

LE PROBLÈME À DEUX CORPS

Bruno POIZAT¹

*A la mémoire de Claude Chevalley,
dont j'ai suivi le séminaire en un temps où
la classification des groupes finis simples
n'était pas encore acquise.*

CONJECTURE D'ALGÉBRICITÉ

ZIL'BER 1977, CHERLIN 1979

Tout groupe simple de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique G sur un corps K algébriquement clos.

Abstract. This paper is written under the shade of the *Algebraicity Conjecture*, which is open since fifty years. This conjecture postulates that the mere existence of an abstract notion of dimension of model-theoretic origin – the Morley rank – on the definable sets of a simple group G will necessarily provide G with the geometric structure of an algebraic group over some algebraically closed field.

The proper definable simple sections of an eventual minimal counter-example G to the Conjecture are algebraic, but G may a priori induce on them a structure stronger than that of a plain group (or a "naked group"), and therefore a preliminary step to the attack of the Conjecture by induction is to understand (and control !) the behaviour of a simple algebraic group when imported in an unknown setting of finite Morley rank.

This kind of results involves a delicate blend of Algebraic Geometry and Model Theory, the proportion of which being influenced by the personality of their author. If he has a geometric mind, he will describe the simple algebraic groups as *Chevalley groups*, generated by a Tits system of root subgroups; if he is more receptive to Mathematical Logic, he will try to avoid such a deep inspection of the structure of the group, and use instead a very general Galois theory associated to the model-theoretic notion of *Internality*. Generation by root subgroups is a particular case of internality.

¹ Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon-1, 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

It was realized only recently that the possibility to interpret *without parameters* a field in characteristic zero, a multifold in characteristic p , in any simple algebraic group G , combined with this Galois theory, gives a convincing description of the definable automorphisms of G , and even permits to characterize its geometric automorphisms. It provides a model-theoretic explanation for Borel-Tits Theorem, including its exceptional cases (we consider only simple algebraic groups over an algebraically closed field). This may be used to prove results as above, or to show that they can be left to Geometers.

This work begins by a collection of facts, making a bridge between Model Theory and Algebraic Geometry: they are listed here for the first time as a synthesis between the two disciplines. Their proofs, old or new, are only sketched and referenced, except when their originals can be shortened, or need to be amended.

Then a call to Borel-Tits Theorem makes explicit how these facts are under the control of a field in the ordinary cases, a bifield in the exceptional cases, which are defined parameter-freely in the algebraic simple groupe G .

A last section, consecrated to a general study of multifolds, shows that this limitation to bifields is a very specific property of algebraic simple groups among structures definable in an algebraically closed field. Indeed, there exist multifolds of arbitrarily large size which cannot interpret without parameters multifolds of a smaller size.

Some appendices are added at the end of the paper, mainly to answer some natural questions which lie on the banks of its mainstream.

Mots-clefs : groupes algébriques, groupes de Chevalley, isogénies exceptionnelles, Théorème de Borel-Tits, structures constructibles autonomes, multicorps

Index des sujets : 03C45, 03C60, 14L10, 14L15

1. GROUPES ALGÈBRIQUES, SOL GLISSANT

La Conjecture demande une explication de texte :

Tout groupe (*infini*) simple de rang de Morley fini est (*abstraitement*) isomorphe à un groupe algébrique G sur un corps K algébriquement clos.

Le rang de Morley est une notion modèle-théorique abstraite qui généralise la dimension en Géométrie algébrique. POIZAT 1987 sera notre

référence pour les propriétés très particulières du rang de Morley dans le cas des groupes ; cet ouvrage rend compte, en particulier, des premiers travaux de Boris Zil'ber, qui montrent que bien des propriétés des groupes algébriques ne mettent en jeu que la dimension et s'adaptent au cas général des groupes de rang de Morley fini (ZIL'BER 1977). En ce qui concerne les propriétés algébriques des groupes de rang de Morley fini, nos manuels seront BOROVIK-NESIN 1994 et ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008.

Nous verrons trois définitions possibles de la notion de *groupe algébrique*, qui conditionnent l'approche de la Conjecture.

En Géométrie, la coutume est de qualifier d'*abstrait* les isomorphismes pour la seule loi de groupe, sans propriétés géométriques particulières.

Le mot *simple* est pris ici au sens commun en Théorie des Groupes, mais attention à l'Appendice C !

Comme toute structure finie est algébrique pour une raison triviale, dans cet article, G sera toujours un groupe *infini*, le plus souvent algébrique sur un corps K algébriquement clos.

2. CAS PARTICULIER : LES GROUPES ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

On me pardonnera de commencer par quelque chose de très élémentaire, à seule fin de préciser de quoi je parle.

$GL_n(K)$ est le fermé de Zariski de $K^{n^2 + 1}$ défini par l'équation $\det(X).y = 1$. Un *groupe algébrique linéaire* G est un sous-groupe de $GL_n(K)$ défini par des équations polynomiales. Nous remarquons que ses fonctions $x.y$ et x^{-1} sont des polynômes.

Un homomorphisme entre deux groupes algébriques linéaires G_1 et G_2 est dit *géométrique* si c'est une application-polynôme. Un isomorphisme entre deux groupes algébriques linéaires est donc *géométrique* s'il est polynomial dans les deux directions. Ces deux groupes sont alors considérés par les géomètres comme un même objet.

Suivant une habitude géométrique, initiée par Chevalley, je qualifie de *constructible* tout ce qui est définissable, avec paramètres, dans un corps K algébriquement clos, au sens de la Théorie des Modèles. En caractéristique nulle, tout homomorphisme de groupe constructible est géométrique. Ce n'est pas vrai en caractéristique p , où il est seulement *quasi-géométrique*, c'est-à-dire polynôme en les racines p^n -ièmes des x_i (POIZAT 1987, p. 125). Il y a alors des groupes algébriques qui sont constructiblement (c'est-à-dire définissablement) isomorphes sans l'être géométriquement ; ils sont identifiés par les théoriciens des modèles, mais pas par les géomètres.

On verra dans l'Appendice B un exemple facile, mais pas simple.

3. TROIS FAÇONS DE VOIR UN GROUPE ALGÈBRE SIMPLE

Il y a au moins trois façons de définir ces groupes, dont les tenants et aboutissants seront discutés dans la section suivante.

1. Comme un groupe constructible, c'est-à-dire comme un groupe définissable dans un corps algébriquement clos K .
2. Comme une variété algébrique, munie d'une loi de groupe géométrique.
3. Comme un groupe de Chevalley, engendré par un *système de Tits* de *sous-groupes radiciels* (qui sont des copies de K^+), sous le contrôle d'un graphe fini, le *diagramme de Dynkin*.

Cette génération par les sous-groupes radiciels est une façon d'associer aux points de G des coordonnées dans K , ou plutôt (comme nous le verrons) dans une copie de K , qui illustre la notion modélisatrice d'*Internité*, dont elle est un cas particulier.

En fait, les systèmes de Tits constituent des formes d'internité extrêmement concrètes, jusqu'à permettre des calculs précis. Par contraste, l'*Internité* en Théorie des Modèles peut être de nature générale et totalement abstraite, comme celle associée par Ehud Hrushovski à un groupe simple de rang de Morley fini (POIZAT 1987, p. 151).

4. UNE SÉRIE DE QUATORZE FAITS ÉVIDENTS OU SOPHISTIQUÉS

Les faits classiques ou anciens sont presque tous montrés dans POIZAT 1987, et les nouveautés le sont dans POIZAT 2026.

FAIT 1. *Tout groupe algébrique affín est géométriquement isomorphe à un groupe algébrique linéaire* (POIZAT 1987, p. 145).

FAIT 2. *Il y a des groupes algébriques non linéaires, mais ceux qui sont simples sont affíns* (POIZAT 1987, p. 147 ; cela permet de formuler avec précision la Conjecture, sans que cela soit très utile pour la résoudre !).

FAIT 3. *Un groupe algébrique simple est géométriquement isomorphe à un groupe linéaire défini par des équations polynomiales à coefficients entiers. Par conséquent tout automorphisme du corps K induit un automorphisme du groupe G .*

Voir BOREL 1970. C'est un fait très profond, lié au suivant, au cœur de la découverte par Claude Chevalley que ce qui était à l'origine une théorie des groupes de Lie – variétés analytiques sur le corps des

complexes – pouvait s'adapter à un contexte purement algébrique, valable sur n'importe quel corps, même de caractéristique p , et même fini (CHEVALLEY 1955). On voit que les groupes algébriques simples forment une famille bornée (en contraste saisissant avec les variétés abéliennes), classifiable indépendamment de la caractéristique ; on remarque que l'action sur G des automorphismes de K dépend de la représentation sans paramètres choisie pour G : elle n'est pas canonique.

FAIT 4. *Un groupe algébrique simple est un groupe de Chevalley, et réciproquement, mais pas toujours de manière unique.*

FAIT 5 (Weil, van den Driess, Hrushovski). *Un groupe constructible est constructiblement isomorphe à un groupe algébrique.*

POIZAT 1987, p. 137 ; il s'agit de la version modèle-théorique du Théorème d'André Weil sur les morceaux de groupe, promise à un bel avenir ; c'était la première question qui aurait dû venir à l'esprit à propos de la Conjecture d'Algébricité : a-t-elle un contre-exemple définissable dans K algébriquement clos ? Mais ce n'est pas la raison pour laquelle je l'ai posée dès 1979 à Alexandre Grothendieck : j'étais motivé par la théorie de Galois des équations différentielles, qui m'a également conduit à introduire l'élimination des imaginaires en 1983.

FAIT 6. *Tout corps constructible infini L est constructiblement isomorphe au corps de base K* (POIZAT 1987, p. 150).

FAIT 7. *Si G est simple, une copie L_a de K est définissable avec paramètres a dans le groupe G .*

L'appel à une survivance du contexte topologique originel, la notion de variété complète, montre immédiatement que les borels de G sont conjugués, et non nilpotents car de centre trivial, si bien qu'on peut y définir un corps à la manière de Zil'ber (POIZAT 1987, p. 94) ; on peut d'ailleurs contourner la topologie grâce à une propriété modèle-théorique des corps nus algébriquement clos (POIZAT 1987, p. 117 ; les groupes constructibles sont pseudo-localement-finis). Cet argument fait cruellement défaut dans le cas général de groupes simples de RM fini.

FAIT 8. *Un groupe algébrique G simple est une structure constructible autonome, ce qui signifie que toute partie de $G^{\times n}$ définissable dans K est définissable (avec paramètres) dans le groupe nu G .*

POIZAT 1987, p. 151 ; la théorie de G est $\aleph_1$ -catégorique (Zil'ber) ; au sens de cette théorie G , étant simple, est L_a -interne (Hrushovski), et d'après le FAIT 6 L_a est un corps nu, c'est-à-dire sans structure supplémentaire, définissablement au sens de K isomorphe à K .

FAIT 9. *Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique si et seulement s'il interprète un corps algébriquement clos tout en le laissant nu.*

C'est élégant, et ça introduit bien la problématique du mauvais groupe et du mauvais corps, mais ça n'avance pas beaucoup pour répondre à la Conjecture, car on sait aujourd'hui que les corps habillés de RM fini sont Légion ! Autre caractérisation utile dans certains cas : *Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique si et seulement s'il est pseudo-localement fini* (POIZAT 1987, p. 117). En effet, toute structure définissable dans un corps nu algébriquement clos est pseudo-localement-finie, et pour la réciproque on aménage légèrement THOMAS 1983, qui repose sur la classification des groupes simples finis.

FAIT 10. *Soient G un groupe algébrique simple, sur un corps K algébriquement clos, et H un sous-groupe de G contenant une de ses restrictions élémentaires Γ . Alors, si (G, H) est de rang de Morley fini, H est égal à G .*

Il s'agit du théorème principal de BOROVIK 2024, dont l'analyse a motivé POIZAT 2026. La démonstration qui suit évite l'appel à des résultats de Théorie des Modèles élaborés, comme WAGNER 2001 et MUSTAFIN-POIZAT 2006.

DÉMONSTRATION. Comme le borel B de Γ a un centre trivial, on définit Λ_α grâce à l'action de B/B' sur $Z(B')$, où α est un uplet de paramètres dans Γ , si bien que le groupe additif de ce corps est un sous-groupe de G . Notons L_α sa clôture définissable dans G , et M l'intersection de L_α et de H . L'intersection N des $\lambda.M$, où λ parcourt Λ_α , est celle d'un nombre fini d'entre eux, et $\{\mu / \mu.N = N\}$ est un sous-corps de L_α qui contient Λ_α ; il est infini, algébriquement clos, égal à L_α , et donc $N = M = L_\alpha$.

L_α est un groupe connexe, et ses conjugués par Γ engendrent un sous-groupe définissable de H qui contient Γ . On est donc ramené au cas où H est définissable, et il reste plus qu'à vérifier que, quand on prend une représentation, G est la clôture de Zariski de Γ . Cela vient de ce que, si Γ est défini par un système d'équations à coefficient dans Λ_α , G est formé des points de L_α satisfaisant aux mêmes équations. FIN

On n'a pas besoin du FAIT 3 pour cette démonstration. Mais ce dernier permet de montrer que le modèle premier de la théorie de G est associé au corps des nombres algébriques.

FAIT 11. (i) *Deux structures constructibles autonomes, définies sur le même corps K , qui sont abstraitement isomorphes le sont constructiblement.*

(ii) *Tout isomorphisme abstrait entre deux structures constructibles autonomes sur des corps algébriquement clos se décompose en un isomorphisme induit par un isomorphisme entre les corps de base et un automorphisme constructible.*

POIZAT 1987, p. 152 ; (ii) est la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits, bien plus frustré que l'originale. Voici ce qu'en a dit James Humphreys sur la toile (HUMPHREYS 2010) : *This is interesting to know, but is far weaker than the Borel-Tits theorem and has its own probably substantial prerequisites.*

FAIT 12. *En caractéristique nulle, une structure A constructible autonome interprète sans paramètres une copie L de K ; ses automorphismes définissables sont ceux qui fixent L point par point ; il forment un groupe définissable $\text{Aut}_{\text{def}}(A)$, qui est en fait le plus grand groupe $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ de rang de Morley fini, et même superstable, d'automorphismes de A .*

POIZAT 2026 ; L peut être imaginaire, étant basé sur les classes d'une relation d'équivalence définissable sans paramètres ; son existence vient de ce que, en caractéristique 0, deux copies de K définissables (avec paramètres) sont définissablement isomorphes de manière unique. Un résultat de HRUSHOVSKI 1989 (évident dans le cas de RM fini) assure qu'un corps superstable (propriété plus faible que la finitude du rang de Morley) de caractéristique nulle n'a pas d'automorphisme définissable non trivial. Donc $\text{Aut}_{\text{def}}(A) = \text{Fix}(L)$ est le groupe de Galois $\text{Gal}(A/L)$ (appelé groupe de liaison dans ZIL'BER 1984a) de la L -internité de A .

FAIT 13. *En caractéristique p , une structure A constructible autonome interprète sans paramètres un multicorps $(L_1, \dots, L_n)$ de copies de K ; les automorphismes de A induisant un automorphisme d'ordre fini de ce multicorps forment le plus grand groupe $\text{Aut}_{\text{max}}(A)$ définissable d'automorphismes de A , qui est aussi son plus grand groupe superstable d'automorphismes.*

POIZAT 2026 ; on fait la même chose, mais en l'assaisonnant à la tambouille modèle-théorique ; il faut naturellement définir ce qu'est un multicorps, ce qu'on fera tout-à-l'heure dans la Section 7.

Bien sûr, ce ne sont pas tous les automorphismes d'ordre fini du multicorps qui se remontent en un automorphisme de A , qui d'ailleurs interprète sans paramètres de nombreux multicorps, de plus en plus grands ; seuls les plus petits sont significatifs.

FAIT 14. *Tout groupe superstable connexe d'automorphismes d'un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos est formé d'automorphismes intérieurs.*

POIZAT 2026 ; cela signifie que $\text{Aut}_{\max}(G)^\circ = \text{Int}(G)$, et le fait est bien connu des géomètres quand ils travaillent dans leur cadre restreint des objets définissables dans K . Les FAITS 12 et 13 le généralisent immédiatement au cadre général de la Théorie des Modèles superstable, il n'y a rien de plus à montrer !

5. COMMENT FONT LES GÉOMÈTRES

Les FAITS 10 et 14 sont indispensables dans une approche inductive de la Conjecture : si H est un contre-exemple de RM minimal, ses sections propres définissables simples sont des groupes algébriques, mais il est a priori possible que H les vête d'une structure plus forte que celle de groupe nu. Il faut donc maîtriser leur conduite quand ils émigrent dans un univers inconnu de RM fini.

La démonstration ci-dessus, du genre "si les géomètres savent le faire, nous le pouvons aussi", n'utilise aucune propriété structurelle du groupe G , si ce n'est qu'il interprète un corps infini (dont le groupe additif est sous-groupe de G pour le FAIT 10). Jusqu'à maintenant, nous n'avons utilisé que de la Théorie des Modèles, et de la Géométrie Algébrique rudimentaire. Nous avons laissé aux géomètres la démonstration du FAIT 14 restreint à l'univers d'un corps nu algébriquement clos, et il reste à expliquer brièvement comment ils font.

Ils savent que le groupe $\text{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs d'un groupe algébrique simple G est d'indice fini dans le groupe $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ de ses automorphismes géométriques, le quotient $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)/\text{Int}(G)$ étant isomorphe au groupe des automorphismes de son graphe de Dynkin (HUMPHREYS 1981, p. 160). Comme $\text{Int}(G)$ est un groupe définissable isomorphe à G , il en suit que $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est définissable, et que par conséquent il est inclus dans $\text{Aut}_{\max}(G)$.

Soit H un groupe définissable d'automorphismes de G ; d'après le FAIT 5, on peut munir le produit semi-direct $G \rtimes H$ d'une structure de groupe algébrique (peut-être pas unique, mais qu'importe !) ; son action sur son sous-groupe fermé normal G est géométrique, et si H est connexe elle est celle d'un sous-groupe de $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)^\circ = \text{Int}(G)$.

6. IDENTIFICATION DE $\text{Aut}_{\max}(G)$ À $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ GRÂCE AU THÉORÈME DE BOREL-TITS

Nous voulons montrer un résultat plus fort, à savoir que $\text{Aut}_{\max}(G) = \text{Aut}_{\text{geo}}(G)$, quelle que soit la structure de groupe algébrique plaquée sur le groupe constructible simple G , soit encore le fait suivant :

FAIT 14bis. Si G est un groupe algébrique simple, $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est définissable, de composante connexe $\text{Int}(G)$, et c'est le plus grand groupe superstable d'automorphismes de G .

Pour cela, il nous faut explorer d'un orteil prudent un terrain miné, celui de l'interprétation en termes de Théorie des Modèles d'un grand théorème du siècle dernier, le Théorème de Borel & Tits sur les automorphismes abstraits entre groupes algébriques simples ; l'expérience prouve que même des mathématiciens confirmés y sont en danger. Je répète que c'est uniquement pour clarifier le FAIT 14 que nous avons besoin de Géométrie, pas pour le démontrer.

En caractéristique 0, tout baigne : G simple constructible est un unique groupe algébrique, et un unique groupe de Chevalley ; l'isomorphisme définissable entre K et L est unique, et $\text{Aut}_{\text{abs}}(G)$ est le produit semi-direct de $\text{Aut}_{\text{def}}(G) = \text{Aut}_{\text{geo}}(G) = \text{Fix}(L) = \text{Gal}(G/L)$ par $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$.

Il importe de bien distinguer les rôles des corps K et L ; K est un objet du second ordre par rapport à G , il ne vit pas dans l'univers de G , et il s'efface quand on se place dans la théorie de l'objet autonome G . L'action de $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$ correspond au choix d'un facteur dans un produit semi-direct, et ne se concrétise que si on choisit une représentation sans paramètres de G . La copie L de K est au contraire canonique, interprétable dans G , et son fixateur est le groupe de Galois $\text{Gal}(G/L)$ de la coordinatisation de G par L associée à la L -internité. En caractéristique nulle, c'est le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(A)$ pour toute structure autonome A , qui dans le cas particulier d'un groupe simple est $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$.

En caractéristique p , le frobenius complique les choses, si bien que $\text{Aut}_{\text{def}}(G)$ n'est pas définissable. Par ailleurs, bien qu'il n'y ait pas de groupe superstable $\neq \{\text{Id}\}$ d'automorphismes de K , des automorphismes superstables $\neq \text{Id}$ existent individuellement ; on ne sait pas s'il peut y en avoir d'autres que les puissances du frobenius (cette question est attribuée sans référence à Angus Macintyre dans BOROVIK-NESIN 1994, p. 364 ; elle figure dans HRUSHOVSKI 1989).

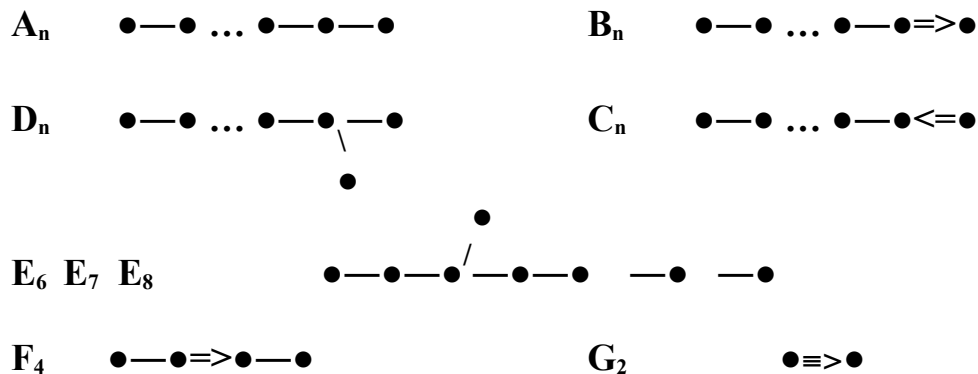
Dans le Théorème de Borel-Tits, on distingue alors deux cas :

(1) Dans le cas ordinaire, le groupe constructible G n'est groupe algébrique que d'une seule façon, si bien que $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est normal dans $\text{Aut}_{\text{abs}}(G)$, le quotient étant $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$ comme précédemment : tout automorphisme abstrait se décompose en un géométrique et un induit par $\text{Aut}_{\text{abs}}(K)$. Par conséquent $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est cyclique infini, engendré par le frobenius ; $\text{Aut}_{\text{max}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$, étant un sous-groupe de rang de Morley fini du groupe cyclique infini, est réduit à l'identité.

(2) Il y a des cas exceptionnels, en caractéristique 2 ou 3, où il existe en outre un automorphisme constructible dont le carré est l'automorphisme de G induit par le frobenius de K , et qui renverse les diagrammes de Dynkin.

Il y a donc deux structures de groupe de Chevalley sur G , avec des diagrammes opposés ; mais les groupes algébriques correspondant, qu'ils soient géométriquement isomorphes ou pas, n'ont pas d'automorphismes de graphe, si bien que leur $\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est le groupe $\text{Int}(G)$, qui est normal. $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ est le groupe cyclique infini engendré par la racine carrée du frobenius, et on raisonne de la même façon.

Les diagrammes de Dynkin sont dessinés ci-dessous. Ceux des cas exceptionnels sont, en caractéristique 2, $B_n \leftrightarrow C_n$, $F_4 \leftrightarrow F_4$, et en caractéristique 3, $G_2 \leftrightarrow G_2$. Un simple coup d'oeil permet de constater que tous ces graphes (orientés) sont bien rigides, n'ayant comme automorphisme que l'identité.



Si $n \geq 3$, B_n n'est pas isomorphe à C_n , et on obtient deux groupes algébriques simples distincts portés par G qui sont constructiblement mais pas géométriquement isomorphes.

Dans les trois autres cas exceptionnels, $B_2 = C_2$ et F_4 en caractéristique 2, G_2 en caractéristique 3, le graphe de Dynkin est isomorphe à son inverse, si bien qu'on obtient deux groupes de Chevalley distincts pour un même groupe algébrique.

Du point de vue modèle-théorique, la situation en caractéristique p s'explique ainsi.

Dans les cas ordinaires, un corps L est interprétable sans paramètres dans le groupe G ; la situation ressemble à celle de caractéristique nulle, à ceci près que $\text{Aut}_{\text{def}}(G)$ n'est pas définissable, le quotient $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Aut}_{\text{geo}}(G)$ étant le groupe cyclique engendré par le frobenius.

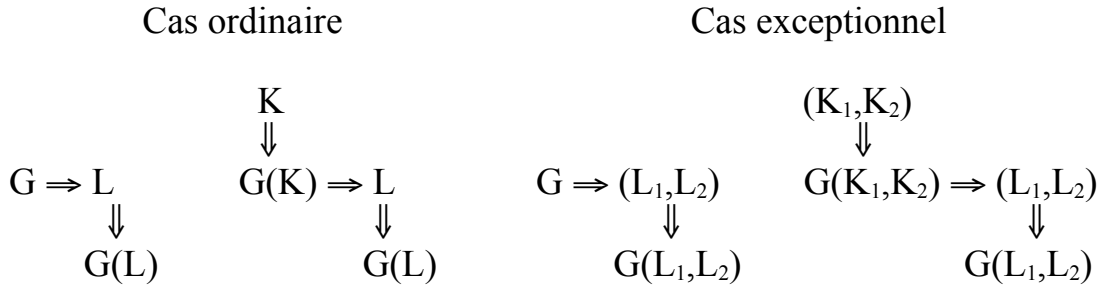
Dans les cas exceptionnels, on ne peut interpréter sans paramètres qu'un bicorps B , qui est la structure suivante : sa base $B = (L_1, L_2)$ est la réunion disjointe de deux copies de K ; son langage comprend la relation d'équivalence "appartenir au même corps", les graphes de $+$ et de $\times$, et une transposition τ des deux corps, formée d'un isomorphisme de L_1 sur L_2 et d'un isomorphisme de L_2 sur L_1 , dont le carré agit sur chaque corps comme le frobenius.

On note que B est autonome, qu'il n'a pas d'automorphisme $\neq \text{Id}$ d'ordre fini (d'après ARTIN-SCHREIER 1927, il n'en a pas qui conserve les

corps ; s'il les échangeait, ce serait une involution i commutant avec τ , et $i\tau$ définirait sur chaque corps un automorphisme ayant pour carré le frobenius), et que ses automorphismes définissables forment le groupe cyclique engendré par τ , la racine carrée du frobenius, c'est-à-dire le groupe $\text{Aut}_{\text{def}}(G)/\text{Int}(G)$; et en effet, G est B -interne.

On voit facilement que, si on interprète sans paramètres B dans K , ses deux corps sont nécessairement interprétés sans paramètres. De même, dans les cas ordinaires, quand on interprète sans paramètres dans G un bicorps, on est contraint d'interpréter ses deux corps également sans paramètres ; tandis que dans les cas exceptionnels, G a des automorphismes constructibles spéciaux qui induisent sur B l'échange τ des deux corps.

On peut relever ainsi le corps ou le bicorps, les flèches $X \Rightarrow Y$ signifiant que Y est définissable sans paramètres dans X , et que X ne vit pas dans l'univers du premier ordre de Y .



Dans les cas ordinaires, il n'y a qu'une seule structure de groupe de Chevalley sur G .

Dans les cas exceptionnels, G est en fait algébrique sur deux corps isomorphes distincts. Si on considère un système de racines r_1 faisant de G un groupe de Chevalley sur K_1 , un automorphisme spécial de G (qui induit τ sur le bicorps) le transforme en r_2 , faisant de G un groupe de Chevalley sur l'autre corps K_2 ; si alors on applique l'isomorphisme entre K_2 et K_1 induit par τ pour tout ramener sur le même corps $K = K_1$, r_2 devient un second système de racines faisant de G un groupe de Chevalley sur $K_1 = K$; mais ce-faisant nous renversons les flèches du diagramme de Dynkin, et nous obtenons finalement pour G deux structures de groupes de Chevalley sur K , avec des diagrammes de Dynkin opposés.

7. MULTICORPS MINIMAUX

Le Théorème de Borel-Tits met en lumière une propriété particulière des groupes algébriques simples parmi les structures constructibles autonomes : en caractéristique p , le sort de leurs automorphismes constructibles est décidé par un corps ou un bicorps. Nous montrons dans

cette section que la taille minimale d'un multicorps interprétable sans paramètres dans une structure autonome n'est pas bornée.

Il convient de rappeler tout d'abord la définition des multicorps.

DÉFINITION. *Nous appelons multicorps une structure constructible dont la base $M = (L_1, \dots, L_n)$ est la réunion disjointe d'un nombre fini (appelé taille de M) de copies du corps de base (algébriquement clos) K , et le langage est constitué des quatre relations suivantes :*

- (i) *l'équivalence exprimant que x et y appartiennent au même L_i ;*
- (ii) *le graphe de l'addition des corps, composé des triplets (x, y, z) appartenant au même L_i et tels que z soit la somme de x et de y au sens de ce corps ;*
- (iii) *le graphe du produit des corps défini semblablement ;*
- (iv) *et enfin une relation binaire $\tau(x, y)$ dont la restriction à $L_i \times L_j$ est le graphe d'un isomorphisme $\tau_{j,i}$ entre les corps L_i et L_j ; on suppose que chaque $\tau_{i,i}$ vaut l'identité.*

Les multicorps sont bien sûr autonomes.

On remarque qu'un automorphisme de M définissable qui préserve chacun de ses corps vaut la même puissance du frobenius sur chacun d'eux, car il doit commuter avec les $\tau_{j,i}$.

LEMME 1. (i) *Tout multicorps a une copie définissable sans paramètres dans le corps de base K .*

(ii) *Si le multicorps N est définissable sans paramètres dans le multicorps M , le frobenius de M induit sur N son frobenius.*

DÉMONSTRATION. (i) Nous interprétons le corps L_i comme l'ensemble des $(n+1)$ -uplets de K^{n+1} dont les n dernières coordonnées sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$; les $\tau_{i,j}$ se traduisent alors sur la première coordonnée par des puissances du frobenius.

(ii) Si M est interprétable sans paramètres dans K , le frobenius de K induit le frobenius de M . Si de plus N est interprétable sans paramètres dans M , il est interprétable sans paramètres dans K . FIN

LEMME 2. *Soient s une permutation des indices $\{1, \dots, n\}$, et σ la bijection de M dans M dont la restriction à L_i est $\sigma_i = \tau_{s(i),i}$. La condition pour que σ soit un automorphisme de M est $\tau_{s(j),j} \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \tau_{s(i),i}$ pour tous i et j .*

DÉMONSTRATION. Le seul problème est la préservation de la relation $\tau(x, y)$, qui s'exprime ainsi : $\sigma_j \cdot \tau_{j,i} = \tau_{s(j),s(i)} \cdot \sigma_i$; on substitue. FIN

THÉORÈME. *Pour tout nombre premier q , il existe un multicorps de taille q possédant un automorphisme constructible qui est racine q^o de son frobenius. Ce multicorps ne peut pas interpréter sans paramètres un multicorps de taille inférieure.*

DÉMONSTRATION. La deuxième partie vient de ce que, parmi les automorphismes d'un multicorps de taille strictement inférieure à q , le frobenius ne peut pas avoir de racine q^o . Comme le bicorps associé aux cas exceptionnels du Théorème de Borel-Tits a la propriété, nous supposons que q est impair.

Nous nous donnons arbitrairement les $\tau_{i+1,i}$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$, où $q+1 = 1$. Nous voulons compléter le multicorps de sorte que la permutation définie comme dans le LEMME 2 par la permutation circulaire des indices soit un automorphisme, ce qui revient à respecter les conditions $\tau_{j+1,j} \cdot \tau_{j,i} = \tau_{j+1,i+1} \cdot \tau_{i+1,i}$. Pour cela, si le plus court chemin pour aller de i à j tourne dans le sens direct, nous prenons pour $\tau_{i,j}$ la composition des $\tau_{k+1,k}$ le long du chemin ; s'il tourne dans le sens inverse, nous prenons la composition de leurs inverses. Ça marche parce que le plus court chemin pour aller de i à j tourne dans le même sens que celui pour aller de $i+1$ à $j+1$.

Comme nous pouvons choisir comme nous voulons les $\tau_{i+1,i}$, nous pouvons faire en sorte qu'au bout du cycle x se transforme en x^p . FIN

APPENDICE A. A PROPOS DE DÉMONSTRATIONS CORRECTES

بزماس اتم پغمز بنکلماس بلکا پنکقو

Les débutants dans le sujet doivent être prévenus que deux écrits de ses Pères Fondateurs sont entachés d'erreurs mathématiques sérieuses.

Le premier est l'article ZIL'BER 1984 sur une prétendue démonstration modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits.

Le second est l'Appendix C de BOROVIK-NESIN 1994, qui veut montrer l'équivalence des notions de groupe rangé et de groupe de RM fini. Le seul ouvrage fiable d'exposition des propriétés modèle-théoriques des groupes de rang de Morley fini reste à ce jour POIZAT 1987, à lire préférablement dans sa version française. Il est à mon avis intéressant de noter que son cadre conceptuel a été étendu par Samuel Zamour et moi-même aux symétrons, en l'absence de groupes (POIZAT 2025).

Enfin, un trait remarquable de la démonstration du FAIT 14 donnée dans POIZAT 2026 ("si on fait confiance aux géomètres le résultat s'étend automatiquement au cadre superstable") est qu'elle est peut-être farfelue, mais correcte, contrairement aux démonstrations antérieures de BOROVIK-NESIN 1994 et de ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008 qui négligent les cas exceptionnels du Théorème de Borel-Tits.

L'extraordinaire distique de Mahmûd de Qaşgar qui ouvre cet appendice est extrait de ATALAY 1940-43, III, p. 379 ; sa transcription en caractères latins est *yazmâs atım yağmur, yañılmâs bilgê yañqû* , dont la traduction mot-à-mot est "ne ratant pas le tir : la pluie ; ne se trompant pas le savant : l'écho". En français courant, cela donne "le tireur qui ne manque jamais son but, c'est la pluie ; le savant qui ne fait jamais d'erreur, c'est l'écho", ce qui montre à quel point un turc d'Asie Centrale s'exprimait il y a neuf siècles d'une façon différente de celle d'un européen contemporain.

APPENDICE B. L'APPLICATION-IDENTITÉ EST UN MORPHISME, MAIS SON INVERSE N'EN EST PAS UN !

Voici l'exemple le plus évident que j'ai trouvé de groupes algébriques isomorphes constructiblement sans l'être géométriquement.

$$ST_2(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \right\} \quad PST_2(K) = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Après l'introduction des inverses z de x et w de u , on voit que ces deux groupes affins sont basés sur la même variété $K^* \times K$, le fermé de K^3 défini par $xz = 1$ ou $uw = 1$. Les deux groupes sont des produits semi-directs de K^+ par K^* , pour deux actions différentes.

$f((x,y)) = (x^2, xy)$ est un homomorphisme de groupe polynomial surjectif de $ST_2(K)$ sur son quotient par son centre $PST_2(K) = ST_2(K)/\{Id, -Id\}$. Il convient de vérifier que ce quotient satisfait bien aux propriétés fonctorielles des quotients, car il faut garder présent à l'esprit que les quotients sont choses triviales en Théorie des Modèles, mais pas en Géométrie !

f est bijectif en caractéristique 2 , mais son inverse $g(u,v) = (u^{1/2}, vu^{-1/2})$ n'est pas un polynôme. Et en fait il est facile de voir que $ST_2(k)$ et $PST_2(k)$ ne sont plus isomorphes quand k est imparfait.

La conclusion est que $ST_2(K)$ et $PST_2(K)$ ne sont jamais le même groupe algébrique, même quand ils sont le même groupe quasi-algébrique.

De même, SL_p et $PSL_p = SL_p/Z(SL_p)$ sont définissablement isomorphes en caractéristique p , mais pas géométriquement. La petite difficulté est de présenter le groupe-quotient PSL comme un groupe algébrique linéaire.

APPENDICE C. GROUPES QUASI-SIMPLES

On dit que G est *quasi-simple* si $G = G'$, $Z(G)$ est fini et $\Gamma = G/Z(G)$ est simple. Quand un géomètre parle de groupe algébrique simple, le plus souvent il veut dire quasi-simple.

ALTINEL-BOROVİK-CHERLIN 2008 p. 122 montrent qu'un groupe algébrique quasi-simple (sur K algébriquement clos) est autonome, en

s'appuyant sur un système de racines de Γ . Il est plus direct de coordinatiser, grâce aux commutateurs, G par Γ : à α et β dans Γ on associe $[a,b]$ dans G , où a et b sont n'importe quelles préimages de α et β dans G . Comme tout point de G est produit de n commutateurs, on obtient ainsi une surjection définissable de Γ^{2n} dans G , qui est donc Γ -interne, puis L_a -interne, et tout ce que POIZAT 2026 a montré pour Γ , nous pouvons le montrer pour G .

Si G est de rang de Morley fini, le raisonnement fonctionne, et G est Γ -interne, mais ça ne prouve pas que G soit algébrique si Γ l'est, car il pourrait mettre sur L_a de la structure supplémentaire.

C'est cependant vrai : *si G est un groupe quasi-simple de rang de Morley fini tel que $G/Z(G)$ soit un groupe algébrique sur le corps K algébriquement clos, alors G est algébrique sur K* . Ce n'est pas évident car les groupes algébriques simples ont des extensions centrales qui ne sont pas algébriques, lesquelles ont été très étudiées par les géomètres ; cela a été démontré par Tuna Altinel dans sa thèse soutenue en 1994, par inspection d'un argument de STEINBERG 1974, sous l'hypothèse que le groupe multiplicatif du corps n'a pas de sous-groupes non algébriques définissables dans G ; cette hypothèse est levée dans ALTINEL-CHERLIN 1999 (voir ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008, p. 136) grâce à un théorème de NEWELSKI 1991 et WAGNER 1990 sur la théorie des modèles des corps habillés de rang de Morley fini.

En résumé, la Conjecture d'Algébricité pour les groupes quasi-simples équivaut à cette même conjecture pour les groupes simples. J'aimerais bien trouver une démonstration modèle-théorique du résultat, ou bien une démonstration modèle-théorique qui le ramène à un résultat mathématique connu et facile à exprimer.

APPENDICE D. EXÉGÈSE DE BOREL-TITS

Dans une conversation sur la toile, James Humphreys fait comprendre, à un étudiant qui se plaint de ne pas trouver de version anglaise de BOREL-TITS 1973, que l'apprentissage du français n'est qu'un prélude bénin à l'intelligence de l'article. Une fois qu'on sait suffisamment de français, les choses sérieuses commencent !

Il n'est pas surprenant que les démonstrations soient pénibles, car il s'agit d'un texte majeur des mathématiques du siècle dernier. Je parle ici seulement de l'hermétisme de la formulation des résultats. Il faut savoir que, quand les auteurs parlent d'un groupe algébrique simple, il s'agit des points rationnels sur un corps k d'un schéma en groupe quasi-simple. Le corps k doit satisfaire à certaines conditions, qu'on peut négliger car elles sont vérifiées quand il est algébriquement clos. Leurs théorèmes parlent d'isogénies entre groupes quasi-simples, mais ces isogénies, après quotient par les centres, produisent des isomorphismes entre les groupes simples associés.

Il faut donc se persuader que l'article décrit bien, comme cas particulier, ce qui nous intéresse, à savoir les isomorphismes entre les groupes algébriques simples, sur un corps algébriquement clos.

On remarque que les auteurs distinguent soigneusement les isomorphismes abstraits des isomorphismes géométriques, mais qu'ils ne mentionnent jamais les isomorphismes constructibles, qui ont pourtant une grande vertu clarificatrice en caractéristique p .

APPENDICE E. AUTOMORPHISMES DES GROUPES VECTORIELS EN CARACTÉRISTIQUE p .

Il est observé dans POIZAT 2026 que, quand G est un groupe algébrique simple, $\text{Aut}_{\max}(G)^\circ = \text{Int}(G)$ est équivalent à $\text{RM}(\text{Aut}_{\max}(G)) \leq \text{RM}(G)$. Gregory Cherlin m'a fait remarquer que la Question F de cet article a une réponse négative, car les groupes vectoriels, en caractéristique p , ont des groupes algébriques d'automorphismes de dimension arbitrairement grande.

En effet, on voit facilement que les automorphismes géométriques de K^+ sont les applications linéaires, que ses automorphismes définissables ont la forme $a.x^{p^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, et aussi que les polynômes additifs ont la forme $P(x) = a_0.x + a_1.x^p + \dots + a_n.x^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

On définit ainsi l'automorphisme géométrique u_p de $K^+ \times K^+$ associé au polynôme additif P : $u_p(x,y) = (x+P(y),y)$; la composition de u_p et de u_q correspond à l'addition des polynômes, si bien que ces automorphismes forment un groupe U non définissable, de dimension infinie. En bornant le degré des polynômes, on l'exprime comme une réunion de groupes algébriques U_n de dimension n , isomorphes à $(K^+)^n$.

Il est montré dans TANAKA-KANETA 2008 que U et $\text{GL}_2(K)$ engendrent $\text{Aut}_{\text{geo}}(K^+ \times K^+)$. Quant à $\text{Aut}_{\text{def}}(K^+ \times K^+)$, c'est le groupe engendré par $\text{Aut}_{\text{geo}}(K^+ \times K^+)$ et l'inverse du frobenius.

APPENDICE F. L'ÉTAT PRÉSENT DE LA CONJECTURE

Bien que ce ne soit pas dans le droit fil de notre sujet, je résume en quelques mots l'état présent de la Conjecture d'Algébricité, pour le bénéfice de mes lectrices/eurs novices en Théorie des Modèles.

On ne connaît toujours pas d'entiers $n \geq 4$ pour lequel on soit sûr qu'elle soit vraie pour les groupes de rang n , le cas $n = 3$ n'ayant été éliminé que très récemment par FRÉCON 2017.

Cependant les conclusions de ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008 sont particulièrement nettes, bien qu'elles reposent sur des démonstrations élaborées et tortueuses, décrivant au passage bien des propriétés des groupes de rang de Morley fini. Les groupes simples infinis de rang de Morley fini se répartissent en trois familles disjointes :

(1) *Caractéristique paire.* Le groupe G contient un groupe infini d'exposant 2. Dans ce cas la conjecture est vérifiée, G est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2.

(2) *Caractéristique impaire.* Le groupe G contient un groupe de Prüfer $Z(2^\infty)$. On ne sait toujours pas montrer que G est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, mais on dispose de beaucoup d'informations qui vont en ce sens.

(3) *Cas dégénéré.* Le groupe G n'a pas d'involutions, et on cherche désespérément à montrer qu'il n'existe pas.

On voit que les involutions sont au cœur de cette classification ; un précurseur du résultat est NESIN 1989, qui montre que les mauvais groupes de rang 3 (qui finalement n'existent pas) n'ont pas d'involutions.

Nous avons parlé, à propos du FAIT 9, du résultat précoce de Simon Thomas (THOMAS 1983), qui fait le lien entre la classification des groupes simples finis et celle des groupes algébriques simples. Combiné avec WAGNER 2001, il permet de montrer que les groupes définissablement linéaires sur un corps de rang de Morley fini et de caractéristique non-nulle obéissent à la Conjecture (POIZAT 2001).

Pour être complet, signalons un résultat isolé : les sous-groupes de $GL_2(K)$ ou $PGL_2(K)$ ne donnent pas de contre-exemples (MUSTAFIN-POIZAT 2006). La méthode de démonstration ne s'étend pas aux plus grandes valeurs de la dimension, et quand on cherche à savoir si les groupes linéaires satisfont à la Conjecture d'Algébricité, on se heurte à un problème ouvert de pure Théorie des Groupes : on ne sait pas s'il existe des groupes simples linéaires sans involutions.

APPENDICE G. LA PHILOSOPHIE D'ALEKSANDR VASIL'EVIC

Voici une citation de BERKMAN-BOROVIK 2024 :

As a rule, the final identification of a simple group G of finite Morley rank as an algebraic group is done by proving that G is a Chevalley group over an algebraically closed field. We have not seen a single proof done by directly showing that G is an algebraic variety over an algebraic closed field and that the group operations on G are compatible with its structure as an algebraic variety.

Je lui opposerai cette nouvelle définition de ma discipline favorite :

La Théorie des Modèles est la branche des Mathématiques qui permet de dire des choses sensées sur les groupes algébriques simples sans

jamais parler de systèmes de racines, mais seulement d'internité et de groupe de Galois.

B.P.

Références

- ALTINEL-BOROVİK-CHERLIN 2008 Tuna Altinel, Aleksandr Borovik & Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley Rank*, AMS
- ALTINEL-CHERLIN 1999 Tuna Altinel & Gregory Cherlin, *On central extension of algebraic groups*, the Journal of Symbolic Logic 64, 68-74
- ARTIN-SCHREIER 1927 Emil Artin & Otto Schreier, *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossen Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 5, 225-231
- ATALAY 1940-43 Besim Atalay, *Kâşgarlı Mahmud'in Divan'u Lugati't Türk*, Ankara
- BERKMAN-BOROVİK 2024 Ayşe Berkman & Aleksandr Borovik, *Primitive permutation groups of finite Morley rank and affine type*, ArXiv:2405.07307v2, 6 décembre
- BOREL 1970 Armand Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups*, Lecture Notes in Mathematics 131, Springer
- BOREL-TITS 1973 Armand Borel & Jacques Tits, *Homomorphismes "abstraites" de groupes algébriques simples*, Annals of Mathematics, 97, 499-571
- BOROVİK 2024 Aleksandr Borovik, *Finite groups actions on abelian groups of finite Morley rank*, Model Theory, Vol. 3, nb 2, 539-569
- BOROVİK-NESIN 1994 Aleksandr Borovik & Ali Nesin, *Groups of Finite Morley Rank*, Oxford
- CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank*, Annals of Mathematical logic, 17, 1-23
- CHEVALLEY 1955 Claude Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tohoku Mathematical Journal, Vol 7, 14-66
- FRÉCON 2017 Olivier Frécon, *Simple groups of Morley rank 3 are algebraic*, Journal of the American Mathematical Society, 31(3), 643-659
- HRUSHOVSKI 1989 Ehud Hrushovski, *On superstable fields with automorphisms*, in NESIN-PILLAY, *The Model Theory of Groups*, Notre Dame Mathematical Lectures n° 11
- HUMPHREYS 1981 James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer
- HUMPHREYS 2010 Idem, mathoverflow.net/questions/33348/theorem-of-borel-and-tits

- MUSTAFIN-POIZAT 2006 Erulan Mustafin & Bruno Poizat, *Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$* , Journal of Algebra, 297, 155-167
- NEWELSKI 1991 Ludomir Newelski, *On type definable subgroups of a stable group*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 32, 173-187
- POIZAT 1987 Bruno Poizat, *Groupes Stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (traduit en anglais par Moses KLEIN, *Stable groups*, American Mathematical Society, 2001 ; nouvelle édition : *Groupes Stables, quarante ans après*, 2026)
- POIZAT 2025 Idem, *Bréviaire du symétron*, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik
- POIZAT 2026 Idem, *Paramètres dans les corps algébriquement clos*, Annales Mathématiques du Québec, Vol 50.1, 295-321
- STEINBERG 1974 Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups*, Séminaire Bourbaki, n° 435, 307-426
- TANAKA-KANETA 2008 Takefumi Tanaka & Hitoshi Kaneta, *Automorphism groups of vector groups over a field of positive characteristic*, Hiroshima Math. J. 38, 437-446
- THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups*, Archiv der Math., 41, 103-116
- WAGNER 1990 Frank Wagner, *Subgroups of stable groups*, the Journal of Symbolic Logic, 66, 151-156
- WAGNER 2001 Idem, *Fields of finite Morley rank*, the Journal of Symbolic Logic, 55, 703-706
- ZIL'BER 1977 Boris Iosifović Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique* (en russe), Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188
- ZIL'BER 1984 Idem, *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields*, Colloq. Math. 48, 173-180
- ZIL'BER 1984a Idem, *The structure of models of categorical theories and the problem of finite axiomatizability*, Proceedings of the ICM-Warsaw 1983

20 juillet 2026