LOGIQUE ET GÉOMÉTRIE

Bruno POIZAT[1]

A Jean-Yves BEZIAU, à l'occasion de son soixantième anniversaire, en reconnaissance à son dévouement militant à la Logique, et aux Mathématiques en général.

Se dice en las milongas de Buenos Aires que el peor accidente que puede ocurrir a un macho argentino es caer de la altura de su ego ! *B. P.*

Abstract. This paper is written simultaneously for two kinds of audience, specialized in Algebraic Geometry or in Model Theory. It describes the two different approaches, from Algebra and from Logic, of the notion of simple algebraic group, in the perspective of the model-theoretic *Algebraicity Conjecture,* stating that a simple groupe of finite Morley rank (an abstract notion of dimension) should be an algebraic group over an algebraically closed field.

Mots-clefs : variété algébrique, morphisme, application constructible, groupe algébrique, groupe de rang de Morley fini

Index des sujets : 03C45, 03C60, 14L10, 14L15

Introduction. LA PEAU DE L'EAU

J'invite mes lectrices à consulter sur la toile le Catàleg Raonat de Pintures de Salvador Dalí, et tout particulièrement le n° P 653 qui porte le titre : *Dalí a l'edat de sis anys, quan pensava que era una nena, aixecant la pell de l'aigua per veure un gos dormint a l'ombra de la mar.* Pour nous, la peau de l'eau, ça sera la Théorie des Modèles, ou peut-être la Géométrie Algébrique, et le chien qui dort, les Mathématiques.

La Théorie des Modèles est la partie de la Logique Mathématique qui scrute les objets mathématiquement signifiants, tout en leur imposant un cadre simplifié qui lui permet de contrôler leur description. Un bon exemple est donné par son traitement des équations différentielles polynomiales ; l'Analyse nous suggère que la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n paramètres constants indépendants ; les corps différentiellement clos trahissent cette intuition, à l'exception notable du cas des équations linéaires, et de quelques autres. En général, les solutions

1 Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, Mathématiques, bâtiment 101, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

d'une équation d'ordre n forment un ensemble de dimension un à la géométrie triviale, étrangère au corps des constantes ; cela vient de ce que, dans le but d'obtenir une théorie des modèles agréable, on se limite à une structure où les seules fonctions à notre disposition sont les fractions rationnelles des inconnues et de leurs dérivées itérées, qui ne permettent pas d'établir un théorème des fonctions implicites.

La Géométrie fait la même chose quand elle étudie les groupes algébriques, en transposant dans un cadre d'algèbre pure, valable même en caractéristique p, ce qui relevait à l'origine des variétés analytiques complexes ; il est remarquable que tant de choses survivent à ce transfert. Quand elle se limite aux corps algébriquement clos, elle considère en fait les mêmes objets que les théoriciens des modèles, c'est-à-dire les groupes constructibles, qui sont les groupes définissables dans ces corps ; mais elle le fait de manière plus fine, et avec des outils plus puissants, comme nous le verrons.

Comme [P 87], cet article est une tentative de conciliation entre deux disciplines, et sa lecture demande une compétence minimale dans chacune d'elles ; les paragraphes qui sont marqués du signe ©, comme *constructible*, sont plutôt des exposés de Théorie des Modèles écrits à l'intention des géomètres, tandis que ceux qui sont marqués du signe Ⓐ, comme *algébrique*, sont plutôt des exposés de Géométrie Algébrique destinés aux logiciens. Le niveau de cette synthèse, qui penche du côté de la Logique, est très élémentaire ; elle contient peu de démonstrations, mais beaucoup de renvois à mes propres œuvres, anciennes ou récentes, dont elle constitue un commentaire : j'espère qu'il sera éclairant, à défaut d'être éclairé, pour mes lecteurs venus de tous les points de l'horizon.

Première partie. VIVRE DANS UN CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

1.A La théorie des corps algébriquement clos ©

Sans chercher à justifier la place éminente qu'occupent les corps algébriquement clos dans les mathématiques d'aujourd'hui, je me contente de récapituler les propriétés bien établies de leur théorie ([P 85], Ch. 6).

La première est l'***Elimination des quanteurs****,* moderne avatar de l'algorithme d'élimination successive des inconnues dans les systèmes d'équations algébriques, qui est aussi vieux que les Mathématiques elles-mêmes ; suivant ses convictions, on la mettra sous le saint patronage de Tarski ou de Chevalley.

Les formules $\varphi(x_1, \dots x_n)$ des logiciens sont obtenues à partir des équations polynomiales par l'usage des symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$, où les quantifications (dites du premier ordre) portent sur les points du corps considéré ; si les polynômes sont à coefficients entiers, on dit que la formule est *sans paramètres,* et elle s'interprète dans n'importe quel corps puisque 0 et 1 font partie du langage des corps. Sinon, on met de côté les coefficients des polynômes dans l'écriture de la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$; on les considère comme un uplet $\bar{a}$ de paramètres fixés, et la formule ne peut s'interpréter que dans un corps qui les contient.

En éliminant $\exists$ et $\forall$ on remplace chaque formule sans paramètres par une combinaison booléenne d'équations, qui lui est équivalente dans chaque corps K algébriquement clos ; cette élimination montre que toute extension de corps algébriquement clos est élémentaire, c'est-à-dire préserve la satisfaction des formules ; comme elle ramène tout énoncé à une combinaison booléenne d'égalités entre entiers, elle montre aussi la complétude de la théorie des corps algébriquement clos d'une caractéristique donnée.

Elle permet de décrire ainsi les parties définissables d'une puissance cartésienne $K^n = K \times \ldots \times K$ d'un corps K algébriquement clos ; les solutions d'une équation $P(x_1, \ldots x_n) = 0$, où P est un polynôme en n variables à coefficients dans K , forment ce qu'on appelle un fermé de Zariski principal ; un *fermé de Zariski* est l'intersection d'un nombre fini (ou même infini!) de fermés principaux, un *ouvert de Zariski* est le complément d'un fermé, et un *ensemble constructible* (pour les géomètres), ou *définissable* (pour les logiciens) est une combinaison booléenne d'un nombre fini de fermés. Les sous-ensembles de K^n définis par des formules à paramètres ne sont rien d'autre que les constructibles.

La deuxième propriété est l'***Elimination des imaginaires**,* qui déclare que toute relation d'équivalence définissable $E(\bar{x}, \bar{y})$ entre éléments de K^n est de la forme $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, où f est une fonction définissable, c'est-à-dire de graphe constructible, de K^n vers K^m , ce qui fait jouer à l'image de f le rôle du quotient K^n/E . C'est ainsi que chaque formule $\varphi(\bar{u}, \bar{a})$ possède un paramètre canonique, qui est la classe de $\bar{a}$ modulo l'équivalence $(\forall \bar{u})\ \varphi(\bar{u}, \bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}, \bar{y})$; chez les géomètres, la propriété correspondante est l'existence de corps de définition minimaux pour les idéaux. Par ailleurs il est assez facile de voir que, si X est une partie constructible de K^n , il existe une partie fermée Y de K^{n+1} telle que la projection de K^{n+1} sur K^n induise un bijection de Y sur X ; on en conclut que tout ensemble définissable dans un corps algébriquement clos (même si son interprétation fait intervenir un quotient par une relation d'équivalence définissable) est en bijection constructible avec un fermé de Zariski contenu dans un K^m .

Une troisième propriété fait le lien entre la combinatoire des structures finies et celle des structures algébriques, la classification des groupes simples en particulier : ***Toute structure définissable dans un corps algébriquement clos est pseudo-localement-finie***. Cela signifie qu'elle satisfait aux énoncés vérifiés par toutes les structures localement finies du même langage. Sa démonstration repose sur l'élimination des imaginaires, la compacité et la Théorie de Galois des corps finis ([P 87], Ch. 4a). Elle a comme corollaire le *Principe d'Ax,* qui déclare que toute fonction constructible injective d'un ensemble constructible dans lui-même est bijective.

Une dernière propriété, à laquelle les logiciens du milieu du siècle dernier attachaient une grande importance, est la ***Décidabilité*** de la théorie des corps algébriquement clos, conséquence du caractère algorithmique de l'élimination des quanteurs. Il convient à son propos de mentionner la *Conjecture du Jacobien,* à laquelle un nombre conséquent d'algébristes consacrent leurs travaux ; on considère un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle et une fonction-polynôme $f(x,y) = (P(x,y),Q(x,y))$ de $K \times K$ dans $K \times K$ dont l'application linéaire tangente est inversible en chaque point, c'est-à-dire dont le déterminant de Jacobi $\partial P/\partial x . \partial Q/\partial y - \partial P/\partial y . \partial Q/\partial x$ ne s'annule pas ; comme c'est un polynôme, il est constant et on peut supposer qu'il vaut 1 . La question est de savoir si la fonction f est toujours injective, c'est-à-dire bijective d'après le Principe d'Ax. Si on borne le degré d des polynômes P et Q , cette question s'énonce au premier ordre, et sa réponse est à ce jour inconnue si $d > 100$. Autrement dit, la théorie du corps des nombres complexes possède la propriété paradoxale d'être à la fois décidable et inconnue, ce qui aggrave le malaise de ma jeunesse exprimé dans [P 86], et fait que les problématiques de décidabilité ne concernent pas vraiment la Théorie des Modèles.

1.B Dimension des ensembles constructibles ©

Je garde pour le dessert une propriété de nature structurelle : la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est ***Aleph-un catégorique***. Par conséquent, leurs ensembles définissables sont munis d'un *Rang de Morley fini,* qui est aussi égal au *Rang de Cantor* (on n'a pas besoin de saturer le modèle pour le calculer), au *Rang de Lascar* (il est donc additif), et au *poids* modèle-théorique. Comme il est définissable, il y a ***Elimination du quanteur infini*** : à toute famille uniforme d'ensembles définissables est associé un entier n tel qu'un ensemble de la famille est infini dès qu'il a plus de n éléments.

Dans le cas d'espèce, comme le rang est conservé par bijection constructible, son calcul se ramène à celui du rang des fermés de Zariski, où il est égal à la *dimension géométrique,* définie au choix, une fois qu'on a décomposé les fermés en composantes irréductibles, par le degré de transcendance des corps de fonctions ou la hauteur de Krull des idéaux premiers. La dimension d'une partie constructible de K^n est celle de sa clôture de Zariski, mais il est remarquable que cette dimension se définit entièrement au niveau constructible grâce à l'induction suivante : la dimension de X est supérieure ou égale à $n+1$ si et seulement si on peut trouver une infinité de parties constructibles non vides de X deux à deux disjointes de dimension supérieure ou égale à n .

Deuxième partie. UNE VISION SCHÉMATIQUE DE L'EXISTENCE

2.A Formules et schémas © Ⓐ

Quand il parle de groupes algébriques, le logicien, théoricien des modèles, vit dans l'univers d'un corps algébriquement clos K ; il peut le remplacer par un corps K' plus grand *à condition qu'il soit lui aussi algébriquement clos,* car K' est alors une extension élémentaire de K , préservant la satisfaction des formules, ainsi que l’équivalence entre les ensembles définissables (et même interprétables) et les ensembles constructibles ; il identifie sans états d’âme deux structures définissables dans K qui se correspondent par un isomorphisme définissable.

Le géomètre, lui, est beaucoup plus circonspect, car il veut pouvoir obtenir quelque chose de sensé en prenant pour K' n’importe quel corps (même un corps imparfait, qui n’est pas clos par extraction de racine p° en caractéristique p) ; il lui faut être plus restrictif dans la définition des objets qu’il étudie, et surtout des isomorphismes "géométriques" qui autorisent à les identifier.

Nous allons voir que, à propos des groupes, Géomètres et Logiciens considèrent les mêmes objets, mais avec des ressources et des points de vue différents. C’est pour cela qu’il faut être très attentif aux possibles erreurs d’interprétation quand on transfère un résultat d’un domaine à l’autre : même les meilleurs spécialistes s’y laissent parfois prendre. Disons d’emblée que la Géométrie Algébrique obtient des résultats incomparablement plus fins que ceux de la Théorie des Modèles ; à mon avis, c’est pour cela qu’il importe de distinguer les faits pouvant être établis par des méthodes modèle-théoriques de portée générale, qu’on a l’espoir de généraliser un jour à des contextes plus larges, car elles sont plus grossières que celles qui exigent une description détaillée des structures géométriques.

Bien qu'ils ne soient pas tous natifs de la pampa, il est souvent pénible d’obtenir des géomètres des lumières sur la confrontation de leur discipline avec la Théorie des Modèles, surtout si on ne prend pas soin de poser ses questions avec l'humilité suffisante. Nous allons essayer de la décrire à un non-initié sans l’enfumer, en restant à l’intérieur des limites de la Géométrie Algébrique de grand-papa, celle de Chevalley, de Weil, de Dieudonné, de Serre, de Borel, de Tits, et de bien d’autres encore, que le temps a consacrés comme des mathématiciens respectables.

2.B Fonctions constructibles et morphismes géométriques Ⓐ

On considère des fermés de Zariski X , Y , … , contenus dans des puissances cartésiennes d’un corps algébriquement clos K .

En caractéristique nulle, une fonction constructible f de X dans Y est rationnelle par morceaux, ce qui signifie qu’on peut découper son domaine en un nombre fini de parties constructibles disjointes, de sorte que la restriction de f à chacune d’entre elles s’exprime par une fraction rationnelle dont le numérateur ne s’annule pas sur le morceau.

En caractéristique p , l’élévation à la puissance p° définit l’*automorphisme de Frobenius* du corps K , dont l’inverse, la racine p° , n’est pas rationnelle ; une application constructible s’exprime par morceaux comme fraction rationnelle de racines p^n-ièmes des inconnues, où $n \geq 0$.

Du point de vue géométrique, un fermé de Zariski constitue une *variété affine.* Un *morphisme* est une application-polynôme f de X dans Y , défini par un m-uplet de polynômes à n variables à coefficients dans K . Point n’est besoin d’être grand clerc en Algèbre (voir [P 87], Ch. 4c) pour montrer que les morphismes sont de façon équivalente définis localement par la condition suivante : X est contenu dans une réunion d'ouverts de Zariski tels que la restriction de f à chaque intersection soit une fraction rationnelle. La différence avec les applications constructibles, c'est qu'il ne s'agit plus d'un patchwork de définitions cas par cas, car ces ouverts ne sont pas disjoints : bien au contraire, ils s'intersectent largement ; en outre, il n'est plus question de racines p° en caractéristique p .

Un *iso-morphisme* (sous-entendu : *géométrique*) est une bijection entre X et Y qui s'exprime comme un polynôme, ainsi que son inverse ; un géomètre n'accepte d'identifier deux variétés que si elles sont isomorphes "géométriquement". On constate que, si f est un isomorphisme entre X et Y quand on se place dans un corps algébriquement clos K , qu'on peut prendre aussi grand qu'on veut, et qu'on considère n'importe quel sous-corps k de K contenant les paramètres nécessaires aux définitions de X , Y et f , la restriction de f à k définit bien une bijection entre les restrictions respectives de X et de Y .

L'inverse d'une bijection constructible est constructible, mais l'inverse d'un morphisme géométrique bijectif n'est pas nécessairement un morphisme. L'exemple canonique est la fonction $f(t) = (t^3,t^2)$ de K dans $K\times K$ qui définit une bijection entre la "droite affine" K et la courbe plane d'équation $x^2 = y^3$; son inverse vaut $f^{-1}(x,y) = x.y^{-1}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f^{-1}(0,0) = 0$; ce n'est pas un polynôme, cet inverse n'est pas Zariski-localement rationnel au voisinage de $(0,0)$. Il ne l'est pas pour une raison géométrique, qu'on voit quand on dessine le graphe des points réels de la courbe : il y a rebroussement à l'origine, alors que la droite est lisse, sans singularités. Ce type d'exemple n'apparaîtra pas dans notre étude à venir des groupes algébriques, dont les variétés sont lisses puisque leurs translations sont des morphismes.

La conclusion de cette section, c'est que les bijections constructibles chéries des théoriciens des modèles ne préservent pas les propriétés géométriques, les conditions tangentielles en particulier. Un géomètre peu disposé à identifier une droite avec une courbe ayant des singularités pourra en conclure qu'elles font n'importe quoi. Cependant elles sont soumises à de nombreuses contraintes, la plus apparente étant de devoir préserver la dimension ; mais il y en a d'autres, comme celles imposées par le Principe d'Ax : c'est ainsi qu'il n'y a pas de bijection constructible entre la droite affine et la droite affine privée d'un point, ou la droite affine augmentée d'un point, cette dernière étant en bijection constructible avec la droite projective.

Troisième partie. GROUPES CONSTRUCTIBLES ET GROUPES ALGÉBRIQUES

3.A Groupes de rang de Morley fini ©

Les groupes définissables dans un corps K algébriquement clos héritent de la dimension associée aux ensembles définissables dans ce corps : ce sont des groupes de rang de Morley fini, qui satisfont à ce titre aux propriétés générales de cette classe de groupes, établies dans les premiers travaux de Zil'ber [Z 77], par imitation d'ailleurs de ce qui se passait en Géométrie.

La plus apparente est la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables, sur les centralisateurs en particulier. Une conséquence est qu'un groupe G de rang de Morley fini a un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini $G°$, qu'on appelle sa *composante connexe* bien qu'il ne soit pas question d'une topologie à ce niveau, pour la raison qu'il ne peut être scindé en deux parties définissables de même rang.

Zil'ber a aussi montré que certains ensembles définissables engendraient des sous-groupes définissables ; par exemple le dérivé G' de G est définissable. On en déduit que G (non commutatif) est simple seulement s'il est *définissablement simple*, c'est-à-dire s'il n'a pas de sous-groupe normal définissable non trivial.

Il est aussi remarquable que, dans un contexte où on ne dispose d'aucune notion correspondant aux ouverts de Zariski, on puisse développer pour ces groupes une *théorie de la généricité*, apparue dans [P 83].

Un autre résultat de [Z 77] est qu'un groupe simple de rang de Morley fini est une structure aleph-un catégorique.

Par contre, une propriété particulière des groupes constructibles est d'être pseudo-localement-finis, ce qui parfois permet de montrer d'une façon modèle-théorique directe des faits dont la démonstration géométrique est plus élaborée.

3.B Groupes algébriques affines Ⓐ

Les schémas en groupe décrivant les groupes algébriques sont des façons particulières de définir les groupes constructibles qui produisent un groupe de "points rationnels" sur chaque corps k, à la seule condition qu'il contienne les paramètres nécessaires.

Je ne définis ici que les groupes *affines,* dont la base est un fermé de Zariski X contenu dans une puissance cartésienne K^n du corps de base (algébriquement clos) ; le carré cartésien de X est le sous-ensemble $X \times X$ de K^{n+n}, formé des 2n-uplets dont les n premières coordonnées, ainsi que les n dernières, satisfont aux équations définissant X. On demande que la multiplication du groupe s'exprime par un polynôme de $X \times X$ dans X, et la prise d'inverse par un polynôme de X dans X.

Par exemple, les matrices inversible d'ordre n forment le groupe algébrique affine $GL_n(K)$, si on le considère comme le sous-ensemble de $K^{n.n+1}$ défini par l'équation $\mathrm{Det}(x_{ij}).y = 1$. En effet, la multiplication des matrices est polynomiale, ainsi que l'inversion si on dispose de l'inverse du déterminant. On voit sans peine ([P 87], Ch. 4f) qu'un groupe affine est *linéaire,* c'est-à-dire isomorphe à un sous-groupe Zariski-fermé d'un $GL_n(K)$.

Comme un ensemble constructible a même dimension que sa clôture de Zariski, les sous-groupes définissables d'un groupe affine sont des fermés.

Un homomorphisme *géométrique* entre deux groupes algébriques affines est un homomorphisme de groupe qui est aussi un morphisme de variétés, soit encore, dans le cas présent, un polynôme. Un isomorphisme géométrique, qui autorise les Géomètres à identifier les deux groupes, est donc un isomorphisme de groupe qui est polynomial dans les deux sens.

Si la caractéristique de K est nulle, une application constructible est génériquement, c'est-à-dire localement au sens de la topologie de Zariski, rationnelle ; comme les translations sont des morphismes, si c'est un homomorphisme de groupe il est automatiquement géométrique. Autrement dit tout isomorphisme constructible entre deux groupes algébriques est géométrique.

Ce n'est plus le cas en caractéristique p, quand la définition des isomorphismes peut faire intervenir les racines $p°$. La section suivante contient un exemple très simple de groupes algébriques isomorphes constructiblement mais pas géométriquement.

3.C Un exemple très simple Ⓐ

Soit K un corps algébriquement clos. Nous appelons groupe projectif triangulaire $PT_2(K)$ celui qui est formé des matrices $\tau(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $x \neq 0$; pour en faire un groupe algébrique affine nous devons, selon nos conventions, ajouter une variable u et l'équation $x.u = 1$. C'est le produit semi-direct naturel du groupe additif de K par son groupe multiplicatif, l'action de K^* sur K^+ étant donnée par $\tau(x,0).\tau(1,y).\tau(x^{-1},0) = \tau(1,x.y)$.

Nous appelons groupe triangulaire spécial $ST_2(K)$ celui qui est formé des matrices $t(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}$, ou plus exactement $t(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & v \end{bmatrix}$ avec $x.v = 1$. C'est aussi un produit semi-direct de K^+ par K^*, mais cette fois c'est le carré de x qui agit, car $t(x,0).t(1,y).t(x^{-1},0) = t(1,x^2.y)$.

L'application-polynôme f qui à $t(x,y)$ associe $\tau(x^2,x.y)$ est un homomorphisme de groupe surjectif ayant le centre pour noyau, si bien que $PT_2(K)$ est le quotient de $ST_2(K)$ par son centre $\{Id, -Id\}$.

Si la caractéristique de k est 2, $1 = -1$, $PT_2(K)$ est le quotient de $ST_2(K)$ par son sous-groupe réduit à l'élément neutre, et du point de vue constructible, ces deux groupes sont identiques via l'application f ; celle-ci n'est pas un isomorphisme géométrique car l'expression de son inverse nécessite l'extraction d'une racine carrée. Et même, plus fortement, $PT_2(K)$ et $ST_2(K)$ ne sont pas le même groupe algébrique ; il ne peut exister d'isomorphisme polynomial de $PT_2(K)$ vers $ST_2(K)$, car si k est un corps imparfait, non clos par racine carrée, les groupes $PT_2(k)$ et $ST_2(k)$ ne sont pas isomorphes, puisque tous les points $\neq 1$ du dérivé de $PT_2(k)$ sont conjugués, tandis que ceux du dérivé de $ST_2(k)$ se répartissent en une infinité de classes de conjugaison !

On montre de même, en caractéristique p, que $PT_p(K)$ n'est pas le même groupe algébrique que $ST_p(K)$.

Il est souvent délicat d'expliquer à un innocent que l'application-identité peut être un morphisme sans que son inverse en soit un, en évitant de lui donner l'impression que les géomètres forment une secte à côté de laquelle les évangélistes républicains font figure de refuge ultime du cartésianisme.

3.D Quotients Ⓐ

Alors que les quotients d'un ensemble définissable par une relation d'équivalence définissable ne posent aucun problème en Théorie des Modèles, surtout quand les imaginaires s'éliminent, tout débutant en Géométrie Algébrique sait les difficultés qu'on a à définir (quand c'est possible) le quotient d'une variété par une relation d'équivalence Zariski-fermée. On demande au quotient de X par E de satisfaire à la caractérisation fonctorielle des quotients, à savoir que tout morphisme qui est constant sur chaque classe de E se factorise via X/E .

Il faut peut-être considérer comme une sorte de miracle que, si G est un sous-groupe algébrique affine et H un sous-groupe de G normal définissable, c'est-à-dire fermé, le quotient G/H existe bien, que c'est une variété affine, et en fait un groupe algébrique affine. Dans l'exemple 3C, voir que $PT_2(K)$ est bien le quotient géométrique de $ST_2(K)$ par son centre revient à vérifier que tout polynôme $P(x,x^{-1},y)$ qui satisfait à l'identité $P(x,x^{-1},y) = P(-x,-x^{-1},-y)$ s'écrit $Q(x^2,x^{-2},x.y)$; pour être plus précis, ou plus pédant, il vaut mieux dire que si $P(x,u,y) = P(-x,-u,-v)$ modulo l'idéal engendré par $x.u - 1$, $P(x,u,y) = Q(x^2,u^2,x.y)$ modulo ce même idéal.

Si H est un sous-groupe fermé non normal, les deux quotients à droite et à gauche G/H et $G\backslash H$ existent bien, mais il est d'une souveraine importance de se rendre compte que, dans certains cas, ce ne sont pas des variétés affines, mais des variétés projectives. C'est ce qui permet de montrer la conjugaison des sous-groupes de Borel, c'est-à-dire des sous-groupes définissable connexes résolubles maximaux. Dans le cas général d'un groupe de rang de Morley fini, cette notion purement géométrique de variété projective fait défaut, et on ne sait pas si les sous-groupes de Borel sont conjugués ; on ne sait pas non plus si le centre d'un borel centralise toute la composante connexe du groupe.

En conséquence, même si on veut n'étudier que les groupes algébriques linéaires, on ne peut se contenter des variétés affines, et même les variétés projectives sont insuffisantes. Le cadre minimal de leur étude est ce que Dieudonné appelle les "variétés de Serre" dans [D 74], obtenues par recollement d'ouverts affines. On obtient alors la notion générale de groupe algébrique, c'est-à-dire de groupe supporté par une variété et dont le produit et l'inverse sont des morphismes ; les groupes affines y tiennent toutefois une place importante, car un théorème de Rosenlicht affirme que le quotient d'un groupe algébrique connexe par son centre est un groupe linéaire ([P 87], Ch. 4f).

On ne peut qu'admirer le vrai tour de force qu'est le transfert, effectué par des algébristes comme Chevalley et Weil au milieu du XX° siècle, de ce qui était à l'origine une théorie des groupes analytiques complexes à un cadre purement algébrique, ayant un sens même en caractéristique p .

3.E Un minimum de géométrie ©

Les groupes définissables dans un corps algébriquement clos sont en fait ceux qui sont connus des géomètres. Il n'y en a pas de nouveaux, car ***Tout groupe constructible est constructiblement isomorphe à un groupe algébrique***. Pour le voir, on commence, grâce aux éliminations des quanteurs et des imaginaires, par modifier constructiblement le groupe de manière à obtenir une expression rationnelle du produit de deux points génériques et indépendants ; c'est immédiat en caractéristique nulle, et demande un lemme dû à Hrushovski en caractéristique p ; ensuite on se branche sur un théorème de Weil qui détermine un groupe algébrique par des données génériques ; les détails sont dans [P 87], Ch. 4e.

Ce résultat est sans appel en caractéristique nulle, car ce groupe algébrique est alors unique (on le montre comme pour les groupes affines). Il est plus ambigu en caractéristique finie, où deux groupes algébriques distincts peuvent être constructiblement isomorphes.

Une conséquence importante est que ***Tout corps infini* L *définissable dans un corps* K *algébriquement clos lui est définissablement isomorphe***. Le résultat est facile une fois qu'on s'est rendu compte que le produit semi-direct de L^+ par L^* est un groupe linéaire. En caractéristique nulle, comme K n'a pas d'automorphisme définissable autre que l'identité, l'isomorphisme constructible entre K et L est unique ; en caractéristique p, les isomorphismes définissables entre K et L forment une famille discrète, indexée par les puissances positives ou négatives du frobenius.

Quatrième partie. GROUPES ALGÉBRIQUES SIMPLES

4.A Groupes simples et structures constructibles autonomes ©

Depuis quarante-cinq ans les théoriciens des modèles se cassent les dents sur la question suivante : ***Un groupe infini simple de rang de Morley fini est-il un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos ?*** L'histoire de cette *Conjecture d'Algébricité* est racontée en détail dans [P 24]. Ce paragraphe explicite ce que voit un logicien dans un groupe algébrique simple G, et plus spécifiquement la situation que décrit [P 25].

Ce logicien a besoin d'un minimum de connaissances géométriques, qu'il peut d'ailleurs obtenir par ses propres moyens : les sous-groupes de Borel de G ne sont pas nilpotents ([H 81] p. 136, ou [P 85] Ch. 4a). Il en déduit qu'on peut définir dans G, par une formule à paramètres qui n'utilise que sa loi de groupe (et pas les opérations du corps K), et qui peut faire intervenir un quotient par une relation d'équivalence définissable, un corps infini L qui, d'après ce que nous avons vu, ne peut être qu'une copie du corps de base K.

Le groupe $G = G(K)$ est défini à partir de K par une formule que nous notons $G(\ )$; le corps L est isomorphe au corps K par un isomorphisme σ définissable dans K ; par un simple transport de la formule G( ) , obtenu en remplaçant ses paramètres dans K par leurs images dans L , on obtient un isomorphisme induit σ^* entre G = G(K) et G(L) , qui est définissable dans K . Eh bien $\boldsymbol{\sigma^*}$ ***est en fait définissable à partir de la seule loi de groupe de* G** . La démonstration de ce point crucial est difficile à apprécier sans expérience en Théorie des Modèles : cela vient d'un principe fondant une théorie de Galois, connu depuis longtemps dans le cas des équations différentielles algébriques ([P 83a], [P 85] Ch. 18), systématisé par Zil'ber pour les structures totalement catégoriques, et précisé par Hrushovski ([Z 80], [P 87] Ch. 4e) : comme G est aleph-un catégorique, il n'est pas orthogonal à L , et comme il est simple il est L-interne, c'est-à-dire qu'il est possible d'attribuer aux points de G des coordonnées dans L qui les déterminent une fois fixé un certain uplet de paramètres dans G , analogue à un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire. C'est ainsi que G est définissablement dans G isomorphe à un groupe H(L) définissable dans L ; on conclut en ramenant L dans K par l'inverse de σ : comme G(K) et H(K) sont isomorphes dans K , G(L) et H(L) sont isomorphes dans L . En outre le groupe des automorphismes de G qui fixent le corps L point par point est définissable, comme on le voit en examinant leur action sur les systèmes fondamentaux ; c'est pour expliquer la théorie de Galois correspondante, dans le cas des équations différentielles, que j'ai introduit l'Elimination des Imaginaires dans [P 83a].

Par contre, les conséquences qu'on en tire sont faciles à comprendre. C'est ainsi que ***Deux groupes algébriques simples, sur le même corps algébriquement clos, qui sont abstraitement isomorphes, sont constructiblement isomorphes*** (les géomètres appellent "homomorphismes abstraits" entre deux groupes algébriques les homomorphismes de groupe, qui ne se soucient pas de la structure de variété). Et en effet, si G isomorphe à G(L) définissablement au sens de G , tout groupe isomorphe G' est de la forme G(L') , définissablement au sens de G' ; si G et G' sont définissables dans le corps K , les corps L et L' sont isomorphes à K définissablement au sens de ce dernier. Cela ne signifie pas, bien sûr, que tout isomorphisme abstrait entre G et G' est constructible !

On peut considérer ce résultat comme la version constructible du Théorème de Borel-Tits dont il va être question en 4.D.

Une autre conséquence est qu'un groupe algébrique simple est une *structure constructible autonome* au sens suivant : ***Toute partie d'une puissance cartésienne de* G *, qui est définissable au sens du corps* K *, est définissable au sens du groupe* G** . On peut dire que la structure de variété de G est déterminée par sa seule loi de groupe, en un sens qui demande à être précisé ; les groupes algébriques simples sont à l'opposé d'une autre sorte de groupes algébriques, les variétés abéliennes, dans lesquelles c'est au contraire la structure de variété qui détermine la loi de groupe. Les propriétés modèle-théoriques décrites dans les deux sections suivantes ne dépendent pas de l'existence d'une loi de groupe, car elles sont valables pour toute structure constructible autonome ; on consultera [P 25] pour les détails et les démonstrations.

4.B Caractéristique zéro ©

Si G est un groupe simple, ou plus généralement une structure constructible autonome, définissable dans un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle, on peut définir sans paramètres dans G une copie L du corps K. En effet, on peut y définir un corps infini L_a avec un uplet a de paramètres, ce qui donne une famille uniforme de corps L_a où a parcourt un ensemble définissable sans paramètres A ; tout ces corps sont des copies du corps K, dans lequel tout est défini, et on obtient une famille uniforme $f_{aa'b}$ d'isomorphismes entre L_a et $L_{a'}$ définissable dans K, mais aussi dans G vu son autonomie. Sur la réunion disjointe des L_a, la relation binaire $E(x,y)$ définie sans paramètres par la formule $(\exists\, a,a',b)\ y = f_{aa'b}(x)$ signifie que x et y se correspondent par l'unique automorphisme constructible entre L_a et $L_{a'}$; c'est donc une relation d'équivalence, et le quotient par E donne le corps L cherché.

Comme L est définissable sans paramètres dans G, tout automorphisme de G induit un automorphisme de L ; si cet automorphisme est de rang de Morley fini, on voit facilement qu'il doit fixer le corps algébriquement clos L. Par ailleurs, comme G est L-interne, le groupe de ses automorphismes qui fixent L point par point est définissable. Il en suit que le groupe $Aut_{def}(G)$ des automorphismes constructibles de G est à la fois le plus grand groupe définissable d'automorphismes de G et le plus grand groupe de rang de Morley fini d'automorphismes de G ; pour cette raison nous le notons $Aut_{max}(G)$.

Du point de vue géométrique, la situation est sans ambiguïté : G, groupe définissable simple sur un corps algébriquement clos K de caractéristique nulle, est constructiblement isomorphe à un unique groupe algébrique, dont tous les automorphismes sont géométriques.

Etablir l'égalité $Aut_{def}(G) = Aut_{geo}(G) = Aut_{max}(G)$ ne nous a demandé aucune connaissance en Géométrie : nous n'avons utilisé que de la Théorie des Modèles, nous sommes restés au niveau constructible ; c'est seulement pour décrire ce groupe $Aut_{def}(G)$ que nous aurons besoin de Géométrie.

4.C Caractéristique p ©

En caractéristique p, la cuisine modèle-théorique ne permet de définir sans paramètres, dans une structure constructible S autonome, qu'une famille finie $(L_1, \dots L_n)$ de copies du corps de base. Les automorphismes de S qui induisent un automorphisme d'ordre fini de ce *multicorps* forment un groupe, noté $Aut_{max}(S)$, qui est à la fois le plus grand groupe constructible d'automorphismes de S et son plus grand groupe d'automorphismes de rang de Morley fini.

En ce qui concerne les groupes algébriques simples, il se trouve que seuls interviennent les *unicorps,* c'est à dire les copies du corps de base, et les *bicorps* que nous allons décrire.

Un bicorps est une structure constructible définie sur la réunion disjointe $B = L_1 \cup L_2$ de deux copies du corps de base K ; son langage comprend la relation d'équivalence déclarant que x et y appartiennent au même corps, le graphe de l'addition des deux corps, celui de leur multiplication, et une fonction θ de B dans B dont la restriction θ_1 à L_1 est un isomorphisme entre les corps L_1 et L_2, et la restriction θ_2 à L_2 un isomorphisme entre L_2 et L_1.

On observe que θ est un automorphisme du bicorps. Comme il est constructible par hypothèse $\theta_2.\theta_1$ est une puissance du frobenius, la même que $\theta_1.\theta_2$. En modifiant θ par une puissance du frobenius sur chacun des corps, on se ramène au cas où θ^2 vaut l'identité, ou bien vaut le frobenius sur chaque corps. Quand θ est involutif, un passage au quotient donne un unicorps définissable sans paramètres. Dans l'autre cas, on parle de bicorps tordu ; il n'est pas alors possible de définir sans paramètres dans B un unicorps (cela vient que le frobenius n'est pas le carré d'un automorphisme du corps algébriquement clos K) ; le groupe des automorphismes définissables de B est cyclique infini, étant engendré par la racine carrée du frobenius.

On en déduit que, si une structure constructible autonome S permet de définir sans paramètres un unicorps ou un bicorps, le groupe $\mathrm{Aut}_{def}(S)/\mathrm{Aut}_{max}(S)$ est trivial ou cyclique infini.

4.D Borel-Tits Ⓐ

Pour décrire le groupe $\mathrm{Aut}_{max}(G)$, ou au moins sa composante connexe, je ne sais pas comment échapper à un grand théorème de Géométrie Algébrique, celui de Borel et Tits [BT 73], que nous n'utiliserons que sur un corps K algébriquement clos, et pour des groupes qui sont simples au sens usuel en Théorie des Groupes.

Tout d'abord, en caractéristique finie, il peut y avoir plusieurs manières de faire d'un groupe constructible simple un groupe algébrique. D'après [H 81] p. 196, un groupe algébrique simple est déterminé (sauf minuscule exception pour certains groupes de type D_n) à isomorphie géométrique près par deux invariants.

Le premier, le *groupe fondamental*, est un travailleur immigré originaire de la topologie des variétés analytiques complexes qui, avant de recevoir son OQTN, s'est parfaitement intégré à la culture purement algébrique de la Géométrie. Nous l'avons employé clandestinement en 3.C, et il peut nous aider aussi à montrer que le groupe simple $PSL_2(K)$ n'est jamais géométriquement isomorphe à $SL_2(K)$, le groupe des matrices de déterminant 1, même en caractéristique 2, quand il lui est constructiblement isomorphe. Ce n'est pas difficile si on arrive à comprendre quel est le groupe algébrique linéaire $PSL_2(K)$ qui correspond au quotient de $GL_2(K)$ par son centre, formé des matrices scalaires.

Le deuxième est son *graphe de Dynkin* ([H 81] p. 163 et p. 230). Il est conservé par les isomorphismes géométriques, et aussi par les isomorphismes induits par les isomorphismes des corps de base, mais il peut y avoir des *isomorphismes constructibles exceptionnels*, qui ne sont géométriques que dans un sens, et qui renversent l'orientation du graphe de Dynkin quand celui-ci est orienté. Cela se produit en caractéristique 2 quand l'un des groupes est de type B_n et l'autre de type C_n , ou bien quand les deux sont de type F_4 , et en caractéristique 3 quand les deux sont de type G_2 . Si $n \geq 3$, les groupes de type B_n ne sont pas géométriquement isomorphes à ceux de type C_n ; dans les autres cas exceptionnels, $B_2 = C_2$ ou F_4 en caractéristique 2 , et G_2 en caractéristique 3 , il s'agit d'isomorphismes constructibles non géométriques entre groupes par ailleurs géométriquement isomorphes.

D'autre part, d'après [H 81] p. 166, les automorphismes géométriques de G sont engendrés par ses automorphismes intérieurs et le groupe fini induit par les automorphismes de son graphe de Dynkin. On en déduit que $Aut_{geo}(G)$ est un groupe définissable, dont la composante connexe est formée des automorphismes intérieurs ; nous avons donc décrit $Aut_{def}(G) = Aut_{geo}(G) = Aut_{max}(G)$ en caractéristique nulle.

En caractéristique p , dans le cas ordinaire un unicorps est définissable sans paramètres, et $Aut_{def}(G)$ est le produit semi-direct de $Aut_{geo}(G)$ par le groupe induit par les puissances du frobenius sur le corps de base (Il faut savoir que ***les groupes algébriques simples sont définissables sans paramètres,*** chacun étant isomorphe à un sous-groupe d'un $Gl_n(K)$ défini par des équations polynomiales à coefficients entiers ; en conséquence, chaque automorphisme du corps K induit un automorphisme du groupe G ; c'est ce résultat profond qui a permis à Chevalley d'adapter la théorie des groupes de Lie à un contexte purement algébrique, en toute caractéristique) ; $Aut_{def}(G)/Aut_{geo}(G)$ est cyclique infini.

Dans le cas exceptionnel, un bicorps est définissable sans paramètres ; G possède deux structures de groupe algébrique, géométriquement isomorphes ou pas ; l'automorphisme exceptionnel échange les deux corps du bicorps et l'orientation du graphe de Dynkin, c'est à dire échange les deux groupes algébriques. Un simple coup d'oeil permet de vérifier que, dans ces cas exceptionnels, le graphe n'a pas d'automorphisme non trivial, si bien que $Aut_{geo}(G)$ est le même pour les deux structures de groupe algébrique de G , car il n'est formé que des automorphismes intérieurs ; le quotient $Aut_{def}(G)/Aut_{geo}(G)$ est cyclique infini, engendré par la racine carrée du frobenius.

Comme le quotient $Aut_{max}(G)/Aut_{geo}(G)$ est définissable dans K , il ne peut être cyclique infini ; il est donc trivial. Il est frappant de constater que la structure de groupe algébrique attachée à un groupe constructible simple peut être ambiguë, mais pas ses automorphismes géométriques ; en effet, le groupe $Aut_{geo}(G)$ n'est autre que le groupe $Aut_{max}(G)$, qui se caractérise (par une propriété du second ordre) à partir de la seule loi de groupe de G .

Jusqu'à nouvel ordre, nous ne pouvons nous passer de la Géométrie pour obtenir le résultat suivant, essentiel sous l'hypothèse inductive de [ABC 08] : ***Dans un contexte de rang de Morley fini, tout groupe connexe d'automorphismes d'un groupe algébrique simple est formé d'automorphismes intérieurs.***

Références

[ABC 08] Tuna Altinel, Aleksandr Borovik & Gregory Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank,* American Mathematical Society, Providence, 2008

[BT 73] Armand Borel & Jacques Tits, Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples, *Annals of Mathematics,* 97, 1973, 499-571

[D 74] Jean Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique 1 & 2,* Paris, PUF, 1974

[H 81] James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups,* Springer, 1981

[P 83] Bruno Poizat, Groupes stables, avec types génériques réguliers, *The Journal of Symbolic Logic,* 48, 1983, 339-355

[P 83a] Id., Une théorie de Galois imaginaire, *The Journal of Symbolic Logic,* 48,1983, 1151-1170

[P 85] Id., *Cours de Théorie des Modèles,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985 (traduit par Moses Klein, *A Course in Model Theory,* Universitext, Springer, 2000)

[P 86] Id., Malaise et guérison, *Logic Colloquium'84,* North Holland, 1986, 155-163

[P 87] Id., *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987 (traduit par Moses Klein, *Stable groups,* American Mathematical Society, 2001)

[P 24] Id., La Conjecture d'Algébricité, dans une perspective historique et surtout modèle-théorique, *Model Theory,* vol. 3 (2), 2024, 479-504

[P 25] Id., Paramètres dans les corps algébriquement clos, à paraître aux *Annales Mathématiques du Québec*

[Z 77] Boris Iosifović Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique* (en russe), Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188

[Z 80] Id., *Totally categorical theories; structural properties and the non-finite axiomatizability,* Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1980

21 mars 2025, premier jour du Printemps