIZAT 1987, p. 150).

La démonstration s'appuie sur le FAIT 5.

FAIT 7. *Si G est simple, une copie L_a de K est définissable, avec paramètres a , dans le groupe nu G .*

L'appel à une survivante du contexte topologique originel, la notion de variété complète, montre immédiatement que les borels de G sont conjugués, et non nilpotents car de centre trivial, si bien qu'on peut y définir un corps à la manière de Zil'ber (POIZAT 1987, p. 94) ; on peut d'ailleurs contourner la topologie grâce à une propriété modèle-théorique des corps nus algébriquement clos (POIZAT 1987, p. 117 ; les groupes constructibles sont pseudo-localement-finis). Cet argument fait cruellement défaut dans le cas général de groupes simples de rang de Morley fini.

FAIT 8. *Un groupe algébrique G simple est une structure constructible autonome, ce qui signifie que toute partie d'une puissance cartésienne de G définissable dans K est définissable (avec paramètres) dans le groupe nu G .*

POIZAT 1987, p. 151 ; la théorie de G est $\aleph_1$ -catégorique (Zil'ber) ; au sens de cette théorie G , étant simple, est L_a -interne (Hrushovski), soit encore définissablement isomorphe à un groupe définissable dans le corps L_a . D'après le FAIT 6, L_a est un corps nu, c'est-à-dire sans structure supplémentaire, définissablement au sens de K isomorphe à K .

FAIT 9. *Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique si et seulement s'il interprète un corps algébriquement clos tout en le laissant nu.*

C'est élégant, et ça introduit bien la problématique du mauvais groupe et du mauvais corps, mais ça n'avance pas beaucoup pour répondre à la Conjecture, car on sait aujourd'hui que les corps habillés de rang de Morley fini sont Légion ! Autre caractérisation utile dans certains cas : *Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique si et seulement s'il est pseudo-localement fini* (POIZAT 1987, p. 117). En effet,

toute structure définissable dans un corps nu algébriquement clos est pseudo-localement-finie, et pour la réciproque on retouche légèrement THOMAS 1983, qui repose sur la classification des groupes simples finis.

FAIT 10. *Soient G un groupe algébrique simple, sur un corps K algébriquement clos, et H un sous-groupe de G contenant une de ses restrictions élémentaires Γ . Alors, si (G, H) est de rang de Morley fini, H est égal à G .*

Il s'agit du théorème principal de BOROVIK 2024, dont l'analyse a motivé POIZAT 2026. La démonstration qui suit évite l'appel à des résultats de Théorie des Modèles élaborés, comme WAGNER 2001 et MUSTAFIN-POIZAT 2006.

DÉMONSTRATION. Comme le borel B de Γ a un centre trivial, on définit Λ_α grâce à l'action de B/B' sur $Z(B')$, où α est un uplet de paramètres dans Γ , si bien que le groupe additif de ce corps est un sous-groupe de G . Notons L_α sa clôture définissable dans G , et M l'intersection de L_α et de H . L'intersection N des $\lambda.M$, où λ parcourt Λ_α , est celle d'un nombre fini d'entre eux, et $\{\mu / \mu.N = N\}$ est un sous-corps de L_α qui contient Λ_α ; il est infini, algébriquement clos, égal à L_α , et donc $N = M = L_\alpha$.

L_α est un groupe connexe, et ses conjugués par Γ engendrent un sous-groupe définissable de H qui contient Γ . On est donc ramené au cas où H est définissable, et il reste plus qu'à vérifier que, quand on prend une représentation, G est la clôture de Zariski de Γ . Cela vient de ce que, si Γ est défini par un système d'équations à coefficient dans Λ_α , G est formé des points de L_α satisfaisant aux mêmes équations. FIN

On n'a pas besoin du FAIT 3 pour cette démonstration. Mais ce dernier permet de montrer que le modèle premier de la théorie de G est associé au corps des nombres algébriques.

FAIT 11. (i) *Deux structures constructibles autonomes, définies sur le même corps K , qui sont abstraitement isomorphes le sont constructiblement.*

(ii) *Tout isomorphisme abstrait entre deux structures constructibles autonomes sur des corps algébriquement clos se décompose en un isomorphisme induit par un isomorphisme entre les corps de base et un automorphisme constructible.*

POIZAT 1987, p. 152 ; (ii) est la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits, bien plus frustré que l'originale. Voici ce qu'en a dit James Humphreys sur la toile (HUMPHREYS 2010) : *This is interesting to know, but is far weaker than the Borel-Tits theorem and has its own probably substantial prerequisites.*

Le cas particulier, considéré comme simple (sans jeu de mots) par Robert Steinberg, du Théorème de Borel-Tits sur les isomorphismes abstraits entre groupes algébriques simples sur des corps de base *algébriquement clos* les décompose en un isomorphisme induit et un isomorphisme géométrique dans une seule direction (STEINBERG 1974, Theorem 1.2). C'est conséquence des FAITS 8 et 11, car on transforme un semi-polynôme en un polynôme en le composant avec une puissance suffisamment grande du frobenius (l'automorphisme de K qui transforme x en x^p) ; en fait, hormis quelques cas exceptionnels en caractéristique 2 ou 3, on peut faire cette décomposition avec un isomorphisme géométrique dans les deux directions.

FAIT 12. *En caractéristique nulle, une structure A constructible autonome interprète sans paramètres une copie L de K ; ses automorphismes définissables sont ceux qui fixent L point par point ; il forment un groupe définissable $\text{Aut}_{\text{def}}(A)$, qui est en fait le plus grand groupe $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ de rang de Morley fini, et même superstable, d'automorphismes de A .*

POIZAT 2026 ; L peut être imaginaire, étant basé sur les classes d'une relation d'équivalence définissable sans paramètres ; son existence vient de ce que, en caractéristique 0, deux copies de K définissables (avec paramètres) sont définissablement isomorphes de manière unique. Un résultat de HRUSHOVSKI 1989 (évident dans le cas de rang de Morley fini) assure qu'un corps superstable (propriété plus faible que la finitude du rang de Morley) de caractéristique nulle n'a pas d'automorphisme définissable non trivial. Donc $\text{Aut}_{\text{def}}(A) = \text{Fix}(L)$ est le groupe de Galois $\text{Gal}(A/L)$ (appelé groupe de liaison dans ZIL'BER 1984a) de la L -internité de A .

FAIT 13. *En caractéristique p , une structure A constructible autonome interprète sans paramètres un multicorps $(L_1, \dots, L_n)$ de copies de K ; les automorphismes de A induisant un automorphisme d'ordre fini de ce multicorps forment le plus grand groupe $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ définissable d'automorphismes de A , qui est aussi son plus grand groupe superstable d'automorphismes.*

POIZAT 2026 ; on fait la même chose, mais en l'assaisonnant à la tambouille modèle-théorique ; il faut naturellement définir ce qu'est un multicorps, ce qu'on fera tout-à-l'heure dans la Section 7.

Bien sûr, ce ne sont pas tous les automorphismes, d'ordre fini ou non, du multicorps qui se remontent en un automorphisme de A , qui d'ailleurs interprète sans paramètres de nombreux multicorps, de plus en plus grands ; seuls les plus petits contraignent significativement les automorphismes de A . Les rapports entre $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ et $\text{Aut}_{\text{def}}(A)$ seront précisés dans la Section 7, COROLLAIRE 3.

FAIT 14. *Tout groupe superstable connexe d'automorphismes d'un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos est formé d'automorphismes intérieurs.*

POIZAT 2026 ; cela signifie que $\text{Aut}_{\max}(G)^\circ = \text{Int}(G)$, et le fait est bien connu des géomètres quand ils travaillent dans leur cadre restreint des objets définissables dans K . Les FAITS 12 et 13 le généralisent immédiatement au cadre général de la Théorie des Modèles superstable, il n'y a rien de plus à montrer !

5. COMMENT FONT LES GÉOMÈTRES

Les FAITS 10 et 14 sont indispensables dans une approche inductive de la Conjecture : si H est un contre-exemple de rang minimal, ses sections propres définissables simples sont des groupes algébriques, mais il est a priori possible que H les vête d'une structure plus forte que celle de groupe nu. Il faut donc maîtriser leur conduite quand ils émigrent dans un univers inconnu de rang de Morley fini.

La démonstration ci-dessus, du genre "si les géomètres savent le faire, nous le pouvons aussi", n'utilise aucune propriété structurelle du groupe G , si ce n'est qu'il interprète un corps infini (dont le groupe additif est sous-groupe de G pour le FAIT 10). Jusqu'à maintenant, nous n'avons utilisé que de la Théorie des Modèles, et de la Géométrie Algébrique rudimentaire. Nous avons laissé aux géomètres la démonstration du FAIT 14 restreint à l'univers d'un corps nu algébriquement clos, et il reste à expliquer brièvement comment ils font.

Ils savent que le groupe $\text{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs d'un groupe algébrique simple G est d'indice fini dans le groupe $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ de ses automorphismes géométriques, le quotient $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)/\text{Int}(G)$ étant isomorphe au groupe des automorphismes de son graphe de Dynkin (HUMPHREYS 1981, p. 160). Comme $\text{Int}(G)$ est un groupe définissable isomorphe à G , il en suit que $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est définissable, et que par conséquent il est inclus dans $\text{Aut}_{\max}(G)$.

Soit H un groupe définissable d'automorphismes de G ; d'après le FAIT 5, on peut munir le produit semi-direct $G \rtimes H$ d'une structure de groupe algébrique (peut-être pas unique, mais qu'importe !) ; son action sur son sous-groupe fermé normal G est géométrique, et si H est connexe elle est celle d'un sous-groupe de $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)^\circ = \text{Int}(G)$.

6. IDENTIFICATION DE $\text{Aut}_{\max}(G)$ À $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ GRÂCE AU THÉORÈME DE BOREL-TITS

Nous voulons montrer un résultat plus fort, à savoir que $\text{Aut}_{\max}(G) = \text{Aut}_{\text{geo}}(G)$, quelle que soit la structure de groupe algébrique plaquée sur le groupe constructible simple G , soit encore le fait suivant :

FAIT 14bis. Si G est un groupe algébrique simple, $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est définissable, de composante connexe $\text{Int}(G)$, et c'est le plus grand groupe superstable d'automorphismes de G .

Pour cela, il nous faut explorer d'un orteil prudent un terrain miné, celui de l'interprétation en termes de Théorie des Modèles d'un grand théorème du siècle dernier, le Théorème de Borel & Tits sur les isomorphismes abstraits entre groupes algébriques simples, dont nous n'utilisons que le cas particulier où les corps sont algébriquement clos ; l'expérience prouve que même des mathématiciens confirmés y sont en danger. Je répète que c'est uniquement pour clarifier le FAIT 14 que nous avons besoin de Géométrie, pas pour le démontrer.

En caractéristique 0, tout baigne : G simple constructible est un unique groupe algébrique, et un unique groupe de Chevalley ; l'isomorphisme définissable entre K et L est unique, et $\text{Aut}_{\text{abs}}(G)$ est le produit semi-direct de $\text{Aut}_{\text{def}}(G) = \text{Aut}_{\text{geo}}(G) = \text{Fix}(L) = \text{Gal}(G/L)$ par $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$.

Il importe de bien distinguer les rôles des corps K et L ; K est un objet du second ordre par rapport à G , il ne vit pas dans l'univers de G , et il s'efface quand on se place dans la théorie de l'objet autonome G . L'action de $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$ correspond au choix d'un facteur dans un produit semi-direct, et ne se concrétise que si on choisit une représentation sans paramètres de G . La copie L de K est au contraire canonique, interprétable dans G , et son fixateur est le groupe de Galois $\text{Gal}(G/L)$ de la coordinatisation de G par L associée à la L -internité. En caractéristique nulle, c'est le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(A)$ quelle que soit la structure autonome A , qui dans le cas particulier d'un groupe simple est $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$.

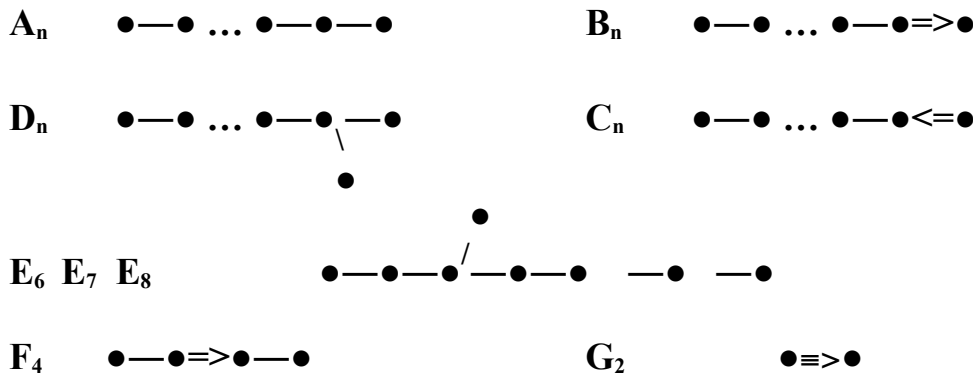
En caractéristique p , le frobenius complique les choses, si bien que $\text{Aut}_{\text{def}}(G)$ n'est pas définissable. Par ailleurs, bien qu'il n'y ait pas de groupe superstable $\neq \{\text{Id}\}$ d'automorphismes de K , des automorphismes superstables $\neq \text{Id}$ existent individuellement ; on ne sait pas s'il peut y en avoir d'autres que les puissances du frobenius (cette question est attribuée sans référence à Angus Macintyre dans BOROVIK-NESIN 1994, p. 364 ; elle figure dans HRUSHOVSKI 1989).

Dans le Théorème de Borel-Tits, on distingue alors deux cas :

(1) Dans le cas ordinaire, le groupe constructible G n'est groupe algébrique que d'une seule façon, si bien que $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est normal dans $\text{Aut}_{\text{abs}}(G)$, le quotient étant $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$ comme précédemment : tout automorphisme abstrait se décompose en un géométrique (dans les deux sens!) et un induit par $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$. Par conséquent $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est cyclique infini, engendré par le frobenius ; $\text{Aut}_{\text{max}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$, étant un sous-groupe de rang de Morley fini du groupe cyclique infini, est réduit à l'identité.

(2) Il y a des cas exceptionnels, en caractéristique 2 ou 3, où il existe en outre un automorphisme constructible dont le carré est l'automorphisme de G induit par le Frobenius de K , et qui renverse les diagrammes de Dynkin. Il y a donc deux structures de groupe de Chevalley sur G , qui ont des diagrammes opposés ; mais les groupes algébriques correspondants, qu'ils soient géométriquement isomorphes ou pas, n'ont pas d'automorphismes de graphe, si bien que leur $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est le groupe $\text{Int}(G)$, qui est normal. $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est le groupe cyclique infini engendré par la racine carrée du Frobenius, et on fait le même raisonnement.

Les diagrammes de Dynkin sont dessinés ci-dessous. Ceux des cas exceptionnels sont, en caractéristique 2, $B_n \leftrightarrow C_n$, $F_4 \leftrightarrow F_4$, et en caractéristique 3, $G_2 \leftrightarrow G_2$. Un simple coup d'oeil permet de constater que tous ces graphes (orientés) sont bien rigides, n'ayant comme automorphisme que l'identité.



Si $n \geq 3$, B_n n'est pas isomorphe à C_n , et on obtient deux groupes algébriques simples distincts portés par G qui sont constructiblement mais pas géométriquement isomorphes.

Dans les trois autres cas exceptionnels, $B_2 = C_2$ et F_4 en caractéristique 2, G_2 en caractéristique 3, le graphe de Dynkin est isomorphe à son inverse, si bien qu'on obtient deux groupes de Chevalley distincts pour un même groupe algébrique.

Du point de vue modèle-théorique, la situation en caractéristique p s'explique ainsi, comme nous le vérifierons lors du COROLLAIRE 3 de la dernière section.

Dans les cas ordinaires, un corps L est interprétable sans paramètres dans le groupe G ; la situation ressemble à celle de caractéristique nulle, à ceci près que $\text{Aut}_{\text{def}}(G)$ n'est pas définissable, le quotient $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ étant le groupe cyclique engendré par le Frobenius.

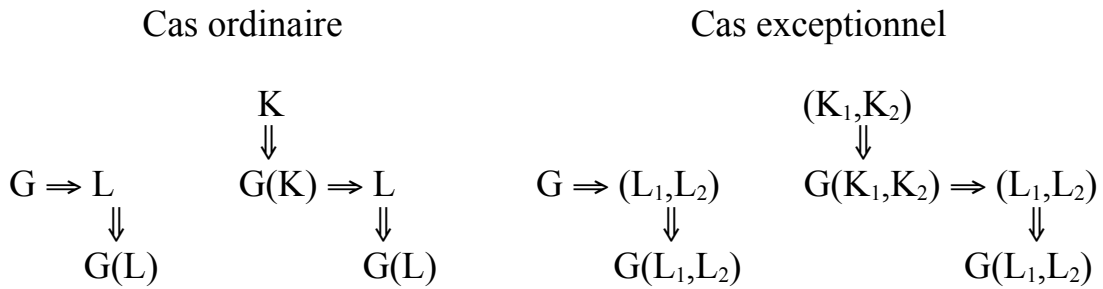
Dans les cas exceptionnels, on ne peut interpréter sans paramètres qu'un bicorps B , qui est la structure suivante : sa base $B = (L_1, L_2)$ est la réunion disjointe de deux copies de K ; son langage comprend la relation d'équivalence "appartenir au même corps", les graphes de $+$ et de $\times$, et une transposition τ des deux corps, formée d'un isomorphisme de L_1 sur

L_2 et d'un isomorphisme de L_2 sur L_1 , dont le carré τ^2 agit sur chaque corps comme le Frobenius.

On note que B est autonome, qu'il n'a pas d'automorphisme $\neq \text{Id}$ d'ordre fini (d'après ARTIN-SCHREIER 1927, il n'en a pas qui conserve les corps ; s'il les échangeait, ce serait une involution ι commutant avec τ , et $\iota\tau$ définirait sur chaque corps un automorphisme ayant pour carré le Frobenius, ce qui n'existe pas), et que ses automorphismes définissables forment le groupe cyclique engendré par τ , la racine carrée du Frobenius, c'est-à-dire le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Int}(G)$; et en effet, G est B -interne.

On verra dans la section suivante que, si on interprète sans paramètres B dans K , ses deux corps sont nécessairement interprétés sans paramètres, si bien que la transposition τ ne peut pas être induite par un automorphisme de K . De même, dans les cas ordinaires, quand on interprète sans paramètres dans G le bicorps B , on est contraint d'interpréter ses deux corps également sans paramètres ; tandis que dans les cas exceptionnels, G a des automorphismes constructibles spéciaux qui induisent sur B l'échange τ des deux corps.

On peut relever ainsi le corps ou le bicorps, les flèches $X \Rightarrow Y$ signifiant que Y est définissable sans paramètres dans X , et que X ne vit pas dans l'univers du premier ordre de Y .



Dans les cas ordinaires, il n'y a pas d'ambiguïté sur la structure de groupe de Chevalley sur G .

Dans les cas exceptionnels, G est en fait algébrique sur deux corps isomorphes distincts. Si on considère un système de racines r_1 faisant de G un groupe de Chevalley sur K_1 , un automorphisme spécial de G (qui induit τ sur le bicorps) le transforme en r_2 , faisant de G un groupe de Chevalley sur l'autre corps K_2 ; si alors on applique l'isomorphisme entre K_2 et K_1 induit par τ pour tout ramener sur le même corps $K = K_1$, r_2 devient un second système de racines faisant de G un groupe de Chevalley sur $K_1 = K$; mais ce-faisant on renverse les flèches du diagramme de Dynkin, et on obtient finalement pour G deux structures de groupes de Chevalley sur K , avec des diagrammes de Dynkin opposés.

7. MULTICORPS MINIMAUX

Le Théorème de Borel-Tits, en compagnie des Théorèmes 5.9 et 5.14 de POIZAT 2026 qui s'appuient sur ARTIN-SCHREIER 1927, met en évidence une propriété algébrique remarquable des groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos : tout automorphisme d'ordre premier $q > 3$ est intérieur. Les seules exceptions d'ordre trois sont dues aux permutations circulaires des extrémités du graphe D_4 ; quant aux automorphismes involutifs, ils proviennent des retournements des graphes A_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$) et E_6 , et, en caractéristique nulle, des conjugaisons modulo les sous-corps réel-clos de codimension deux dans le corps de base.

Quant à nous, nous sommes plus sensibles au comportement modèle-théorique très particulier de ces groupes, dont témoigne l'existence de $\text{Aut}_{\max}(G)$ (voir l'Appendice F) ; de plus, en caractéristique p , le sort de leurs automorphismes est décidé par un corps ou par un bicorps, et non pas par un multicorps de taille supérieure, ce qui les singularise parmi les structures constructibles autonomes. Nous vérifions dans cette section que la taille minimale d'un multicorps interprétable sans paramètres dans une structure autonome n'est pas bornée, quelle que soit la caractéristique finie, mais qu'elle vaut 1 ou 2 dans le cas d'un groupe algébrique simple.

Il convient de rappeler tout d'abord la définition des multicorps.

DÉFINITION 1. *Nous appelons multicorps une structure constructible dont la base $M = (L_1, \dots, L_n)$ est la réunion disjointe d'un nombre fini (appelé taille de M) de copies du corps de base (algébriquement clos) K , et le langage est constitué des quatre relations suivantes :*

- (i) *l'équivalence exprimant que x et y appartiennent au même L_i ;*
- (ii) *le graphe de l'addition des corps, composé des triplets (x, y, z) appartenant au même L_i et tels que z soit la somme de x et de y au sens de ce corps ;*
- (iii) *le graphe du produit des corps défini semblablement ;*
- (iv) *et enfin une relation binaire $\tau(x, y)$ dont la restriction à $L_i \times L_j$ est le graphe d'un isomorphisme $\tau_{j,i}$ entre les corps L_i et L_j ; on suppose que chaque $\tau_{i,i}$ vaut l'identité.*

DEFINITION 2. *Un multicorps est dit minimal s'il ne peut pas interpréter sans paramètres de multicorps de taille strictement inférieure.*

LEMME 1. (i) *Tout multicorps constructible M a une copie définissable sans paramètres dans le corps de base K .*

(ii) *Les multicorps sont autonomes.*

(ii) *$\text{Aut}_{\max}(M)$ est le groupe, fini, de ses automorphismes d'ordre fini.*

DÉMONSTRATION. (i) Comme L_i est définissablement isomorphe au corps de base K , on peut l'interpréter comme le sous-ensemble de K^{n+1} dont les n dernières coordonnées sont $(0, \dots, 1, \dots, 0)$; les $\tau_{j,i}$ correspondent alors

à des automorphismes de K définis sur la première coordonnée, valant l'identité en caractéristique nulle, ou une puissance du frobenius en caractéristique p ; tous sont définissables sans paramètres.

(ii) Tout est définissable dans M , en utilisant les zéros de ses corps comme paramètres, à partir de l'un d'entre eux, qui est définissablement isomorphe à K .

(iii) Le Corollaire 5.12 de POIZAT 2026 montre que les automorphismes d'ordre fini de M sont tous définissables, et forment un groupe fini, qui est le groupe $\text{Aut}_{\max}(M)$ d'après le Théorème 5.14 du même article. FIN

LEMME 2. Soient s une permutation des indices $\{1, \dots, n\}$, et σ la bijection de M dans M dont la restriction à L_i est $\sigma_i = \tau_{s(i),i}$. La condition pour que σ soit un automorphisme de M est $\tau_{s(j),j} \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \tau_{s(i),i}$ pour tous i et j .

DÉMONSTRATION. Le seul problème est la préservation de la relation $\tau(x,y)$, qui s'exprime ainsi : $\sigma_j \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \sigma_i$; on substitue. FIN

En caractéristique nulle, vu l'unicité de l'isomorphisme constructible entre L_i et L_j , $\tau_{j,k} \cdot \tau_{k,i} = \tau_{j,i}$ pour tout triplet (i,j,k) . La relation $\tau(x,y)$ est une relation d'équivalence, sur le quotient de laquelle est définie, sans paramètres, une copie L du corps de base, et d'après le LEMME 2 le groupe des automorphismes définissables de M est isomorphe à S_n . Les multicorps de caractéristique nulle ne sont donc que de simples démultiplications sans intérêt du corps de base, si bien que nous supposons par la suite que la caractéristique est p .

On remarque qu'un automorphisme de M définissable qui préserve chacun de ses corps vaut la même puissance du frobenius sur chacun d'eux, car il doit commuter avec les $\tau_{j,i}$. Nous appelons "frobenius de M " l'application, définissable sans paramètres, qui à x dans M associe x^p au sens du corps dans lequel il se trouve. Il est central dans $\text{Aut}_{\text{abs}}(M)$.

LEMME 3. Si le multicorps N est interprétable sans paramètres dans le multicorps M , il existe un entier $n \neq 0$ tel que la puissance n° du frobenius de M induise sur N la puissance n° de son frobenius.

DÉMONSTRATION. Soit φ le frobenius de N , et Φ celui de M ; comme N est définissable sans paramètres dans M , tout automorphisme de M induit un automorphisme de N . Chaque corps de N est définissablement isomorphe à chaque corps de M , et, en remplaçant M par son modèle premier, on voit qu'on peut choisir des paramètres algébriques pour définir une telle famille d'isomorphismes, qui sont fixés par Φ^n pour n assez grand ; Φ^n induit donc φ^n sur N . FIN

REMARQUE. L'expression "interprétable sans paramètres" n'a pas qu'un rôle décoratif. La structure (K,a) , obtenue en ajoutant la constante a au

langage des corps, a pour automorphismes définissables seulement l'identité si a est transcendant, et le groupe cyclique infini engendré par une puissance du frobenius s'il est algébrique ; dans tous les cas, $\text{Aut}_{\max}(K, a) = \{\text{Id}\}$.

EXEMPLE. Décrivons tous les bicorps constructibles $B = (L_1, L_2, \tau)$; dans leur cas, nous modifions le langage de sorte que τ ne soit plus une relation binaire, mais la fonction de B dans B dont les restrictions à L_1 et L_2 sont respectivement $\tau_{2,1}$ et $\tau_{1,2}$; τ^2 est une puissance du frobenius de B , et, suivant sa parité, nous pouvons normaliser le langage de sorte que τ^2 soit l'identité, ou bien soit le frobenius de B .

Quand τ est une involution, $\text{Aut}_{\max}(M) = \{\text{Id}, \tau\}$; la relation $x = \tau(y) \vee x = y$ est une équivalence, sur le quotient de laquelle est définie une troisième copie L du corps de base K ; $\text{Aut}_{\text{def}}(M)$ est le produit direct par une involution du groupe cyclique engendré par le frobenius. Si on définit (sans paramètres) B comme étant le sous-ensemble de $K \times K$ satisfaisant à $P(y) = 0$, où $P = y^2 + y + 1$ en caractéristique 2 , $P = y^2 - a$ où l'entier a n'est pas carré modulo p en caractéristique impaire, le frobenius de K échange les deux racines de P , et induit sur B l'échange des coordonnées tout en les élevant à la puissance p , tandis que son carré induit le carré du frobenius de B , lequel a deux racines carrées dans $\text{Aut}_{\text{def}}(B)$: le frobenius de K induit l'autre racine !

Dans le deuxième cas, le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(B)$ est cyclique, engendré par τ , qui est la racine carrée du frobenius de B . Le LEMME 3 rend impossible l'interprétation dans B sans paramètres d'un corps L , car tout automorphisme de B induirait un automorphisme de L ; mais les groupes $\text{Aut}_{\text{def}}(L)$ et $\text{Aut}_{\text{def}}(B)$ n'ont pas de torsion, et le frobenius de L n'a pas de racine carrée. Remarquons aussi que si B est interprétable sans paramètres dans K , et si les paramètres canoniques des deux corps – par exemple leurs zéros respectifs – étaient de degré 2 , ils seraient échangés par le frobenius de K , ce qui contredit également le LEMME 3 ; il est donc nécessaire que les deux corps soient eux-aussi interprétés sans paramètres. C'est la même propriété qui distingue le cas ordinaire du cas exceptionnel pour un groupe algébrique simple G ; dans le cas ordinaire, chaque fois qu'on interprète dans G sans paramètres le bicorps minimal, on est contraint de faire de même pour ses deux corps ; dans le cas exceptionnel, au contraire, on peut interpréter sans paramètres ce bicorps de sorte que son échange soit induit par un automorphisme de G .

THÉORÈME 1. *Pour tout nombre premier q , il existe un multicorps constructible minimal $M_q = (L_1, \dots, L_q)$ de taille q , dont le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(M_q)$ est cyclique infini, engendré par la racine q° de son frobenius.*

DÉMONSTRATION. Comme le cas du bicorps est traité dans l'exemple, nous supposons que q est impair. Nous nous donnons arbitrairement les $\tau_{i+1,i}$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$, $q+1$ étant égal à 1. Nous voulons compléter cette donnée en un multicorps de sorte que la permutation définie comme dans le LEMME 2 par la permutation circulaire des indices soit un automorphisme, ce qui revient à respecter les conditions $\tau_{j+1,j} \cdot \tau_{j,i} = \tau_{j+1,i+1} \cdot \tau_{i+1,i}$. Pour cela, si le plus court chemin pour aller de i à j tourne dans le sens direct, nous prenons pour $\tau_{j,i}$ la composition des $\tau_{k+1,k}$ le long du dit chemin ; s'il tourne dans le sens inverse, nous prenons la composition de leurs inverses. Ça marche parce que le plus court chemin pour aller de i à j tourne dans le même sens que celui pour aller de $i+1$ à $j+1$. On remarque que $\tau_{i,j}$ est toujours l'inverse de $\tau_{i,i}$.

Comme nous pouvons choisir comme nous voulons les $\tau_{i+1,i}$, nous pouvons faire en sorte qu'au bout du cycle x se transforme en x^p , si bien que la permutation circulaire est racine q° du frobenius.

Supposons que notre multicorps M_q interprète sans paramètres un multicorps N de taille $n < q$, et notons Φ et φ leurs frobenius respectifs. Comme N n'a pas d'automorphisme d'ordre q , φ^m est l'unique racine q° de φ^{mq} , si bien que nous pouvons trouver m premier à q tel que Φ^m induise φ^m ; c'est impossible car Φ^m a une racine q° tandis que φ^m n'en a pas. La minimalité est donc établie.

Nous appelons *milieu* de (i,j) l'indice $m = (i+j)/2 \pmod{q}$; le milieu est définissable dans le multicorps M_q car, si i et j sont distincts, c'est l'unique point tel que $\tau_{m,i} \neq \tau_{m,j} \cdot \tau_{j,i}$. Comme les automorphismes du symétron du groupe cyclique d'ordre q sont les translations et les symétries, ce qu'il faut montrer, c'est que les symétries ne sont pas induites par des automorphismes de M_q .

Soit s une permutation des indices $\{1, \dots, q\}$; un automorphisme définissable σ de M_q induisant s sur son q -uplet de corps est de la forme $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ où chaque σ_i est un isomorphisme définissable entre les corps L_i et $L_{s(i)}$, nécessairement de la forme $\sigma_i = \tau_{s(i),i} \cdot \varphi_i$, où φ_i est la puissance d_i° du frobenius de L_i . La condition d'isomorphie s'écrit $\sigma_j \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \sigma_i$, soit encore $\tau_{s(j),j} \cdot \varphi_j \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \tau_{s(i),i} \cdot \varphi_i$. On doit donc montrer qu'on ne peut pas trouver de φ_i pour la satisfaire quand s est une symétrie.

Supposons que s fixe le point i et échange les points j et k . On obtient les trois conditions suivantes : $\tau_{k,j} \cdot \varphi_j \cdot \tau_{j,k} = \tau_{k,j} \cdot \tau_{j,k} \cdot \varphi_k$, ce qui signifie que $d_j = d_k$; $\tau_{k,j} \cdot \varphi_j \cdot \tau_{j,i} = \tau_{k,i} \cdot \tau_{i,i} \cdot \varphi_i$ et $\tau_{j,k} \cdot \varphi_k \cdot \tau_{k,i} = \tau_{j,i} \cdot \tau_{i,i} \cdot \varphi_i$, qui impliquent $(\tau_{ki})^{-1} \cdot \tau_{kj} \cdot \tau_{ji} = (\tau_{jk})^{-1} \cdot \tau_{jk} \cdot \tau_{ki}$ puisque $d_j = d_k$.

Dans le cas particulier de M_q cela s'écrit $\tau_{i,k} \cdot \tau_{k,j} \cdot \tau_{j,i} = \tau_{i,j} \cdot \tau_{j,k} \cdot \tau_{k,i}$, et n'est pas satisfait précisément quand i est le milieu de j et de k , ce qui disqualifie les symétries. FIN

THÉOREME 2. *Le groupe des automorphismes définissables d'un multikorps minimal de taille m est cyclique infini, engendré par une racine m° de son frobenius.*

DÉMONSTRATION. Comme il est observé dans POIZAT 2006, dans le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(M)$ d'un multikorps quelconque $M = (L_1, \dots, L_n)$ le groupe engendré par le frobenius est central d'indice fini ; en conséquence $\text{Aut}_{\text{def}}(M)$ n'a qu'un nombre fini de commutateurs, son dérivé est fini, et ses éléments d'ordre fini forment son plus grand sous-groupe fini F , dont chacun des points σ est déterminé par la permutation s des corps L_i qu'il induit.

Le quotient $\text{Aut}_{\text{def}}(M)/F$ est commutatif sans torsion, et a pour groupe d'indice fini l'image du groupe engendré par le frobenius ; c'est donc un groupe cyclique infini engendré par une racine m° du frobenius.

La relation d'équivalence $E(x,y)$, signifiant que x et y sont sur la même orbite de F , est définissable sans paramètres dans M . Le passage au quotient permet de définir un multikorps $N = M/E$; effet, si s est dans F et x dans L_i , $s.x$ est l'unique point de $L_{\sigma(i)}$ qui est congru à x modulo E . En conséquence, si M est minimal, F est réduit à l'identité.

D'après le LEMME 1(i), M est définissable sans paramètres, si bien que le modèle premier M_0 de sa théorie est basé sur le corps K_0 des nombres algébriques. Nous dirons que des automorphismes s_0 de K_0 et s_1 d'une de ses copies K_1 sont *homologues* si, pour chaque entier d , leurs restrictions respectives au corps à p^d éléments sont la même puissance du frobenius ; comme les τ_{ji} conjuguent des automorphismes homologues, les automorphismes (abstraits) de M_0 induits par les automorphismes de K_0 agissent identiquement sur le uplet de corps $(L_1, \dots, L_n)$.

Si M est minimal, les paramètres canoniques de deux corps doivent avoir même type au sens de la théorie de M , car sinon il aurait des sous-multicorps propres définissables sur $\emptyset$; comme M_0 est homogène, le groupe $\text{Aut}_{\text{abs}}(M_0)$ agit transitivement sur les corps, et, d'après le FAIT 11, il en est de même de $\text{Aut}_{\text{def}}(M_0)$. Le groupe cyclique d'ordre m doit donc agir transitivement sur les n corps, si bien que $n = m$. FIN

COROLLAIRE 3. (i) *Si A est une structure constructible autonome, le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(A)/\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ est trivial ou cyclique infini.*

(ii) *Un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos, interprète sans paramètres un bicorps.*

DÉMONSTRATION. (i) $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ est le fixateur d'un multikorps de taille minimale interprétable sans paramètres dans A .

(ii) Borel et Tits ne parlent jamais de racines m° du frobenius pour $m > 2$, ce qui ne laisse que deux possibilités : $m = 1$ ou $m = 2$. FIN

QUESTION. Nous sommes fatalement menés à cette demande de précision de la Conjecture : *Quel est l'obstacle à l'existence d'un groupe simple G de*

rang de Morley fini, interprétant sans paramètres le multicorps M_3 du THÉORÈME 1, et possédant un automorphisme définissable induisant la racine cubique de son frobenius ?

APPENDICE A. L'ÉCHO ET LA PLUIE

بزماس اتم پغمر بنگلماس بلکا بنگقو

Les novices dans le sujet ne doivent pas s'étonner de ce que certains écrits des Pères Fondateurs demandent une petite révision.

Un premier exemple est l'article ZIL'BER 1984, qui propose une approche modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits.

Un second est l'Appendix C de BOROVIK-NESIN 1994, qui veut montrer l'équivalence des notions de groupe rangé et de groupe de rang de Morley fini. Le seul ouvrage fiable d'exposition des propriétés modèle-théoriques des groupes de rang de Morley fini reste à ce jour POIZAT 1987, à lire préférablement dans sa version française, et je voudrais attirer l'attention sur le fait que son cadre conceptuel a été étendu par Samuel Zamour et moi-même aux symétrons, en l'absence de groupes (POIZAT 2026a).

Moi-même - mea culpa - ai fait circuler une version préliminaire de cet article contenant une grosse faute dans sa Section 7. Il faut croire que c'est une sorte de miracle que la démonstration du FAIT 14 donnée dans POIZAT 2026 ("si on fait confiance aux géomètres, le résultat s'étend automatiquement au cadre superstable") soit correcte, malgré son aspect farfelu, à la différence des démonstrations antérieures publiées dans BOROVIK-NESIN 1994 et dans ALTINEL-BOROVIK-CERLIN 2008, qui oublient les cas exceptionnels du Théorème de Borel-Tits.

L'extraordinaire distique de Mahmûd de Qaşgar qui ouvre cet appendice est extrait de ATALAY 1940-43, III, p. 379 ; sa transcription en caractères latins est yazmâs atım yağmur, yañılmâs bilgê yañqû, dont la traduction mot-à-mot est "ne ratant pas le tir : la pluie ; ne se trompant pas le savant : l'écho". En français courant, cela donne "le tireur qui ne manque jamais son but, c'est la pluie ; le savant qui ne fait jamais d'erreur, c'est l'écho" : on voit à quel point la syntaxe d'un turc d'Asie Centrale d'il y a neuf siècles diffèrait de celle d'un européen contemporain.

APPENDICE B. GROUPES QUASI-SIMPLES

*Si vous voulez simplifier, évitez de compliquer,
car ce n'est pas en compliquant que vous simplifierez.*

Maurice Tillieux, Essai sur la Vulgarisation

On dit que G est *quasi-simple* si G est égal à son dérivé, son centre $Z(G)$ est fini et $\Gamma = G/Z(G)$ est simple. Quand un géomètre parle de groupe algébrique simple, le plus souvent il veut dire quasi-simple.

ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008 p. 122 montrent qu'un groupe algébrique quasi-simple (sur K algébriquement clos) est autonome, en s'appuyant sur un système de racines de Γ . Il est plus direct d'attribuer, grâce aux commutateurs, des coordonnées dans Γ aux points de G : à α et β dans Γ on associe $[a,b]$ dans G , où a et b sont n'importe quelles préimages de α et β dans G . Comme tout point de G est produit de n commutateurs, on obtient ainsi une surjection définissable (au sens de G) de Γ^{2n} dans G , qui est donc Γ -interne, puis L_a -interne, et tout ce que POIZAT 2026 a montré pour Γ peut être montré pour G .

Si G est de rang de Morley fini, le raisonnement fonctionne, et G est Γ -interne, mais ça ne prouve pas que G soit algébrique si Γ l'est, car il pourrait mettre sur L_a de la structure supplémentaire.

C'est cependant vrai : si G est un groupe quasi-simple de rang de Morley fini tel que $G/Z(G)$ soit un groupe algébrique sur le corps K algébriquement clos, alors G est algébrique sur K . Ce n'est pas évident car les groupes algébriques simples ont des extensions centrales qui ne sont pas algébriques, lesquelles ont été très étudiées par les géomètres ; cela a été démontré par Tuna Altinel dans sa thèse soutenue en 1994, par inspection d'un argument de STEINBERG 1974, sous l'hypothèse que le groupe multiplicatif du corps n'a pas de sous-groupes non algébriques définissables dans G ; cette hypothèse est levée dans ALTINEL-CHERLIN 1999 (voir ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008, p. 136) grâce à un théorème de NEWELSKI 1991 et WAGNER 1990 sur la théorie des modèles des corps habillés de rang de Morley fini.

En résumé, la Conjecture d'Algébricité pour les groupes quasi-simples équivaut à cette même conjecture pour les groupes simples. J'aimerais bien trouver une démonstration modèle-théorique du résultat, ou bien une démonstration modèle-théorique qui le ramène à un résultat mathématique connu et facile à exprimer.

APPENDICE C. GRUPOS DE UM ESPELHO SÓ

*Bar Domínguez, de la vieja calle Corrientes que ya no queda,
De cuando era angosta, y la gente se mandaba el saludo
de vereda a vereda ...*

Enrique Cadícamo

Ce long appendice explicite de la façon la plus élémentaire possible les faits décrits dans la Section 4 dans le cas des groupes de graphe A_1 . Ce sont $SL_2(K)$, le groupe des matrices 2×2 de déterminant 1, et $PSL_2(K)$, le quotient de $SL_2(K)$ par son centre $\{Id, -Id\}$; $PSL_2(K)$ est simple, tandis que $SL_2(K)$ est seulement quasi-simple, mais nous travaillerons dans ce dernier, car il est facile de manipuler des matrices 2×2 ; conformément à l'esprit de la Théorie des Modèles, les résultats concernant $PSL_2(K)$ seront obtenus par un simple passage au quotient, sans même qu'il soit besoin d'en déterminer une représentation linéaire. En caractéristique 2, nous admettons sans états d'âme que $PSL_2(K)$ est le

même groupe que $SL_2(K)$. En d'autres termes, nous considérons $PSL_2(K)$ comme un groupe constructible et non pas comme un groupe algébrique !

Nous devons expliquer tout d'abord d'où vient ce corps L interprétable sans paramètres dans le groupe $G = SL_2(K)$.

Dans G , on distingue les éléments semi-simples, qui ont deux valeurs propres distinctes et inverses l'une de l'autre, des unipotents ($\neq Id$) qui ont 1 comme valeur propre double, et de leurs opposés qui ont -1 comme valeur propre double. Le centralisateur d'un semi-simple est un tore, diagonalisable, tandis que ceux des unipotents, et de leurs opposés, sont triangularisables, avec 1 ou -1 sur la diagonale. On distingue les unipotents des semi-simples par la torsion de leurs centralisateurs, et, en caractéristique $\neq 2$, les unipotents, qui sont des carrés, de leur opposés, qui n'en sont pas. Les unipotents forment donc dans G un ensemble définissable sans paramètres, composé d'une seule classe de conjugaison.

Un unipotent a une droite de points fixes, que nous appelons son *axe*. Deux unipotents commutent si et seulement s'ils partagent le même axe.

Le groupe radiciel $r(u)$ attaché à l'unipotent u est par définition formé des carrés de son centralisateur : $r(u)$ est aussi la composante connexe de ce dernier, formée de l'identité et des unipotents de même axe que u ; son normalisateur est conjugué du groupe triangulaire $ST_2(K)$ défini dans l'Appendice D.

On considère l'ensemble des paires $U = (u,v)$ d'unipotents qui commutent entre eux, c'est-à-dire qui ont même centralisateur ; ses fibres à u fixé forment un corps L_u^* privé de 0 , dont l'unité est u , comme le montre un calcul facile dans $ST_2(K)$. La somme de (u,v) et (u,w) , quand elle n'est pas nulle, est $(u,v.w)$, où v et w sont multipliés au sens de G . Le produit de (u,v) par (u,w) est (u,t) , où t est conjugué de w par un quelconque point de G qui conjugue u et v . Le quotient de U par la conjugaison est un ensemble L^* , auquel il n'y a plus qu'à ajouter 0 pour obtenir un corps L interprétable sans paramètres dans G .

Vérifions maintenant que G est L -interne au sens de sa propre théorie. Quand on fixe l'unipotent u , on obtient une fonction définissable f_u de L dans G , qui au point de L^* uniquement représenté par (u,v) associe v , et à 0 associe l'identité ; son image est le groupe unipotent $r(u)$. Comme G est engendré par un nombre fini de conjugués de $r(u) = f_u(L)$, il est bien L -interne, et la théorie exposée dans la Section 6 nous donne à penser que le groupe de Galois $Gal(G/L)$ doit être le groupe des automorphismes géométriques de G .

Pour le voir, les disciples de Saint Thomas sont priés de méditer sur le système de quatre équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Les identifications des coefficients c , a et d donnent les trois conditions $y = c$, $cx = a - 1$, $cz = d - 1$, qui ont une unique solution si $c \neq 0$; la quatrième équation est alors équivalente à l'égalité $ad - bc = 1$.

Si $c = 0$, $a = d = 1$, il y a une infinité de solutions car alors le système se réduit à $y = 0$ et $x + z = b$; dans les autres cas où $c = 0$, il n'y a pas de solutions.

On en déduit que tout point de $SL_2(K)$ se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui permet de définir une surjection $g_{uv}(t_1, t_2, t_3, t_4)$ de L^4 dans G , utilisant comme paramètres un unipotent u fixant le premier axe, et un unipotent v fixant le second, qui témoigne de la L -internité de G . Comme les paires de droites distinctes sont conjuguées sous l'action de G , ce qui importe est que u et v ne commutent pas, soit encore que $r(u) \cap r(v) = \{Id\}$.

L'intersection des normalisateurs de $r(u)$ et de $r(v)$ est un tore T , le tore diagonal en l'occurrence. Le normalisateur du tore $N(T)$ est formé des points de G qui conserve ses deux droites propres, c'est à dire T lui-même, et de ceux qui les échangent ; ces derniers sont des involutions en caractéristique 2, et des points d'ordre quatre, dont les valeurs propres sont les racines carrées de -1 , si la caractéristique est différente de 2.

Nous dirons que les unipotents u et v qui ne commutent pas sont *en vis-à-vis* si $u.r(v).u^{-1} = v.r(u).v^{-1}$, c'est à dire si l'image par u de l'axe de v est égale à l'image par v de l'axe de u . Pour voir ce que cela veut dire, nous rapportons l'espace aux axes de u et de v , ce qui donne $u =$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{où } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0. \text{ Le vis-à-vis signifie que}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est colinéaire à } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \text{ soit}$$

encore que $ab - 1 = 0$, que a et b sont inverses l'un de l'autre.

Un tore T , en l'occurrence celui défini par les axes des coordonnées, induit donc une symétrie entre les deux groupes unipotents qu'il normalise, si bien que le groupe G agit exactement transitivement

sur les couples d'unipotents en vis-à-vis, chacun de ces couples étant conjugué par un unique automorphisme intérieur de G au couple

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rappelons que le groupe de Galois est formé des automorphismes de G qui fixent L point par point. D'une part les automorphismes intérieurs, constituant un groupe définissable, agissent comme l'identité sur L ; d'autre part, un automorphisme de G envoie la fonction g_{uv} associée à un couple (u,v) en vis-à-vis sur une fonction $g_{u'v'}$ de même nature, et si cet automorphisme fixe L , il est égal à la conjugaison qui expédie (u,v) sur (u',v') . On voit que le groupe de Galois est $\text{Int}(\text{SL}_2(K)) = \text{PSL}_2(K)$, et que (u,v) est le paramètre canonique de la fonction g_{uv} .

Quand on fait le quotient par $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$, ce qui identifie les idempotents avec leurs opposés, on constate que le groupe de Galois est bien le groupe des automorphismes intérieurs de $\text{PSL}_2(K)$, ce qui est conforme à la théorie, puisqu'il n'y a pas d'automorphismes de graphe dans ce cas, qui est ordinaire en toute caractéristique.

Nous avons affaire ici au plus petit des systèmes de Tits ; dans un groupe algébrique simple G quelconque, les tores maximaux sont conjugués. Si T est l'un d'entre eux, ses groupes radiciels, qui sont les groupes unipotents de dimension un qu'il normalise, engendrent G ; l'action du normalisateur de T sur les points de ces groupes est engendrée par un nombre fini de symétries, dont la disposition des miroirs est gérée par le graphe de Dynkin.

Si vous ne vous sentez pas bien à l'aise avec l'internité, je vous invite à consulter POIZAT 1985, Ch. 18c. On remarque que la démonstration fait intervenir des objets imaginaires au sens de G , les droites, qui sont les unipotents modulo la commutation. En effet, G n'élimine pas les imaginaires dans le pur langage des groupes, à la différence du corps nu K ; pour les éliminer dans G , il faut fixer des paramètres : il n'est pas question d'interpréter sans paramètres L dans G sans faire appel à un quotient par une relation d'équivalence !

On définit dans G la congruence $g_{uv}(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_{uv}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, et on transporte la loi de groupe de G sur le quotient de L^4 par cette dernière ; on obtient ainsi un groupe Γ interprétable au sens de G et définissablement isomorphe à G . Mais, comme L est un corps nu définissablement isomorphe au corps de base K , Γ est définissable au sens de L , et un aller-retour entre K et L montre qu'au sens de L il est définissablement isomorphe à $\text{SL}_2(L)$; cela vient tout simplement de ce que les groupes radiciels engendrent $\text{SL}_2(K)$. C'est ça la signification du FAIT 11.

Naturellement, toutes sortes de fonctions peuvent être choisies pour témoigner de la L -internité de G , mais toutes donnent le même groupe de Galois. Afin de nous élever au dessus des nuages, nous rappelons comment Hrushovski (voir POIZAT 1987, Corollaire 2.27) utilise la simplicité du groupe pour voir qu'il est L -interne. Il considère le type p générique de G , correspondant dans notre prise de coordonnées à $(x,y,z,1)$ avec (x,y,z) algébriquement indépendants, et un type q non orthogonal à p , par exemple le générique de $r(u)$. Il réalise q de manière à faire dévier p , ce qui laisse une grande liberté de choix, non seulement pour q , mais aussi pour faire dévier (par exemple, nous pouvons prendre le même x pour p et pour q), et considère le sous-groupe H de G formé des g tels que $(g.p,q)$ soit le même type que (p,q) . Dans le cas d'espèce, H est le borel de G , isomorphe à $ST_2(K)$, qui contient $r(u)$. Le quotient à droite G/H est L -interne. Il considère alors l'intersection des conjugués de H – dans l'exemple choisi, deux suffisent – et prend le quotient, qui est aussi L -interne : ce quotient est, bien sûr, $PSL_2(K)$. Quand vous aurez compris que c'est la même chose que ce qu'on a dit avant, c'est que vous serez devenu un expert en Théorie des Modèles !

Ajoutons un exercice pour la fin : deux points non-centraux dans $G = SL_2(K)$ sont conjugués si et seulement s'ils ont même trace ; on peut donc définir sur les classes de conjugaison non-centrales de G une structure de corps définissablement isomorphe à L au sens de G . Pour voir comment faire, on s'aide de MUSTAFIN-POIZAT 2006, et on répète l'exercice avec $G = PSL_2(K)$.

APPENDICE D. L'IDENTITÉ EST UN MORPHISME, MAIS SON INVERSE N'EN EST PAS UN !

*Oh non, la vraie difficulté est de
comprendre ce qu'ils appellent un point !*

Olivier Chapuis, cité dans POIZAT 2026

Voici l'exemple le plus évident de groupes algébriques isomorphes constructiblement sans l'être géométriquement : $ST_2(K)$ est le groupe des $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}$, où $x \neq 0$, et $PST_2(K)$ celui des $\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où $u \neq 0$.

Le premier est, à conjugaison près, le borel de $SL_2(K)$, et le second celui de $PSL_2(K)$.

Après l'introduction des inverses z de x et w de u , on voit que ces deux groupes affins sont basés sur la même variété $K^* \times K$, le fermé de K^3 défini par $xz = 1$ ou $uw = 1$. Ce sont des produits semi-directs de K^+ par K^* , pour deux actions différentes.

$f((x,y)) = (x^2, xy)$ est un homomorphisme de groupe polynomial surjectif de $ST_2(K)$ sur son quotient par son centre $ST_2(K)/\{Id, -Id\} = PST_2(K)$. Si vous êtes géomètre, il vous faut vérifier que ce quotient satisfait bien aux propriétés fonctorielles des quotients, car les quotients sont choses triviales en Théorie des Modèles, mais pas en Géométrie !

f est bijectif en caractéristique 2, mais son inverse $g(u,v) = (u^{1/2}, vu^{-1/2})$ n'est pas un polynôme. Et en fait il est facile de voir que $ST_2(k)$ et $PST_2(k)$ ne sont plus isomorphes quand k est imparfait.

La conclusion est que $ST_2(K)$ et $PST_2(K)$ ne sont jamais le même groupe algébrique, même quand ils sont le même groupe quasi-algébrique : pour un géomètre, ST_2 et PST_2 sont deux schémas en groupe distincts, qui se trouvent avoir les mêmes points rationnels sur un corps parfait de caractéristique 2.

De même, SL_p et $PSL_p = SL_p/Z(SL_p)$ sont définissablement isomorphes en caractéristique p , mais pas géométriquement. La petite difficulté est de présenter le groupe-quotient PSL comme un groupe algébrique linéaire.

APPENDICE E. EXÉGÈSE DE BOREL-TITS

Y además, un poquito de francés !

Enrique Rodriguez, La Colegiala

Il faut répondre à l'étudiant qui se plaint, dans HUMPHREYS 2010, de ne pas trouver de version anglaise de BOREL-TITS 1973, que l'apprentissage du français n'est qu'un prélude bénin à l'intelligence de l'article. Une fois qu'on sait suffisamment de français, les choses sérieuses commencent !

Il n'est pas surprenant que les démonstrations soient pénibles, car il s'agit d'un texte majeur des mathématiques du siècle dernier. Je parle ici seulement de l'hermétisme de la formulation des résultats. Il faut savoir que, quand les auteurs parlent d'un groupe algébrique simple, il s'agit des points rationnels sur un corps k d'un schéma en groupe quasi-simple. Leurs théorèmes parlent d'isogénies entre groupes quasi-simples, mais ces isogénies, après quotient par les centres, produisent des isomorphismes entre les groupes simples associés.

Il faut donc se persuader que l'article décrit bien, comme cas particulier facile, ce qui nous intéresse, à savoir les isomorphismes entre les groupes algébriques simples, sur un corps algébriquement clos. Un moyen pour cela est d'apprendre l'anglais et de lire STEINBERG 1974.

On remarque que les auteurs distinguent soigneusement les isomorphismes abstraits des isomorphismes géométriques, mais qu'ils ne mentionnent jamais explicitement les isomorphismes constructibles, qui ont pourtant une grande vertu clarificatrice en caractéristique p .

APPENDICE F. AUTOMORPHISMES DES GROUPES VECTORIELS EN CARACTÉRISTIQUE p .

Japon, pas Nyanya !

René Goscinny

Il est observé dans POIZAT 2026 que, quand G est un groupe algébrique simple, $\text{Aut}_{\max}(G)^\circ = \text{Int}(G)$ est équivalent à $\text{RM}(\text{Aut}_{\max}(G)) \leq \text{RM}(G)$. Gregory Cherlin m'a fait remarquer que la Question F de cet article a une réponse négative, car les groupes vectoriels, en caractéristique p , ont des groupes algébriques d'automorphismes de dimension arbitrairement grande.

En effet, on voit facilement que les automorphismes géométriques de K^+ sont les applications linéaires, que ses automorphismes définissables ont la forme $a.x^{p^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, et aussi que les polynômes additifs ont la forme $P(x) = a_0.x + a_1.x^p + \dots + a_n.x^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

On définit ainsi l'automorphisme géométrique u_p de $K^+ \times K^+$ associé au polynôme additif P : $u_p(x,y) = (x+P(y),y)$; la composition de u_p et de u_q correspond à l'addition des polynômes, si bien que ces automorphismes forment un groupe U non définissable, de dimension infinie. En bornant le degré des polynômes, on l'exprime comme une réunion de groupes algébriques U_n de dimension n , isomorphes à $(K^+)^n$.

Il est montré dans TANAKA-KANETA 2008 que U et $\text{GL}_2(K)$ engendrent $\text{Aut}_{\text{geo}}(K^+ \times K^+)$. Quant à $\text{Aut}_{\text{def}}(K^+ \times K^+)$, c'est le groupe engendré par $\text{Aut}_{\text{geo}}(K^+ \times K^+)$ et l'inverse du frobenius.

APPENDICE G. ÉTAT PRÉSENT DE LA CONJECTURE

Quand est-ce que vous allez démontrer un vrai théorème ?

ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008, p. ix

Bien que ce ne soit pas dans le droit fil de notre sujet, je résume en quelques mots l'état présent de la Conjecture d'Algébricité, pour le bénéfice de celles et ceux qui découvrent la Théorie des Modèles.

On ne connaît toujours pas d'entier $n \geq 4$ pour lequel on soit sûr qu'elle soit vraie pour les groupes de rang n , le cas $n = 3$ n'ayant été éliminé que récemment par FRÉCON 2017.

Cependant les conclusions de ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008 sont particulièrement nettes, bien qu'elles reposent sur des démonstrations élaborées et tortueuses, décrivant au passage bien des propriétés des groupes de rang de Morley fini. Les groupes simples infinis de rang de Morley fini se répartissent en trois familles disjointes :

(1) *Caractéristique paire.* Le groupe G contient un groupe infini d'exposant 2. Dans ce cas la conjecture est vérifiée, G est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2.

(2) *Caractéristique impaire.* Le groupe G contient un groupe de Prüfer $Z(2^\infty)$. On ne sait toujours pas montrer que G est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, mais on dispose de beaucoup d'informations qui vont en ce sens.

(3) *Cas dégénéré.* Le groupe G n'a pas d'involutions, et on cherche désespérément à montrer qu'il n'existe pas.

On voit que les involutions sont au cœur de cette classification ; un précurseur du résultat est NESIN 1989, qui montre que les mauvais groupes de rang 3 (qui finalement n'existent pas) n'ont pas d'involutions.

Nous avons parlé, à propos du FAIT 9, du résultat précoce de Simon Thomas (THOMAS 1983), qui fait le lien entre la classification des groupes simples finis et celle des groupes algébriques simples. Combiné avec WAGNER 2001, il permet de montrer que les groupes définissablement linéaires sur un corps de rang de Morley fini et de caractéristique non-nulle obéissent à la Conjecture (POIZAT 2001).

Signalons enfin un résultat isolé, dont il a été question dans l'Appendice C : les sous-groupes de $GL_2(K)$ ou $PGL_2(K)$ ne donnent pas de contre-exemples (MUSTAFIN-POIZAT 2006). On ne voit pas comment étendre la méthode de démonstration aux plus grandes valeurs de la dimension, et quand on cherche à savoir si les groupes linéaires satisfont à la Conjecture d'Algébricité, on se heurte à un problème ouvert de pure Théorie des Groupes : on ne sait pas s'il existe des groupes simples linéaires sans involutions.

APPENDICE H. LA PHILOSOPHIE D'ALEKSANDR VASIL'EVIC

May be they are definable, may be they are not definable, but this is not important. The important thing is that they are the 2-sylows. Certainly !

A. V. B., Novosibirsk, octobre 1986

Voici une citation de BERKMAN-BOROVIK 2024 :

As a rule, the final identification of a simple group G of finite Morley rank as an algebraic group is done by proving that G is a Chevalley group over an algebraically closed field. We have not seen a single proof done by directly showing that G is an algebraic variety over an algebraic closed field and that the group operations on G are compatible with its structure as an algebraic variety.

Je lui opposerai cette définition inédite de ma discipline favorite :

La Théorie des Modèles est la branche des Mathématiques qui permet de dire des choses sensées sur les groupes algébriques simples sans jamais parler de systèmes de racines, mais seulement d'internité et de groupe de Galois.

B.P.

Références

- ALTINEL-BOROVİK-CHERLIN 2008 Tuna Altinel, Aleksandr Borovik & Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley Rank*, AMS
- ALTINEL-CHERLIN 1999 Tuna Altinel & Gregory Cherlin, *On central extension of algebraic groups*, the Journal of Symbolic Logic 64, 68-74
- ARTIN-SCHREIER 1927 Emil Artin & Otto Schreier, *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossen Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 5, 225-231
- ATALAY 1940-43 Besim Atalay, *Kâşgarlı Mahmud'un Divan'u Lûgat'it Türk*, Ankara
- BERKMAN-BOROVİK 2024 Ayşe Berkman & Aleksandr Borovik, *Primitive permutation groups of finite Morley rank and affine type*, ArXiv:2405.07307v2, 6 décembre
- BOREL 1970 Armand Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups*, Lecture Notes in Mathematics 131, Springer
- BOREL-TITS 1973 Armand Borel & Jacques Tits, *Homomorphismes "abstraites" de groupes algébriques simples*, Annals of Mathematics, 97, 499-571
- BOROVİK 2024 Aleksandr Borovik, *Finite groups actions on abelian groups of finite Morley rank*, Model Theory, Vol. 3, nb 2, 539-569
- BOROVİK-NESIN 1994 Aleksandr Borovik & Ali Nesin, *Groups of Finite Morley Rank*, Oxford
- CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank*, Annals of Mathematical logic, 17, 1-23
- CHEVALLEY 1955 Claude Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tohoku Mathematical Journal, Vol 7, 14-66
- FRÉCON 2017 Olivier Frécon, *Simple groups of Morley rank 3 are algebraic*, Journal of the American Mathematical Society, 31(3), 643-659
- HRUSHOVSKI 1989 Ehud Hrushovski, *On superstable fields with automorphisms*, in NESIN-PILLAY, *The Model Theory of Groups*, Notre Dame Mathematical Lectures n° 11
- HUMPHREYS 1981 James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer
- HUMPHREYS 2010 Idem, mathoverflow.net/questions/33348/theorem-of-borel-and-tits
- MUSTAFIN-POIZAT 2006 Erulan Mustafin & Bruno Poizat, *Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$* , Journal of Algebra, 297, 155-167

- NEWELSKI 1991 Ludomir Newelski, *On type definable subgroups of a stable group*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 32, 173-187
- POIZAT 1985 Bruno Poizat, *Cours de Théorie des Modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (traduit en anglais par Moses KLEIN, *A Course in Model Theory*, Springer, 2000)
- POIZAT 1987 Idem, *Groupes Stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (traduit en anglais par Moses KLEIN, *Stable groups*, American Mathematical Society, 2001 ; nouvelle édition : *Groupes Stables, quarante ans après*, 2026)
- POIZAT 2026 Idem, *Paramètres dans les corps algébriquement clos*, Annales Mathématiques du Québec, Vol 50.1, 295-321
- POIZAT 2026a Idem, *Bréviaire du symétron*, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 72, 395-424
- STEINBERG 1974 Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups*, Séminaire Bourbaki, n° 435, 307-426
- TANAKA-KANETA 2008 Takefumi Tanaka & Hitoshi Kaneta, *Automorphism groups of vector groups over a field of positive characteristic*, Hiroshima Math. J. 38, 437-446
- THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups*, Archiv der Math., 41, 103-116
- WAGNER 1990 Frank Wagner, *Subgroups of stable groups*, the Journal of Symbolic Logic, 66, 151-156
- WAGNER 2001 Idem, *Fields of finite Morley rank*, the Journal of Symbolic Logic, 55, 703-706
- ZIL'BER 1977 Boris Iosifović Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique* (en russe), Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188
- ZIL'BER 1984 Idem, *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields*, Colloq. Math. 48, 173-180
- ZIL'BER 1984a Idem, *The structure of models of categorical theories and the problem of finite axiomatizability*, Proceedings of the ICM-Warsaw 1983

31 août 2026