PARAMÈTRES DANS LES CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

UNE EXÉGÈSE MODÈLE-THÉORIQUE D'UN RÉSULTAT DE MONSIEUR ALEKSANDR VASIL'EVIĆ BOROVIK, SUIVIE D'UN COMMENTAIRE DE MÊME NATURE SUR LE THÉORÈME DE BOREL-TITS

Bruno Poizat[1]

Les principaux tropes sont l'antonomase,
la catachrèse, la métaphore, la métonymie et la synecdoque.

Résumé. Ce papier est une incursion de la Théorie des Modèles dans la Géométrie Algébrique, et son auteur attache un plus grand prix aux méthodes employées pour parvenir aux résultats obtenus qu'à la valeur intrinsèque de ces résultats-mêmes. En témoigne la nature des questions réparties dans le texte.

On y étudie les influences réciproques du groupe des automorphismes d'un corps algébriquement clos K sur le groupe des automorphismes d'une structure S définissable dans K. Les paramètres nécessaires aux définitions vont y jouer un rôle de premier plan, ainsi que les propriétés très particulières de la Théorie des Modèles des corps algébriquement clos.

Il commence par un commentaire d'un résultat de A.V. Borovik, qui a été la source de son inspiration, mettant en évidence sa dépendance au célèbre Théorème de Borel et Tits sur les isomorphismes abstraits des groupes algébriques simples, considéré d'un point de vue modèle-théorique. Ce théorème conduit finalement à la description des automorphismes d'ordre fini d'un groupe algébrique simple (sur un corps de base algébriquement clos), et de ses groupes superstables d'automorphismes, qui est basée sur des arguments généraux de Théorie des Modèles, ne demandant qu'une inspection minimale de la structure du groupe ; pour en tirer des conséquences, nous devons affermir un argument elliptique d'Altinel, Borovik et Cherlin, dans une démonstration qui est pourtant cruciale dans leur contexte inductif.

En fait, notre version du Théorème de Borel et Tits ne dépend pas de la présence d'une loi de groupe ; il est valable plus généralement pour ce que nous appelons les *structures constructives autonomes,* qui sont les structures infinies S, définissables dans un corps algébriquement clos K, pour lesquelles tout ce qui est définissable sur S dans la langage du corps K est définissable (avec paramètres) dans le langage de S. Un exemple significatif de telles structures est donnés par les *multicorps,* dont la banale définition cache une subtile théorie de Galois en caractéristique p ; en effet, dans n'importe quelle structure

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, Mathématiques, bâtiment 101, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

constructible autonome S on peut définir sans paramètres un multicorps qui contrôle les automorphismes de S au sens suivant : ceux d'entre eux dont l'action sur ce multicorps est d'ordre fini forment un groupe, noté $\mathrm{Aut}_{max}(S)$, qui est à la fois le plus grand groupe définissable d'automorphismes de S , et le plus grand groupe superstable d'automorphismes de S . En caractéristique nulle, ce résultat est facile à établir, car on peut alors définir sans paramètres dans S un unicorps, c'est-à-dire une copie L du corps de base K .

Quand S est un groupe algébrique simple G , dans les cas ordinaires une telle copie L existe même en caractéristique p ; mais il y a des cas spéciaux, dus à la présence d'endogénies exceptionnelles, ou seulement un bicorps (L_1,L_2) est définissable sans paramètres ; $\mathrm{Aut}_{max}(G)$ est le noyau de l'action des automorphismes de G sur le corps dans le premier cas, sur le bicorps dans le second, et il est en fait égal au groupe des automorphismes géométriques de G .

L'existence de $\mathrm{Aut}_{max}(G)$ s'obtient par des méthodes directes de Théorie des Modèles, mais il importe de se rendre compte que sa composante connexe est formée des automorphismes intérieurs de G . Comme il est définissable, c'est-à-dire constructiblement isomorphe à un groupe algébrique, il s'agit là d'un résultat de pure géométrie, qui est par ailleurs bien connu ; sa démonstration s'appuie sur une description minutieuse de la structure de G , mais il est inutile de la reproduire pour obtenir sa généralisation modèle-théorique, à savoir que, dans un contexte de rang de Morley fini, tout groupe connexe d'automorphismes de G est formé d'automorphismes intérieurs.

Abstract. This paper is an intrusion of Model Theory into Algebraic Geometry, and its author attaches a price to the methods used for the obtention of its results which is more important than the value of the results themselves. This is reflected in the nature of the questions disseminated in the text.

It studies the correlations between the group of automorphisms of an algebraically closed field K and the group of automorphisms of a structure S definable in it. The parameters involved in the definitions will play an important rôle, as well as the very peculiar properties of the Model Theory of Algebraically Closed Fields.

It begins with a commentary of a result of A.V. Borovik, which was the source of its inspiration, making explicit its dependence on the famous Theorem of Borel and Tits on abstract isomorphisms between algebraic simple groups, considered from a model-theoretic point of view. It finally leads to a description of the automorphisms of finite order of a simple algebraic group (over an algebraically closed field), and of its superstable groups of automorphisms, based on general arguments from Model Theory, demanding only a minimal inspection of the structure of the group; to derivate some consequences of it, we have to complete a somehow elliptic argument of Altinel, Borovik and Cherlin, in a proof which is nevertheless crucial in their inductive context.

In fact, our version of the Theorem of Borel and Tits does not depend of the presence of a law of group; it is valid more generally in what we call *autonomous constructible structures,* which are the infinite structures S definable in an algebraically closed field K, for which anything which is definable on S in the language of the field K is definable (with parameters) in the language of S. Significant examples of such structures are given by the *multifields,* whose plain definition hides a sophisticated Galois theory in characteristic p; in any autonomous constructible structure S, a multifield is defined without parameters, and controls the automorphisms of S in the following sense: the automorphisms of S whose action on the multifield has a finite order form a group denoted by $\mathrm{Aut}_{max}(S)$, which is the largest definable group of automorphisms of S, and also its largest superstable group of automorphisms. In characteristic zero, the same result is easy to handle because then a unifield, that is a copy L of the base field K, is definable in S without parameters.

When S is a simple algebraic group G, in the ordinary cases such a copy L exists even in characteristic p, but there are special cases, in the presence of an exceptional endogeny, where only a bifield (L_1,L_2) is definable without parameters; $\mathrm{Aut}_{max}(G)$ is the kernel of the action of the automorphisms of G on the field L in the general case, on the bifield (L_1,L_2) in the special case; in fact, it is the group of geometric automorphisms of G.

The existence of $\mathrm{Aut}_{max}(G)$ is obtained by straightforward model-theoretic methods. But it is of a sovereign importance to realize that its connected component is formed by the inner automorphisms of G; since $\mathrm{Aut}_{max}(G)$ is definable, that is definably isomorphic to an algebraic group, this is a purely geometric result, which is in fact well-known; its proof necessitates a minutious description of the structure of algebraic simple groups, but it is not necessary to reproduce it to obtain its model-theoretic corollary: in a context of finite Morley rank, a definable connected group of automorphisms of G is composed of inner automorphisms.

Mots-clés. Groupes algébriques simples, Théorème de Borel-Tits, endogénies exceptionnelles de Chevalley, Théorie de Galois, internité au sens de Hrushovski

Classification des sujets. 03C45, 03C60, 12L12, 20G07

0. Introduction

Le but de cet article est d'éclairer les rapports entre les automorphismes d'un corps algébriquement clos K et ceux d'une structure S définissable[2] dans K, quand une copie L du corps de base K est définissable dans S. Nous irons au-delà de la remarque de bon sens qui dit qu'un automorphisme de K qui fixe les paramètres de la définition de S induit un automorphisme de S, et qu'un automorphisme de S fixant les paramètres nécessaires à la définition de L induit un automorphisme de ce dernier. Mais il est clair d'emblée que les paramètres intervenant dans les définitions vont être sur le devant de la scène.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous commentons le théorème suivant, extrait de BOROVIK 2024, qui a été le déclic à l'origine de la présente étude, et m'a donné le désir d'affermir la démonstration approximative d'un autre résultat dont Borovik est un co-auteur ; ce dernier résultat est crucial dans le contexte inductif de ABC 2008.

Theorem 1.4. *Let* K *be an algebraically closed field of characteristic* $p > 0$ *, and* K_∞ *the algebraic closure of the prime field* F_p *in* K *. Let* G *be a semisimple algebraic group over* K *, and* G_∞ *the group of points of* G *over* K_∞ *. If* M *is a subgroup of* G *containing* G_∞ *and the structure* (G,M) *has a finite Morley rank, then* $M = G$.

Son énoncé est précisé dans le paragraphe qui le précède, car G_∞ n'est déterminé que si on se donne une façon de définir G dans K (par une formule pour un logicien, par un schéma pour un algébriste) qui ne fait intervenir que des paramètres algébriques. Borovik, citant BOREL 1970, déclare que chaque groupe algébrique simple[3] a une représentation linéaire définie par des équations polynomiales à coefficients entiers ; ce résultat, dont la source est le Théorème de la base entière de Chevalley, est d'après moi implicite dans la classification de THOMAS 1983 des groupes simples de rang de Morley fini localement finis, qu'il a ensuite étendue aux groupes pseudo-localement finis. Rappelons que le travail de Simon Thomas repose sur la classification des groupes simples finis. La question suivante est un prélude aux arguments développés dans le présent article :

Question A. (i) *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi un groupe simple définissable dans un corps algébriquement clos est définissablement isomorphe à un groupe définissable sans paramètres ?*

---

[2] Par définissable, j'entends définissable avec paramètres, sauf si le contraire est précisé ; je ne distingue pas définissable d'interprétable.

[3] Simple a pour nous le sens usuel qu'il a en Théorie des groupes : G n'est pas commutatif et n'a pas de sous-groupe propre normal. Nous qualifions de quasi-simples les groupes algébriques "simples" au sens géométrique : G est connexe, son centre $Z(G)$ est fini, et le quotient $G/Z(G)$ est simple. Nous considérerons le préfixe *semi-,* dans les énoncés du théorème de Borovik comme de celui de Humphreys, comme un objet décoratif.

(ii) *Plus généralement, qu'en est-il des groupes algébriques affines connexes ?*

La démonstration de Borovik repose sur deux ingrédients :
(i) la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits exposée dans POIZAT 1988 (voir aussi POIZAT 1987, p. 149, et le Corollaire 3.2 à venir), ayant pour conséquence que tout ce qui est définissable à l'intérieur du groupe simple G au sens du corps K, quand on considère G comme un objet définissable dans K, est définissable (avec paramètres) à partir de la seule loi de groupe de G.
(ii) le théorème de WAGNER 2001 affirmant que si K est un corps infini de rang de Morley fini, dans un langage augmenté, possédant un automorphisme définissable non-trivial, son modèle premier est basé sur K_∞.

Mais, à la fin de son article, Borovik propose d'autres démonstrations, demandant une meilleure connaissance de la structure des groupes algébriques simples ; l'une d'elle réduit le problème au cas où $G = SL_2(K)$ ou $PSL_2(K)$, et il note que le Theorem 1.4 devient alors une conséquence du Théorème 4 de POIZAT 2001, ou de sa généralisation MUSTAFIN-POIZAT 2006, qui décrit les sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$; ils n'utilisent pas le Théorème de Wagner, et sont valables en toute caractéristique, si bien que le Theorem 1.4 est aussi vrai en caractéristique nulle (quand K_∞ est la clôture algébrique du corps des rationnels). Le Théorème de Borel-Tits reste nécessaire à la démonstration, car il faut être sûr que les groupes radiciels de G soient définissables dans le groupe G (ou bien il faut le vérifier à la main).

Nous allons voir bientôt que le groupe G_∞ est une restriction élémentaire de G ; mais le Theorem 1.4 affirme une propriété beaucoup plus forte. Borovik l'utilise sous la forme suivante : si, dans un contexte de rang de Morley fini, G agit sur un ensemble X, et si chaque point de G_∞ normalise un sous-ensemble définissable de X, ou bien commute avec une fonction définissable de X dans X, alors cela a lieu pour tout point de G.

Dans ce qui suit, nous allons interpréter ce résultat en termes de pure Théorie des Modèles ; nous verrons que le seul fait mathématique sur lequel il repose, de même que notre version du Théorème de Borel-Tits et la description des automorphismes des groupes algébriques simples qu'on en tire, est que tout corps infini définissable dans un corps algébriquement clos nu[4] est définissablement isomorphe au corps de base (POIZAT 1987, p. 141) : le reste suit de résultats généraux de Théorie des Modèles. Cela conduit à envisager le Théorème de Borel-Tits dans un cadre plus large, dans lequel il n'est pas essentiel que les structures considérées soient des groupes.

1. Géomètres et Logiciens

Ce qui est frappant dans l'énoncé du Theorem 1.4, c'est qu'il confronte des notions de Théorie des Modèles ("le rang de Morley fini") à des notions de

[4] Nous voulons dire par là que le langage dans lequel le corps se présente est réduit au pur langage des corps ; pour nous, si rien d'autre n'est spécifié, un "corps de rang de Morley fini" peut être une structure de langage plus étendu.

Géométrie Algébrique ("les points rationnels d'un groupe algébrique") ; son énoncé est une mixture de Géométrie et de Théorie des Modèles.

Les théoriciens des modèles parlent d'un groupe algébrique comme d'un groupe *définissable,* et non pas *défini,* dans un corps algébriquement clos ; ils le voient marchant au milieu du cortège (η θεωρια !) formé par ses restrictions et ses extensions élémentaires ; ils s'immergent volontiers dans un domaine universel très saturé. Un point de vue très proche du leur est celui de WEIL 1948, qui nous apparaît a posteriori comme une étude fine de la Théorie des Modèles des corps algébriquement clos ; elle conforte l'impression que la Théorie des Modèles de la fin du siècle dernier est l'héritière de la Géométrie Algébrique des années cinquante.

Après Weil s'est développée une tendance à introduire les groupes algébriques non pas comme des groupes, mais comme des schémas de groupe, ayant des points rationnels sur n'importe quel anneau intègre A contenant les paramètres nécessaires à leur définition : les points rationnels sur A , eux, forment un groupe[5]. Une possibilité est donnée par les sous-groupes Zariski-clos des groupes linéaires GL_n , mais ce n'est pas la seule ; à ce propos, il semble que, dans ses premiers travaux, Zil'ber n'a en vue que ces groupes algébriques affines, ce qui n'est pas bien gênant quand on parle de groupes simples[6].

Le théoricien des modèles rejoint le géomètre en considérant les objets définissables dans un corps (nu) algébriquement clos K , associés à une formule φ du langage des corps à paramètres dans K ; ils ont été qualifiés de *constructibles* par Chevalley ; si L est un corps algébriquement clos étendant K , c'en est une extension élémentaire, et la formule φ définit sur L un objet ayant les mêmes propriétés du premier ordre que son ancêtre dont les points sont dans K ; de plus, toute bijection de graphe constructible entre deux objets constructibles dans K s'étend à leurs descendants dans L , ce qui fait que les théoriciens des modèles ont eux-aussi une vision schématique de l'existence.

Si on fixe le schéma, c'est-à-dire la définition, l'extension du corps de base capture bien toutes les extensions élémentaires du groupe. Mais ça ne marche pas dans l'autre sens, d'abord parce que la restriction du corps de base n'est possible que si elle contient les paramètres intervenant dans la définition choisie pour le groupe, et ensuite parce que, si on veut décrire par une restriction du corps toutes les restrictions élémentaires du groupe, il faut considérer toutes ses définitions possibles.

Une autre différence est que les variétés des géomètres sont des objets constructibles très particuliers, pour que leurs points rationnels sur n'importe quel anneau se comportent décemment. Les théoriciens des modèles, eux,

---

[5] Il est piquant de rappeler qu'un algébriste comme Borovik est l'auteur d'une tentative de caractériser la finitude du rang de Morley d'un groupe sans sortir de ce dernier (BOROVIK 1984), qui a été finalisée dans POIZAT 1987.

[6] Car on sait que le quotient d'un groupe algébrique connexe par son centre est affine (POIZAT 1987, p. 147), soit encore linéaire.

manipulent aisément des objets plus généraux, mais doivent payer le prix de n'avoir pour domaine de base que des anneaux qui sont des corps algébriquement clos (ou bien des corps dont ils maîtrisent les propriétés du premier ordre, comme les corps réel-clos).

Ils ont tendance à identifier des objets définissablement isomorphes. Par exemple, le groupe SL_3 est formé des matrices carrées d'ordre 3 dont le déterminant vaut 1 : cette définition est limpide à tout point de vue ; le groupe PSL_3 est défini communément comme étant le quotient de SL_3 par son centre, formé des matrices diagonales associées aux racines cubiques de l'unité. Le théoricien des modèles admet sans états d'âme que $PSL_3(R)$ est le même[7] groupe que $SL_3(R)$, tandis que pour un géomètre il s'agit plutôt des points réels de deux schémas distincts, SL_3 et PGL_3.

Deux objets isomorphes ne sont pas identiques (bien qu'ils aient beaucoup de propriétés en commun !), et il faut se préoccuper de la nature de leur isomorphie avant de les identifier : cette philosophie est à la base du Théorème de Borel-Tits.

Bien que le rang de Morley soit une traduction au niveau constructible de la dimension géométrique, les hypothèses du Theorem 1.4 sont modèle-théoriques, car le groupe M de l'énoncé n'a a priori rien d'algébrique ; il satisfait cependant une condition de nature géométrique, celle de contenir le groupe G_∞ ; le théoricien des modèles rejoint le géomètre en déterminant G_∞ par le choix nécessaire d'une formule à paramètres algébriques interprétant G dans le corps de base. Quand il énonce cette condition, quel que soit le point-de-vue adopté, le Theorem 1.4 ne parle pas d'un groupe, mais d'une façon de définir un groupe.

On comprend que cette différence d'approche ne facilite pas la communication entre la Géométrie et la Logique, ce qu'on me permettra d'illustrer par une anecdote. En 1983, à Bombay, j'ai demandé à Jean-Louis Colliot-Thélène s'il était bien connu que le seul corps constructible était le corps de base ; comme je ne savais pas à l'époque que les groupes constructibles étaient constructiblement isomorphes aux groupes algébriques[8], je lui parlais d'un corps dont le groupe additif comme le groupe multiplicatif étaient des groupes algébriques. Il fallut de longues et pénibles explications pour que la lumière se fît : "Ah, tu veux dire un schéma en anneau dont les points rationnels sur un corps algébriquement clos forment un corps !" Gopal Prasad, également présent sur les lieux, fut beaucoup plus pragmatique : "Let us see! What can be the additive group of the field? It is certainly not an abelian variety ... "

Le fossé s'est élargi après l'intervention de Grothendieck[9].

---

[7] Il ne l'est pas tout-à-fait : c'est le quotient de $SL_3(R)$ par son sous-groupe réduit à l'unité.

[8] Résultat exposé dans POIZAT 1987, p. 141 ; lui sont associés les noms de Weil, van den Dries et Hrushovski. J'ai reçu à son propos une intéressante lettre d'Alexandre Grothendieck, dont je tiens la copie à la disposition de mes lecteurs.

[9] C'est ainsi que j'ai averti un étudiant courageux qui voulait lire le SGA et les EGA comme un préliminaire à toute entreprise de travaux sur les groupes de rang de Morley fini : "Vous

2. Une reformulation du Theorem 1.4

Pour mieux analyser le résultat de Borovik, nous le généralisons très légèrement, et nous en offrons une démonstration qui s'appuie directement sur le Théorème de Wagner, ce qu'évite Borovik qui préfère n'utiliser que la notion de "bon tore" qui en dérive (voir ABC 2008, p. 50).

Notre énoncé distingue la structure (G,M) formée du groupe algébrique G muni de sa loi de groupe, ainsi que d'un prédicat représentant son sous-groupe M, de la structure plus forte (K,G,M) formée du corps de base K et de la relation décrivant M comme sous-groupe de G (lequel est définissable dans K).

Théorème 2.1. *Considérons un groupe algébrique infini* $G(K) = G$ *sur un corps algébriquement clos* K *de caractéristique* p *, où* $G(\ )$ *est une formule du langage des corps à paramètres algébriques, définissant l'ensemble sous-jacent à* G *et sa multiplication, et un sous-groupe* M *de* $G(K)$ *contenant* $G(K_\infty)$ *, où* K_∞ *est le corps des nombres algébriques en caractéristique* p .
(i) *Si la structure* (K,G,M) *a un rang de Morley fini, alors* $M = G$.
(ii) *Si* G *est simple et la structure* (G,M) *a un rang de Morley fini, alors* $M = G$.

Démonstration. (i) Comme les paramètres de la formule $G(\ )$ sont algébriques, il existe une puissance non triviale σ de l'automorphisme de Frobenius du corps K , celui qui associe x^p à x , qui induit un automorphisme σ^* de G ; l'intersection Γ de toutes les images de M par les puissances de σ^* , positives où négatives, est celle d'un nombre fini d'entre elles, si bien qu'elle est définissable dans (K,G,M) . On observe que $G(K_\infty)$ est préservé par σ^* , et inclus dans Γ .

Maintenant on oublie M : la structure (K,G,Γ) n'est rien d'autre qu'un corps enrichi de rang de Morley fini, admettant σ comme automorphisme. D'après le théorème de Wagner rappelé ci-dessous, son modèle premier est porté par K_∞ ; donc $\Gamma = G$.
(ii) Si G est simple, d'après la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits décrite dans la section suivante, (K,G,M) est de rang de Morley fini si et seulement si (G,M) l'est (Corollaire 4.6). **Fin**

Théorème de Wagner sur les corps (WAGNER 2001)**.** *Soit* K *un corps infini de rang de Morley fini, de langage possiblement enrichi ; alors :*
(i) *le modèle premier de la théorie de* K *est la clôture algébrique modèle-théorique de l'ensemble vide ;*
(ii) K *élimine les imaginaires ;*

---

verrez que vous aurez du mal à comprendre ce qu'ils appellent une courbe." Olivier Chapuis, qui assistait à l'entretien, a ajouté : "Oh non, la vraie difficulté est de comprendre ce qu'ils appellent un point !"

(iii) *si de plus la structure enrichie* K *a un automorphisme définissable non trivial, alors son modèle premier est porté par la clôture algébrique algébrique de l'ensemble vide, c'est-à-dire* K_∞ .

Nous appelons *corps de Wagner* un corps de rang de Morley fini (vêtu) satisfaisant (iii) ; sa caractéristique est un nombre premier p , car le corps des invariants de l'automorphisme doit être fini. Observons que son langage ne peut nommer qu'un nombre fini de paramètres, tous algébriques ; on ne sait pas s'il existe des corps de Wagner autres que les corps nus avec un nombre fini de paramètres algébriques nommés.

La problématique sous-jacente au résultat de Borovik se résume à la question suivante : *si* G *est un groupe algébrique, sur un corps* K *algébriquement clos, et* M *est un sous-groupe de* G *, à quelles conditions les structures* (G, M) *ou* (K, G, M) *restent-elles de rang de Morley fini ?*

Par exemple, si la caractéristique de K est p , et si M est un sous-groupe propre divisible du groupe multiplicatif K^* contenant sa torsion, (K^*,M) est de rang de Morley deux, tandis que le rang de Morley de (K,K^*,M) est infini. C'est une conséquence du Théorème de Wagner : comme K^* n'a pas de p-éléments, si (K,K^*,M) est de rang de Morley fini M est uniquement p-divisible, et l'automorphisme de Frobenius est un automorphisme de (K,K^*,M) . D'ailleurs, d'après WAGNER 2003, il est très peu probable qu'on puisse trouver un sous-groupe propre infini M de K^* tel que le rang de Morley de (K,K^*,M) soit fini.

En caractéristique nulle, BHMPW 2009 ont construit un sous-groupe sans torsion M de K^* tel que (K,K^*,M) soit de rang de Morley deux, et CAYCEDO-HILS 2015 l'ont fait en incorporant à M de la torsion divisible arbitraire.

Du côté additif, en caractéristique nulle il est clairement impossible d'obtenir un sous-groupe M additif non trivial en gardant (K,K^+,M) de rang de Morley fini. Par contre, BMPZ 2007 ont construit un exemple de rang deux en caractéristique p .

ROCHE 2017 a ajouté des sous-groupes non-algébriques à des variétés abéliennes tout en préservant la finitude du rang.

Comme notre savoir-faire en la matière se limite aux groupe commutatifs, il est tentant de poser la question suivante, à laquelle MUSTAFIN-POIZAT 2007 apporte une réponse positive si $G = SL_2(K)$ ou $PSL_2(K)$.

Question B. *Soit* M *un sous-groupe du groupe algébrique* G *, sur un corps algébriquement clos* K *, tel que* (K,G,M) *soit de rang de Morley fini ; peut-on trouver des sous-groupes* A_1 *, ...* A_n *de groupes algébriques commutatifs tels que* (K,M) *et* $(K,A_1, \dots A_n)$ *soient bi-interprétables ?*

Théorème 2.2. *Le Théorème 2.1.(ii) est aussi valable en caractéristique nulle (si* K_∞ *représente la clôture algébrique du corps des rationnels).*

Démonstration. Comme je l'ai dit dans l'introduction, c'est une conséquence d'une démonstration alternative de Borovik pour son Theorem 1.4. **Fin**

3. Le Théorème de Borel-Tits et la théorie des modèles des groupes algébriques simples

Un groupe algébrique infini simple G, sur un corps algébriquement clos K, a des propriétés modèle-théoriques très particulières, qui tiennent aux quatre faits suivants :

(i) G a un sous-groupe de Borel non nilpotent, et en conséquence on peut définir à l'aide de sa seule loi de groupe un corps infini L ; c'est un fait très basique pour un algébriste (voir ABC 2008, p. 118), mais on peut aussi l'obtenir à partir de la pseudo-locale finitude de G (un contre-exemple minimal serait un mauvais groupe).

(ii) Comme nous l'avons dit, ce corps L est isomorphe au corps de base K, par un isomorphisme σ entre K et L qui est définissable dans K ; la construction de σ demande une familiarité minimale avec la Géométrie Algébrique, essentiellement pour montrer que le produit semi-direct de L^+ par L^* est un groupe algébrique affine.

(iii) D'après le premier résultat de Zil'ber sur la Théorie des Modèles du sujet (ZIL'BER 1977), le groupe nu G est ω_1-catégorique, et par conséquent son type générique n'est pas orthogonal à L ; selon un résultat général de Hrushovski sur les groupes simples de rang de Morley fini, G est L-interne, c'est-à-dire paramétrable par des points de L, grâce à l'aide d'un uplet fixé de points de G ; G est alors définissablement dans G (par une formule utilisant des paramètres) isomorphe à un groupe $G_1(L)$ définissable dans L ; en outre le groupe des automorphismes de G qui fixent point-par-point le corps L, qu'on appelle groupe de Galois ou groupe de liaison, est définissable (POIZAT 1987, Ch. 2.f).

(iv) Le groupe G a une copie isomorphe définissable dans K sans paramètres.

Théorème 3.1 (de Borel-Tits, version modèle-théorique). *Soient* G *un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos* K*,* L *un corps infini définissable dans* G*, et* σ *un isomorphisme du corps* K *vers le corps* L *définissable dans* K *; alors l'isomorphisme de groupe* σ^* *entre* $G = G(K)$ *et* $G(L)$ *induit par* σ *est définissable dans la structure de groupe nue de* G .

Démonstration. Comme G est L-interne, il est définissablement dans G isomorphe à un groupe $G_1(L)$ définissable dans L . Quand nous revenons dans K en prenant l'image de L par σ^{-1}, nous voyons que $G_1(K)$ est isomorphe à G définissablement dans K , dans lequel tout est définissable ; autrement dit, $G(K)$ est isomorphe à $G_1(K)$ définissablement au sens du corps nu K ; en appliquant σ , on voit que $G(L)$ est isomorphe à $G_1(L)$ par un isomorphisme définissable dans L ; comme L est définissable dans le groupe G , σ^* est composé d'un isomorphisme de G dans $G_1(L)$ et d'un isomorphisme de $G_1(L)$ dans $G(L)$ qui sont tout deux définissables dans le groupe nu G . **Fin**

Corollaire 3.2. *Si* G *est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos* K *, tout sous-ensemble constructible (c'est-à-dire définissable dans* K *) d'une puissance cartésienne de* G *est définissable (avec paramètres) dans le groupe nu* G .

Démonstration. Si X est constructible au sens de K , σ*(X) est constructible au sens de L , donc définissable dans G , ainsi que son image réciproque par σ* . **Fin**

Notes. (i) Etant donné le fossé qui sépare Logique et Géométrie[10], on ne trouve pas dans BOREL-TITS 1973 d'énoncé qui corresponde exactement au théorème ci-dessus ; des géomètres pourront même s'offusquer de voir associé un double nom aussi prestigieux à un résultat dont la démonstration demande si peu de connaissance de la structure du groupe. Ils considéreront au mieux le Corollaire 4.7 de la section suivante comme une version misérable du vrai Théorème de Borel-Tits, qui est plus riche (voir STEINBERG 1974), puisqu'il parle en réalité d'isogénies entre groupes quasi-simples et non pas seulement d'isomorphismes entre groupes simples (voir la section 4.H de BOROVIK 2024), dans un cadre qui n'est pas limité à celui d'un corps de base algébriquement clos, et suit à la trace les paramètres nécessaires à la définition des morphismes ; il s'appuie sur une description détaillée de la structure des automorphismes géométriques d'un groupe algébrique simple à laquelle nous ne pourrons pas échapper dans la Section 5. Cependant, il s'agit bien d'une version constructible du Théorème de Borel-Tits, qui est facile à démontrer car elle ne demande pas de distinguer les cas spéciaux des cas ordinaires ; son Corollaire 3.2 est une première étape en direction de notre Corollaire 5.4 qui, grâce à l'introduction du langage du premier ordre, donne un sens mathématique précis à une formulation heuristique vague du résultat (voir ZIL'BER 1984), à savoir que la structure géométrique du groupe est déterminée (de quelle manière ?) par sa seule loi de groupe ; nous verrons que cette formulation vague demande à être précisée en présence d'endogénies exceptionnelles.
(ii) J'ai cru opportun de reprendre dans POIZAT 1988 l'essai de ZIL'BER 1984, qui exprimait dans son introduction l'intuition correcte que la Théorie des Modèles avait quelque chose à dire sur le Théorème de Borel-Tits ; mais il la traduisait ensuite dans un Lemma 5 dont l'énoncé m'a semblé insuffisant et la démonstration peu convaincante.
(iii) Le corps K lui-même ne vit pas dans l'univers de G ; c'est un objet du second ordre par rapport à G , c'est-à-dire un corps K tel que G soit G(K) ; il ne faut pas le confondre avec ses sosies, ces copies L qui sont définissables dans G par une formule du premier ordre.
(iv) L'ingrédient essentiel de la démonstration du Théorème 3.1, celui qui met en jeu la simplicité du groupe, est la notion d'internité de Hrushovski, valable dans

[10] Voyez le sous-titre de POIZAT 1987.

des contextes bien plus généraux que la finitude du rang de Morley. Elle est l'aboutissement d'un long cheminement mathématique, car elle s'inscrit dans le prolongement de la Théorie de Galois des équations algébriques (POIZAT 1983), de celle des équations différentielles linéaires, associée aux noms de Liouville, Picard et Vessiot, généralisée ensuite par Kolchin à ce que nous qualifions aujourd'hui d'équations différentielles internes au corps des constantes (POIZAT 1985, Ch. 18), et aussi du groupe de liaison ("binding group") de ZIL'BER 1980 (voir POIZAT 1987, p. 54).

Exemple 3.3. L'exemple le plus immédiat d'internité est donné par l'action à gauche G_g d'un groupe G sur lui-même, qui est la structure associée à la fonction binaire $x^{-1}.y$; G et G_g sont interdéfinissables, chacun ayant une copie définie sans paramètres dans l'autre : celle de G dans G_g est obtenue sur le quotient de $G{\times}G$ par la relation quaternaire d'équipollence $x^{-1}.y = u^{-1}.v$. En fixant un de ses points, on voit que G_g est G-interne, avec comme groupe de liaison l'action de G par translation sur lui-même.

Cette structure G_g , de même que sa duale G_d , est plus forte que la version affine G_{aff} du groupe G , définie par l'équipollence, et dont le groupe de liaison est le groupe des translations bilatères, isomorphe au produit de G par son groupe inverse divisé par le sous-groupe central-diagonal.

Cet exemple très simple nous confronte à une distinction subtile entre le défini et le définissable, qui est au cœur-même de la notion d'internité. Quand nous travaillons dans la structure G_g , le groupe G est définissable sans paramètres, étant paramétré par les couples de points de G_g : il est donc G_g-interne, avec un groupe de liaison réduit à l'identité ; G_g est définissablement isomorphe à la structure définie sur G par la fonction $x^{-1}.y$, mais pour témoigner d'un tel isomorphisme il faut fixer un point de G_g .

Exemple 3.4. Autre exemple classique : un plan projectif arguésien P , dont la relation de colinéation permet de définir un corps L ; P est L-interne, avec PSL_2 comme groupe de liaison, car on obtient un isomorphisme entre P et $P(L)$, le plan projectif associé au corps L , en fixant trois points ; ce plan est une structure constructible autonome au sens de la Définition 4.1 à venir.

Exemple 3.5. Les multicorps définis dans la Section 4.B.

Pour élever le débat, et nous placer dans ce qui est à mon avis le véritable cadre convenant au Théorème de Borel-Tits, nous développerons dans la section suivante les conséquences du Théorème 3.1 sur les isomorphismes dans un contexte plus abstrait, où il n'est plus question de groupes ; dans la dernière section, nous reviendrons aux particularités des groupes algébriques simples. En attendant, nous examinons ce que ce résultat nous dit de leurs extensions et restrictions élémentaires.

Si $G = G(K)$ est un groupe simple infini, défini dans un corps algébriquement clos K par une formule $G( )$ sans paramètres, comment pouvons-nous décrire la théorie du groupe nu G ?

Nous savons qu'il est possible de définir dans G, avec l'aide d'un uplet de paramètres $\bar{a}$, un corps L et un isomorphisme entre G et $G(L)$. Cela s'exprime par une formule élémentaire $\gamma(\bar{u})$ à laquelle $\bar{a}$ satisfait.

Notons $\gamma_n(\bar{u})$ la formule déclarant en outre que le corps L n'a pas d'extension de degré $\leq n$, et qui précise si $p = 0$ ou $p \neq 0$ suivant que $p \leq n$ est ou non la caractéristique du corps de base K. Comme tout corps infini définissable dans G est isomorphe à K, notre groupe satisfait $(\exists\, \bar{u})\, \gamma(\bar{u})$ et $(\forall\, \bar{u})\ \gamma(\bar{u}) \rightarrow \gamma_n(\bar{u})$.

Dans un modèle de cette liste d'énoncés T, on trouve $\bar{a}$ satisfaisant à tous les $\gamma_n(\bar{a})$, si bien que ce modèle est isomorphe à $G(L)$ où L est un corps algébriquement clos ; comme T est ω_1-catégorique, ce qui était prévu par ZIL'BER 1977, c'est la théorie de G.

Si G_1 est une restriction élémentaire de G, il contient un $\bar{a}$ satisfaisant à $\gamma(\bar{u})$, et cette formule a même sens dans G et dans G_1 ; réciproquement, si cela a lieu, G_1 est restriction élémentaire de G, car le plongement de G_1 dans G correspond au plongement naturel de $G(k)$ dans $G(K)$, où k est un sous-corps algébriquement clos de K.

Comme la définition sans paramètres de G nous permet d'obtenir $G(K_\infty)$ qui se plonge élémentairement dans tout modèle de la théorie de G, c'est son modèle premier. On obtient donc la traduction suivante du Theorem 1.4 de Borovik, qui ne parle de rien d'autre que du groupe G, et qui sonne comme une musique divine aux oreilles des dévots de la Théorie des Modèles :

Théorème 3.6. *Si* G *est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos, et* M *est un sous-groupe de* G *contenant une restriction élémentaire de* G*, tel que la structure* (G,M) *soit de rang de Morley fini, alors* $M = G$.

Démonstration. M contient l'image d'un plongement élémentaire du modèle premier de la théorie de G ; comme cette dernière est ω_1-catégorique et pas ω-catégorique, deux tels plongements se correspondent par un automorphisme de G, ce qui nous ramène au cas où cette image est $G(K_\infty)$. **Fin**

Question C. *Y a-t-il un moyen de démontrer le Theorem 1.4 de Borovik sans faire de géométrie ? Est-ce que le Théorème 3.6 est vrai pour un groupe, nu ou habillé,* ω_1*-catégorique non monobasé ?*

Le géomètre doit pour une fois - et c'est justice - être mis en garde contre un danger de confusion. Le modèle premier de la théorie du corps K, qui est le corps des nombres algébriques, est un sous-corps de K bien déterminé, bien que la Théorie de Galois nous donne une pléthore d'endomorphismes de K_∞ dans K. Par contraste, le modèle premier de la théorie du groupe G se plonge de multiples façons dans G, suivant le choix du paramètre $\bar{a}$; il n'est pas formé des points de G algébriques (au sens modèle-théorique) sur $\emptyset$ car G, étant simple, n'a pas de sous-groupe caractéristique propre ; cependant ces divers plongements sont tous conjugués par les automorphismes de G. Par contre les extensions élémentaires de G ne causent pas de difficulté : elles correspondent aux extensions du corps K, puisque nous disposons dans G du paramètre $\bar{a}$.

Arrivé à ce point, je ne peux plus éviter la question de la modèle-complétude de la théorie de G, qui semble liée à la nature de la formule $\gamma(\bar{u})$.

Question D. *Si* $G = G(K)$ *est un groupe algébrique simple sur le corps algébriquement clos* K *, et si* k *est algébriquement clos, est-ce-que tout plongement de* $G(k)$ *dans* $G(K)$ *est élémentaire ? Plus précisément, deux tels plongements sont-ils conjugués par un automorphisme de* G *définissable ?*

D'après MUSTAFIN-POIZAT 2006 la réponse à la question est positive dans le cas de PSL_2, car tout sous-groupe superstable de $PSL_2(K)$ est conjugué par un automorphisme intérieur d'un $PSL_2(k)$, où k est un sous-corps algébriquement clos de K.

Note. Dans CHERLIN 1979, Gregory Cherlin exprime son admiration pour le naturel et la simplicité de la démonstration de Zil'ber, tout en déclarant qu'il était parvenu à une conclusion semblable qui s'appuyait lourdement sur la structure des groupes algébriques simples ; comme sa démonstration est restée inédite, il est difficile de dire si ce qu'il avait en tête pourrait apporter quelque lumière sur les questions posées ici.

4. Un contexte débarrassé de toute référence à un groupe

Nous poursuivons l'étude du Théorème de Borel-Tits dans le cadre des structures constructives autonomes ainsi définies :

Définition 4.1. *Nous dirons que* S *est une* structure constructible autonome*, relativement au corps algébriquement clos* K *, si sa base, infinie, est constructible, ainsi que toutes les fonctions et relations nommées dans son langage, supposé fini, et si en outre, pour chaque* n *, toute partie constructible de* S^n *est définissable, avec paramètres, dans le langage de la structure* S.

Exemple 4.2. L'anneau $A = K\times K$ n'est pas autonome. On peut y définir deux copies $L_1 = A.(1,0)$ et $L_2 = A.(0,1)$ du corps K, mais le langage de l'anneau ne permet pas d'exprimer l'isomorphie de L_1 et de L_2. Le générique de A n'est pas orthogonal à celui de L_1, et le quotient L_1-interne de A promis par Hrushovski est A/L_2 ; la projection, c'est-à-dire la multiplication par $(1,0)$, le rend définissablement isomorphe à L_1.

Pour une raison semblable, le groupe $GL_2(K)$ n'est pas autonome. En effet, il est le produit de son dérivé $SL_2(K)$ par son centre, isomorphe à K^*, qui est formé des matrices diagonales ; on définit une copie L du corps de base dans le dérivé, mais si on se restreint au langage du groupe il n'y a aucun moyen d'établir une corrélation entre L et le centre.

Ces deux structures sont bidimensionnelles, pas ω_1-catégoriques.

Le Corollaire 3.2 nous offre les groupes algébriques simples comme paradigme de structures constructibles autonomes. La Proposition 1.20, p. 122, de ABC 2008 montre, par un argument assez opaque faisant intervenir les groupes radiciels, que les groupes algébriques quasi-simples le sont aussi. En fait, ce type de démonstration est extrêmement flexible, car il y a beaucoup de façons d'affecter aux points du groupe des coordonnées dans son quotient ; voici la plus simple que j'ai trouvée :

Théorème 4.3. (i) *Dans un contexte de rang de Morley fini, un groupe* G *quasi-simple, dont le générique n'est pas orthogonal à un ensemble définissable* A *, est* A*-interne.*
(ii) *Un groupe algébrique quasi-simple, sur un corps algébriquement clos, est autonome.*

Démonstration. (i) On note $H = G/Z(G)$; on obtient une surjection de $H\times H$ sur l'ensemble des commutateurs de G en associant à (x,y) le commutateur commun de leurs images réciproques dans G ; comme il existe un entier m tel que tout point du dérivé G' de G soit le produit de m commutateurs, cela donne une surjection f de H^{2m} sur G qui est définissable dans G . En effet, comme H est son propre dérivé, G' et G ont même rang, et $G = G'$.

Comme H est simple, et que son générique est co-algébrique à celui de G , il est A-interne, ainsi que $G = f(H^{2m})$.
(ii) $H = G/Z(G)$ permet de définir une copie L du corps de base K , image d'un isomorphisme σ définissable dans K ; comme il est autonome, l'application σ^* de $H(K)$ dans $H(L)$ est définissable dans sa structure de groupe nue ; comme $\sigma^*(f)$ est définissable dans L , l'application σ^* de $G(K)$ dans $G(L)$ est définissable dans le groupe nu G . **Fin**

Remarque 4.4. Cette démonstration ne montre pas que, si $G/Z(G)$ est un groupe algébrique, G en est un aussi ; en effet, le groupe $G/Z(G)$ définit un corps nu algébriquement clos L , et une copie de G est définissable dans L , mais il n'est pas sûr que L reste nu quand il est vu depuis G .

Nous montrons maintenant, pour les structures constructives autonomes, une sorte de réciproque au Corollaire 3.2, à savoir qu'elles sont K-internes, ce qui ne pose pas de difficultés car la définition de l'autonomie incorpore en quelque sorte l'internité. Après en avoir tiré quelques corollaires, nous préciserons ensuite la manière de définir en elles des copies du corps de base, ce qui facilitera l'étude de leurs automorphismes.

Notation. Soient σ un isomorphisme entre les corps K et L , et φ une formule du langage des corps, à paramètres dans K , définissant une structure S ; nous notons $\sigma^*\varphi$ la formule, à paramètres dans L , obtenue en remplaçant les paramètres de φ par leurs images par σ , et σ^*S la structure définie dans

L par $\sigma^*\varphi$. Il faut remarquer que cet isomorphisme σ^* , que nous qualifions de *transport de structure,* n'a de sens que si on fixe la formule définissant S .

Théorème 4.5. *Soit S une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos K ; alors on peut définir dans S (ou plutôt S^{eq}) une copie L du corps K , isomorphe à K par un isomorphisme σ définissable dans K . Pour chacun de ces corps L , l'isomorphisme σ^* induit par σ entre S et σ^*S est définissable dans S . En outre, la théorie de S est ω_1-catégorique.*

Démonstration. Par élimination des imaginaires, S est isomorphe à une partie constructible d'une puissance cartésienne de K ; comme elle est infinie, une de ses projections P est infinie, ce qui donne une copie de K privée éventuellement d'un nombre fini de points ; comme tout point de K est somme de deux points d'une quelconque de ses parties cofinies, on obtient une copie définissable de K sur un quotient de $P\times P$.

Comme σ^*S est définissable dans S et σ^* est définissable dans K , ce dernier est définissable dans S puisque que c'est une structure autonome.

On décrit la théorie de S à peu près comme nous l'avons fait dans le cas d'un groupe algébrique simple, sauf que maintenant il faut tenir compte des paramètres $\bar{b}$ dans L qui interviennent dans la formule définissant $\sigma^*(S)$, en plus des paramètres $\bar{a}$ dans S qui interviennent dans la définition de σ^* (par exemple, le corps K avec un point transcendant nommé dans son langage est une structure constructible autonome). On minimise le degré de transcendance de $\bar{b}$, si bien qu'aucun $\bar{\beta}$ de degré inférieur ne pourra définir un objet constructiblement isomorphe à S . Ces paramètres seront représentés par des uplets $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans la formule $\gamma(\bar{x}, \bar{y})$, qui précise que $\bar{y}$ satisfait un système générateur des équations à coefficients entiers satisfaites par $\bar{b}$, et à la théorie on ajoute que si $\gamma(\bar{x}, \bar{y})$ est satisfait alors $\bar{y}$ n'annule pas d'équations non satisfaites par $\bar{b}$. **Fin**

Corollaire 4.6. *Si on ajoute de la structure Σ à une structure constructible autonome S , sur un corps algébriquement clos K , de sorte que (S, Σ) reste de rang de Morley fini, alors (K, S, Σ) est de rang de Morley fini.*

Démonstration. La structure $(L, \sigma^*(S), \sigma^*(\Sigma))$, étant définissable dans (S, Σ) , est de rang de Morley fini, ainsi que son image réciproque par σ^* . **Fin**

Corollaire 4.7 (Théorème de Borel-Tits constructible sur les isomorphismes). (i) *Soit S une structure constructible sur le corps algébriquement clos K d'une part, et sur le corps algébriquement clos K' d'autre part. On suppose que S est autonome relativement à K ; alors les corps K et K' sont isomorphes, et S est autonome relativement à K' .*

(ii) *Soient* S *une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos* K *, et un isomorphisme* τ *entre* S *et une structure* S' *constructible sur le corps algébriquement clos* K' *; alors* S' *est autonome, et les corps* K *et* K' *sont isomorphes, par un isomorphisme tel que* τ *se décompose en l'isomorphisme induit associé suivi d'un isomorphisme définissable dans* S' *.*

Démonstration. (i) S est à la fois défini par une formule $S(K)$ et une formule $S'(K')$. Comme elle est autonome du côté de K , on peut y définir une copie L de ce corps ; L , étant définissable dans K' , lui est définissablement isomorphe ; par ailleurs, S est définissablement, dans S et a fortiori dans K' , isomorphe à $S'(L)$; on en déduit que $S(L)$ et $S'(L)$, et aussi $S(K')$ et $S'(K')$, sont définissablement isomorphes au sens de K' . Or $S(K')$ est autonome.
(ii) L'isomorphisme τ fait apparaître S' comme $S(K_1)$ où $K_1 = \sigma(K)$ est un corps isomorphe à K ; autrement dit $\tau = \sigma^*$, et le corps K_1 a une copie L définissable dans S' : le corps L est isomorphe à K_1 par θ définissable dans K_1 . Le point (i) montre que $S' = S'(K')$ est autonome, et que l'isomorphisme θ^* entre S' et $S(L)$ est définissable dans S' ; τ est donc la composition de l'isomorphisme de $S(K)$ vers $S(L)$ induit par $\theta.\sigma$, suivi de θ^{*-1} . **Fin**

Corollaire 4.8 (Théorème de Borel-Tits constructible sur les automorphismes). *Soient* S *une structure constructible autonome, sur le corps algébriquement clos* K *, un corps infini* L *définissable dans* S *, et un automorphisme* τ *de* S *; alors* τ *se décompose en des homomorphismes constructibles et l'isomorphisme induit* σ^* *de* $S(L)$ *sur* $S(\sigma.L)$ *, où* σ *est l'isomorphisme de corps induit par* τ *sur* L *;* τ *est constructible (c'est-à-dire définissable dans* S *, ou de façon équivalente dans* K *) si et seulement si* σ *l'est.*

Démonstration. Soit α un isomorphisme de $S = S(K)$ dans $S(L)$ induit par un isomorphisme de K dans L définissable dans K ; τ le conjugue sur un isomorphisme α' entre S et $S(\sigma.L)$; τ se décompose donc en α , σ^* , et l'inverse de α' , les deux extrêmes étant définissables dans S . Si τ est définissable σ l'est aussi, et si σ est définissable σ^* l'est également. **Fin**

4.A. Caractéristique zéro

Théorème 4.9. *Soit* S *une structure constructible autonome, sur un corps algébriquement clos* K *de caractéristique nulle ; alors :*
(i) *on peut définir sans paramètres dans* S *(ou plus exactement dans* S^{eq} *) une copie* L *du corps* K *;*
(ii) *si* τ *est un automorphisme de* S *tel que la structure* (S,τ) *soit superstable,* τ *est constructible (c'est-à-dire définissable dans* S *, ou de façon équivalente dans* K *!) ;*

(iii) *si* τ *est un automorphisme d'ordre fini de* S *, son carré* τ^2 *est constructible ;*
(iv) *le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{def}}(S)$ *des automorphismes constructibles de* S *est lui-même constructible, et c'est le plus grand groupe* A *d'automorphismes de* S *tel que* (S,A) *soit superstable.*

Démonstration. (i) Nous avons vu qu'on peut définir dans S un corps L_1 définissablement isomorphe à K , avec l'aide d'un uplet de paramètres a_1 , qu'on peut d'ailleurs supposer canonique pour la chose. Soit A l'ensemble des a qui permettent de définir un corps infini L_a de la même façon que a_1 permet de définir L_1 ; comme S élimine le quanteur "il existe une infinité de ... ", A est définissable dans S , et sans paramètres (il suffit d'ailleurs de déclarer que le corps est quadratiquement clos, c'est-à-dire satisfait à $(\forall x)(\exists y)\ y^2 - y = x$, pour garantir son infinitude).

Comme S est autonome, pour tout a dans A il existe un isomorphisme σ_b entre L_1 et L_a définissable dans S à l'aide d'un uplet de paramètres b . Montrons, par induction sur le rang et le degré de Morley de A , que la définition de σ_b peut être obtenue uniformément lorsque a parcourt A ; pour cela, on considère (après avoir éventuellement remplacé S par une extension élémentaire saturée) a de rang maximum dans A ; la définition de son σ_b convient pour tout a' d'une partie A' de A de même rang de Morley que A , si bien que l'induction s'applique à A-A' ; il ne reste plus qu'à faire un patchwork pour assembler les morceaux, ce qui peut conduire à allonger b pour pouvoir distinguer des cas. Nous obtenons finalement un ensemble définissable B , et, pour b parcourant B , une famille uniformément définissable d'isomorphismes σ_b entre L_1 et un L_a , de sorte que chaque L_a soit l'image d'au moins un σ_b . Naturellement, beaucoup de paramètres interviennent dans la définition de B , par exemple a_1 , ainsi que les paramètres de la décomposition de A .

Posant alors $\tau_c = \sigma_b.\sigma_{b'}^{-1}$, nous obtenons un ensemble C paramétrant une famille uniforme, close pour la prise d'inverse, d'isomorphismes entre un L_a et un $L_{a'}$, de sorte que pour chaque couple (a,a') dans A×A il y ait au moins un c dans C associé à un isomorphisme entre L_a et $L_{a'}$. En remplaçant C par la réunion des ensembles semblablement définis et ayant la même propriété, c'est-à-dire en incorporant au paramètre c ceux qui interviennent dans la définition de l'ensemble C , nous obtenons un ensemble D , qui a encore cette propriété, mais qui, lui, est définissable sans paramètres.

Comme nous sommes en caractéristique nulle, le corps L_a n'a pas d'automorphisme constructible autre que l'identité, et il n'y a qu'un seul isomorphisme définissable entre L_a et $L_{a'}$. Nous considérons alors la réunion disjointe des L_a , qui est l'ensemble U des couples (a,x) , $a \in A$, $x \in L_a$; sur cet ensemble, la relation E suivante est définissable sans paramètres :

$(a,x)\ E\ (a',y)$ s'il existe d dans D tel que τ_d soit un isomorphisme entre L_a et $L_{a'}$ et que $\tau_d(x) = y$; elle n'est rien d'autre que la relation d'équivalence qui déclare que x et y se correspondent par l'unique isomorphisme définissable entre L_a et $L_{a'}$, et le corps L cherché est le quotient U/E .
(ii) Comme le corps L est définissable sans paramètres dans S , τ induit un automorphisme σ superstable de L , qui ne peut être que l'identité d'après un résultat de Hrushovski, s'appuyant sur BERLINE-LASCAR 1986 (voir POIZAT 1987, p. 191 ; j'ai écrit "superstable" pour rendre hommage à Hrushovski, mais c'est à peu près évident si on suppose le rang de Morley fini) ; τ est donc constructible d'après le Corollaire 4.8.
(iii) τ induit un automorphisme σ d'ordre fini du corps algébriquement clos L ; d'après le Théorème d'Artin-Schreier (ARTIN-SCHREIER 1927), s'il ne vaut pas l'identité, c'est la conjugaison relativement à un sous-corps réel-clos de L de codimension deux, dont le carré vaut l'identité.
(iv)[11] Comme S est L-interne, ses automorphismes qui fixent point par point le corps L constituent le groupe de liaison, qui est définissable dans S . **Fin**

4.B. Multicorps

Le traitement de la caractéristique p est plus délicat, et nécessite la définition suivante.

Définition 4.10. *Nous appelons* multicorps *une structure constructible dont la base* $M = (L_1, \dots L_n)$ *est la réunion disjointe d'un nombre fini de copies du corps de base (algébriquement clos)* K *, et le langage est constitué des quatre relations suivantes :*
(i) *l'équivalence exprimant que* x *et* y *appartiennent au même* L_i *;*
(ii) *le graphe de l'addition des corps, composé des triplets* (x,y,z) *appartenant au même* L_i *et tels que* z *soit la somme de* x *et de* y *au sens de ce corps ;*
(iii) *le graphe du produit des corps défini semblablement ;*
(iv) *et enfin une relation binaire* $\theta(x,y)$ *dont la restriction à* $L_i \times L_j$ *est le graphe d'un isomorphisme* θ_{ij} *entre les corps* L_i *et* L_j *; on supposera que chaque* θ_{ii} *vaut l'identité.*

Exemple 4.11. Nous décrivons ici tous les bicorps $B = (L_1,L_2)$, en remplaçant la quatrième relation par une fonction θ de B dans B dont la restriction au premier corps est un isomorphisme θ_1 de L_1 vers L_2 , et sa restriction θ_2 au second est un isomorphisme de L_2 vers L_1 . On remarque que θ est un automorphisme de la structure, qui échange les deux corps, et que B est une structure autonome équivalente au corps K dès qu'on se permet de fixer un

[11] Je dois cet argument à Hrushovski, que je remercie très humblement ; en effet, dans la version première de cet article, indigne disciple de Liouville, Picard, Vessiot et Krasner, je n'avais pas reconnu le groupe de Galois !

paramètre ; nous allons déterminer les circonstances qui font que le bicorps permet de définir *sans paramètres* une copie de K .

En caractéristique nulle, $\theta_2.\theta_1(x)$ est par hypothèse un automorphisme constructible du corps L_1 , qui vaut donc l'identité, et il en est de même de $\theta_1.\theta_2(y)$; autrement dit θ_2 et θ_1 sont inverses l'un de l'autre, θ est involutive, et on obtient un troisième corps L_3 définissable sans paramètres dans B en passant au quotient par la relation d'équivalence $y = x \vee y = \theta(x)$. Ce cas n'a aucun intérêt, car le bicorps n'est alors rien d'autre qu'une simple duplication du corps de base K .

En caractéristique p , $\theta_2.\theta_1(x)$ est une puissance, positive ou négative, de l'automorphisme de Frobenius : $\theta_2.\theta_1(x) = x\text{^}p^n$. Symétriquement, $\theta_1.\theta_2(y) = y\text{^}p^n$; en effet, y est de la forme $y = \theta_1(x)$, et $\theta_1.\theta_2.\theta_1(x) = \theta_1(x\text{^}p^n) = y\text{^}p^n$.

Si $n = 2m$ est pair, l'automorphisme involutif $(\theta_1(x\text{^}p^{-m}),\theta_2(y\text{^}p^{-m}))$ est définissable sans paramètres, et c'est d'ailleurs l'unique automorphisme d'ordre fini de B . Dans ce cas, un passage au quotient permet de définir sans paramètres une troisième copie L_3 du corps de base K .

Si $n = 2m+1$ est impair, le remplacement de θ par $(\theta_1(x\text{^}p^{-m}),\theta_2(y\text{^}p^{-m}))$ nous ramène au cas où $n = 1$. Montrons qu'alors B n'a pas d'automorphisme involutif σ ; si σ est d'ordre fini et conserve les deux corps, il vaut l'identité d'après le Théorème d'Artin-Schreier ; s'il les échange, c'est une involution, de la forme $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$, où σ_1 et σ_2 sont inverses l'un de l'autre ; comme σ un automorphisme de la fonction θ , il doit commuter avec elle, ce qui signifie que $\varphi = \theta_2.\sigma_1 = \sigma_2.\theta_1$, si bien que le carré de φ est l'automorphisme de Frobenius $\theta_2.\theta_1$ du corps algébriquement clos L_1 . Cela est interdit par la théorie de Galois des corps finis, car le groupe des automorphismes du corps à p^d éléments est cyclique et engendré par le frobenius ; or si d est pair le générateur du groupe cyclique d'ordre d n'est pas un carré.

On voit donc qu'il n'y a que deux types de bicorps, le direct et le tordu, correspondant à $n = 0$ et $n = 1$. Comme un automorphisme constructible du bicorps qui fixe ses deux corps vaut une même puissance du frobenius sur chacun d'eux, les automorphismes constructibles du bicorps forment dans le premier cas le produit du groupe cyclique engendré le frobenius et de celui engendré par l'involution θ , et dans le second cas le groupe cyclique engendré par la racine carrée θ du frobenius.

Montrons qu'un bicorps tordu est incapable de définir sans paramètres une copie L_3 du corps K . Comme il est autonome, il permet de définir un isomorphisme f_1 de L_1 sur L_3 , et un isomorphisme f_2 de L_2 sur L_3 . Nous nous plaçons dans le modèle premier de la théorie du bicorps, et nous considérons son isomorphisme Φ dont la restriction est le frobenius sur chacun des deux corps L_1 et L_2 ; pour n assez grand, Φ^n fixe les paramètres nécessaires à la définition de f_1 et de f_2 , si bien qu'il induit l'automorphisme x^p^n sur L_3 ; Φ induit l'unique racine n° de ce dernier, c'est-à-dire le frobenius, et θ induit la racine carrée du frobenius, qui n'existe pas.

Lemme 4.12. *Les automorphismes d'ordre fini d'un multicorps de caractéristique* p *sont tous constructibles, et forment un groupe fini.*

Démonstration. Soit σ un automorphisme d'ordre fini de notre multicorps. Considérons un cycle de longueur q de l'action de σ sur ses corps, que nous notons $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_q)$: modulo q , $\sigma(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$. Le Théorème d'Artin-Schreier implique que σ^q agit comme l'identité sur chacun des corps Λ_i .

Si nous renommons θ_i l'isomorphisme défini par θ entre les corps Λ_i et Λ_{i+1} , l'automorphie de σ se traduit par $\sigma.\theta_i = \theta_{i+1}.\sigma$. La restriction σ_i de σ à Λ_i s'écrit $\theta_i.\beta_i$ où β_i est un automorphisme du corps Λ_i , et la commutation de σ et de θ s'exprime par : $\theta_{i+1}.\theta_i.\beta_i = \theta_{i+1}.\beta_{i+1}.\theta_i$, soit encore $\beta_{i+1}.\theta_i = \theta_i.\beta_i$.

Par ailleurs $\theta_q. \ldots . \theta_2.\theta_1$ est un automorphisme α constructible du corps Λ_1 , c'est-à-dire une puissance du frobenius. Par conséquent, la restriction de σ^q à Λ_1 vaut Id = $\theta_q.\beta_q. \ldots . \theta_2.\beta_2.\theta_1.\beta_1 = \theta_q. \ldots .\theta_2.\theta_1.\beta_1{}^q = \alpha.\beta_1{}^q$. Il en suit que β_1 est lui aussi une puissance du frobenius, si bien que l'action de σ sur Λ_1 est définissable.

Comme l'action de σ sur l'un quelconque de ces corps est le début d'un cycle, il est définissable.

Soit C le groupe des automorphismes constructibles du multicorps. Le groupe de ceux d'entre eux qui fixent chacun des corps est d'indice fini et central dans C , car c'est le groupe cyclique infini engendré par le frobenius. Comme C est central par fini, il n'a qu'un nombre fini de commutateurs, et son dérivé est fini d'après ROSENLICHT 1961 (voir ABC 2008 p. 15) ; un quotient nous ramène au cas où il est abélien. **Fin**

Exemple 4.13. Comme un automorphisme d'ordre fini du multicorps qui fixe ses corps vaut l'identité, un automorphisme d'ordre fini est déterminé par la permutation qu'il induit sur ces corps ; d'ailleurs on voit que le β_1 de la démonstration ci-dessus est uniquement déterminé. En caractéristique nulle, tous les automorphismes sont d'ordre fini ; ils correspondent à toutes les permutations des corps, et définissent par quotient un corps invariant.

A titre d'illustration, voyons ce qui peut se passer dans un tricorps en caractéristique p . S'il y a un automorphisme d'ordre 3 , on obtient par quotient un corps définissable sans paramètres, car les deux permutations circulaires sont caractéristiques dans le groupe des permutations de 3 points ; sinon, et s'il existe une involution, on obtient deux corps invariants, celui qui est fixé et le quotient du bicorps des deux corps permutés. On peut donc définir sans paramètres un unicorps, c'est-à-dire un corps invariant, sauf si le tricorps est rigide, c'est-à-dire n'a pas d'automorphismes d'ordre fini autre que l'identité.

Considérons un ensemble I de n points de K, que nous ordonnons ; pour définir un multicorps rigide sur $I \times K$, on pose $\theta_{ij}((i,x)) = (j,x)$ si $i \leq j$, et $\theta_{ij}((i,x)) = (j,x^p)$ sinon.

4.C. Caractéristique p

Théorème 4.14. *Soit* S *une structure constructible autonome, sur un corps algébriquement clos* K *de caractéristique* p *; alors*
(i) *on peut définir sans paramètres dans* S *un multicorps ;*
(ii) *si* τ *appartient à un groupe superstable d'automorphismes de* S*, il est constructible ;*
(iii) *si* τ *est un automorphisme d'ordre fini de* S*, il est constructible ;*
(iv) *il y a un et un seul groupe constructible maximal d'automorphismes de* S*, que nous notons* $\mathrm{Aut}_{max}(S)$ *; c'est aussi le plus grand groupe superstable d'automorphismes de* S.

Démonstration. (i) De même qu'en caractéristique nulle, nous définissons sans paramètres une famille uniforme L_a de copies de K, ainsi qu'une famille uniforme, indexée par D, d'automorphismes les reliant.

En caractéristique p les automorphismes définissables du corps K sont les puissances du frobenius, et si σ et τ sont deux isomorphismes entre L_a et $L_{a'}$, on doit avoir $\sigma.x = (\tau.x)^q = \tau.(x^q)$, où $q = p^n$ pour un certain entier relatif n. Pour chaque a, nous considérons l'ensemble définissable des automorphismes de L_a qui s'obtiennent par composition d'un isomorphisme de L_a vers un $L_{a'}$ et d'un isomorphisme de ce $L_{a'}$ vers L_a, tous deux paramétrés dans D. Ils forment une famille discrète, chacun d'eux étant de la forme $y = x^\wedge p^n$, où n est un entier relatif ; par compacité, ils sont en nombre fini, et si on fixe a la relation exprimant que x et y dans L_a se correspondent par un de ces automorphismes s'écrit $(y-x^\wedge q_1).(y-x^\wedge q_2). \ldots . (x-y^\wedge r_1).(x-y^\wedge r_2). \ldots = 0$, où les q_i et les r_j sont des puissances positives de la caractéristique. Par élimination des quanteurs dans K, le degré de ce polynôme est borné (je ne vois pas pour cela de démonstration basée sur l'absence de propriété de recouvrement fini), et il existe un entier N, indépendant de a, tel que $-N \leq n \leq N$ pour tous les exposants n décrivant cette famille d'automorphismes de L_a.

On voit que, quels que soient a et a' dans A, il y a au plus $2N+1$ isomorphismes distincts entre L_a et $L_{a'}$ qui sont paramétrés par D. Nous pouvons les individualiser en les ordonnant, en décrétant que $\sigma \leq \tau$ si $\tau.x = (\sigma.x)^\wedge p^n$ pour un $n \geq 0$; l'existence de N permet de distinguer le plus petit, et obtenir une famille uniforme $\sigma_{aa'}$, indexée par $A \times A$, d'automorphismes de L_a dans $L_{a'}$.

Fixons maintenant un type π dans A de rang de Morley maximum. Nous définissons sur l'ensemble U la relation E_π suivante : $(a,x)\, E_\pi\, (a',y)$ si pour tout g dans π, indépendant de $\{a, x, a', y\}$, $\sigma_{ag}(x) = \sigma_{a'g}(y)$. E_π est une relation d'équivalence : pour vérifier qu'elle est transitive, on prend g dans π indépendant de tout le monde. Et elle est définissable car le type π l'est, mais sa définition demande l'emploi du paramètre (imaginaire) canonique de π, lequel est algébrique sur $\emptyset$. Posons $L_\pi = U/E_\pi$; les conjugués de L_π forment un ensemble fini, définissable sur $\emptyset$, de copies de K.

(ii) Ce point nous renvoie à une question ouverte depuis longtemps, antérieure à la Conjecture d'Algébricité, puisqu'elle est posée dans MACINTYRE 1971, et met en scène un corps de Wagner avant l'heure : *un corps de rang de Morley fini peut-il avoir un automorphisme définissable non constructible, c'est-à-dire autre qu'une puissance du frobenius ?* En caractéristique p, le résultat de Hrushovski cité plus haut affirme seulement qu'un groupe A d'automorphismes de K tel que (K,A) soit superstable est réduit à l'identité.

Notons σ l'action de τ sur un multicorps $M = (L_1, ...L_n)$ définissable sans paramètres dans S ; comme c'est un automorphisme pour la relation θ, $\sigma.\theta_{ij} = \theta_{i'j'}.\sigma$ quand $\sigma(L_i) = L_{i'}$ et $\sigma(L_j) = L_{j'}$. Si σ fixe l'un de ces corps, l'hypothèse implique qu'il le fixe point par point, et τ est constructible d'après le Corollaire 4.8 ; s'il échange deux d'entre eux, l'étude des bicorps que nous avons faite montre qu'il les fixe tous les deux, ou bien fixe un troisième corps, et on conclut de même.

Dans le cas général, l'hypothèse implique que $\sigma^{n!}$ fixe chacun des corps point par point ; σ est donc d'ordre fini, et définissable d'après 4.12. Considérons un cycle $(\Lambda_1, \dots \Lambda_q)$ de son action, ainsi que son quotient Λ par le groupe cyclique d'ordre q : il s'agit de quotienter par la relation disjonction des $x\in\Lambda_i \wedge y\in\Lambda_{i+j} \wedge y = \sigma^j(x)$, qui est bien une équivalence car on retombe sur l'identité après avoir fait un tour complet. Ce quotient est un corps fixé par τ, et ce dernier est constructible d'après le Corollaire 4.8.

(iii) On peut reprendre la démonstration de (ii), car le Théorème d'Artin-Schreier implique que τ fixe chaque point du corps Λ.

(iv) Soient $M = (L_1, \dots L_n)$ un multicorps définissable sans paramètres dans S, et A le groupe des automorphismes de S qui fixent point par point chacun des corps $L_1, \dots L_n$; A est constructible car c'est un groupe de liaison.

Si τ appartient à un groupe constructible H d'automorphismes de S, il est d'ordre fini modulo A. Réciproquement, d'après 4.12, les automorphismes qui induisent un automorphisme d'ordre fini du multicorps forment un groupe, que nous notons $Aut_{max}(S)$; en reprenant la démonstration de (ii), on voit que chacun de ses points fixe un corps associé à l'un de ses cycles, et qu'il est donc constructible ; chaque cossette de A dans $Aut_{max}(S)$ est donc constructible, et comme il n'y en a qu'un nombre fini $Aut_{max}(S)$ est lui-même constructible.

Si τ appartient à un groupe superstable d'automorphismes de S, comme $\tau^{n!}$ est dans A, τ induit un automorphisme d'ordre fini du multicorps, c'est-à-dire qu'il est dans $Aut_{max}(S)$. **Fin**

4.D. Le quotient $\mathbf{Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)}$

En caractéristique nulle, si S est une structure constructible autonome, nous avons vu en 4.9(iv) que $Aut_{def}(S) = Aut_{max}(S)$; si $Aut_{abs}(S)$ désigne le groupe de tous les automorphismes de S (que les géomètres qualifient d'abstraits), le quotient $Aut_{abs}(S)/Aut_{max}(S)$ est isomorphe au groupe des automorphismes d'un quelconque corps infini L , définissable dans S sans paramètres, qui sont induits par les automorphismes de S . Quand cette dernière est définissable sans paramètres par une formule S() , le corps L se définit sans paramètres à partir de K , si bien que tout automorphisme convient, et que $Aut_{abs}(S)$ est le produit semi-direct de $Aut_{max}(S)$ par le groupe des automorphismes de K agissant "naturellement" sur S(K) via la formule S() ; il importe de remarquer que ce facteur semi-direct dépend du choix de la formule sans paramètres définissant S .

Nous supposons dorénavant que la caractéristique est p . Nous n'allons pas utiliser le groupe $Aut_{abs}(S)$, mais plutôt son sous-groupe $Aut_{def}(S)$ formé des automorphismes définissables dans S , lesquels sont les mêmes que ceux qui sont constructibles au sens du corps de base K ; son plus grand sous-groupe définissable $Aut_{max}(S)$ joue bien sûr un rôle proéminent.

Comme les paramètres sont tolérés dans les définitions, le corps K dans le langage augmenté d'une constante nommant un point a est une structure constructible autonome ; si a est transcendant, S = (K,a) n'a pas d'autres automorphismes définissables que l'identité ; si a est algébrique, $Aut_{def}(K,a)$ est formé des puissances de l'automorphisme de Frobenius qui fixent le point a . Le groupe $Aut_{max}(S)$ est dans les deux cas réduit à l'identité.

Avons-nous là un exemple d'une situation générale ? Comme nous avons supposé le langage de S fini, grâce à l'élimination des imaginaires, nous disposons d'un uplet de paramètres canoniques tant pour la définition de la base de S que pour celles des relations de son langage ; mais ce uplet n'est pas nécessairement canonique pour le type d'isomorphie de S , car il peut y avoir des structures constructiblement isomorphes à S qui sont définies d'une tout autre manière.

Si les paramètres de la définition de S peuvent être choisis algébriques, le modèle premier S_0 de la théorie de S correspond au corps K_0 des nombres algébriques ; nous en tirons deux conséquences :

Lemme 4.15. *On considère, en caractéristique* p *, une structure constructible autonome* S_0 *définie dans le corps* K_0 *des nombres algébriques.*
(i) *Le groupe* $Aut_{max}(S_0)$ *est formé des automorphismes de* S_0 *d'ordre fini.*
(ii) *Pour toute copie* L *de* K_0 *définissable (avec paramètres) dans* S_0 *, il existe un automorphisme de* S_0 *qui fixe globalement* L *et induit sur* L *une puissance non triviale du frobenius.*

Démonstration. (i) Comme $Aut_{max}(S_0)$ est définissable dans K_0 , il est localement fini, et, d'après le Théorème 4.14.(iii), contient tous les automorphismes de S_0 d'ordre fini.
(ii) On considère une puissance non triviale du frobenius de K_0 qui fixe les paramètres nécessaires à la définition de S_0 , à celle de L , et à celle d'un isomorphisme entre K_0 et L ; elle définit un automorphisme de S_0 qui induit sur L la même puissance du frobenius. **Fin**

Nous allons décrire le quotient $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$, qui ne dépend que de la structure S , et pas de la manière dont elle est définie. Pour la clarté de l'exposé, nous commençons par le cas particulier où un unicorps, c'est-à-dire une copie du corps de base K , est définissable sans paramètres dans S .

Théorème 4.16. *En caractéristique* p *, on considère une structure constructible autonome* S *définissant sans paramètres une copie du corps de base. Alors :*
(i) *le quotient* $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ *est trivial ou cyclique infini ;*
(ii) *si* S *est définissable avec paramètres algébriques, tout automorphisme définissable de* S *induit la même puissance du frobenius sur chaque copie du corps de base définissable sans paramètres dans* S *, et le groupe* $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ *est cyclique infini ;*
(iii) *si de plus* S *est définissable sans paramètres, l'automorphisme de* S *associé au frobenius du corps de base induit le frobenius sur chaque corps définissable sans paramètres dans* S ; *tout isomorphisme entre* S *et une structure constructible autonome* S' *définie sur un corps algébriquement clos* K' *se décompose en un isomorphisme induit par un isomorphisme entre les deux corps* K *et* K'*, suivi d'un automorphisme de* $Aut_{max}(S')$.

Démonstration. (i) Soit L une copie du corps de base K définissable sans paramètres dans S ; deux automorphismes définissables sont congrus modulo $Aut_{max}(S)$ si et seulement s'il définissent le même automorphisme de L ; le quotient $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des automorphismes définissables de L , qui est le groupe cyclique infini engendré par le frobenius.
(ii) L'énoncé "quel que soit l'automorphisme σ , s'il induit $x\hat{}p^n$ sur L_1 il fait de même sur L_2 " devient élémentaire lorsqu'on précise les formules définissant les objets dont on parle ; il suffit donc de montrer la chose dans le modèle premier S_0 .

Supposons que σ induise $x\hat{}p^n$ sur L_1 et $x\hat{}p^{n'}$ sur L_2 ; d'après 4.15, il existe un multiple commun m de n et de n' et un automorphisme τ , associé à la puissance p^m-ème du corps de base, induisant $x\hat{}p^m$ sur les deux corps ; si $u = m/n$, $\tau.\sigma^{-n}$ agit identiquement sur le corps L_1 , si bien qu'il est dans $Aut_{max}(S)$; il doit donc aussi agir identiquement sur le corps L_2 , ce qui implique que $n = n'$, puisque le groupe cyclique infini n'a pas de torsion.

(iii) Si S est définissable sans paramètres, le frobenius de K définit bien un automorphisme φ de S ; pour m assez grand, φ^m induit $x\hat{}p^m$ sur un corps définissable sans paramètres dans S_0 ; cela force φ à induire x^p .

Dans ce cas, toute les classes de $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ sont représentées par les automorphismes associés aux puissances du frobenius du corps de base. Le Théorème 4.7 décompose l'isomorphisme en un transport de structure et un automorphisme définissable, et on peut faire subir au corps de base un automorphisme définissable pour ramener dans $Aut_{max}(S)$ n'importe quel point de $Aut_{def}(S)$. **Fin**

Pour la même raison, nous poursuivons par un deuxième cas particulier :

Théorème 4.17. *En caractéristique* p *, on considère une structure constructible autonome* S *définissant sans paramètres un bicorps tordu. Alors :*
(i) *le quotient* $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ *est trivial ou cyclique infini ;*
(ii) *si* S *est définissable avec paramètres algébriques, tout automorphisme définissable de* S *induit le même automorphisme sur chaque bicorps tordu définissable sans paramètres, c'est-à-dire : ou bien il conserve les deux corps et induit sur chacun d'eux la même puissance du frobenius, ou bien il les échange et son carré induit sur chacun d'eux la même puissance du frobenius ; le groupe* $Aut_{def}(S)/Aut_{max}(S)$ *est cyclique infini ;*
(iii) *les trois cas suivant peuvent se produire si* S *est définissable sans paramètres : ou bien tout automorphisme définissable se ramène dans* $Aut_{max}(S)$ *grâce à un automorphisme définissable du corps de base ; ou bien il se ramène ainsi dans* $Aut_{max}(S)$ *ou dans la classe modulo* $Aut_{max}(S)$ *d'un automorphisme qui échange les deux corps ; ou bien il se ramène ainsi dans* $Aut_{max}(S)$ *ou dans la classe modulo* $Aut_{max}(S)$ *d'un automorphisme agissant comme le frobenius sur chacun des deux corps.*

Démonstration. (i) Il est isomorphe au groupe des automorphismes du bicorps induit par les automorphismes définissables de S .
(ii) On montre comme dans le théorème précédent que des puissances paires assez grandes de l'automorphisme de Frobenius du corps de base conservent les deux corps et induisent sur eux cette puissance du Frobenius ; le résultat suit alors de l'unicité de la racine carrée, quand elle existe, dans le groupe cyclique infini.
(iii) Premier cas : l'automorphisme défini par le frobenius du corps de base fixe les deux corps ; on en déduit comme précédemment qu'il induit sur eux le frobenius, et il faut prévoir le cas où il y a un automorphisme constructible de S qui échange les deux corps.

Deuxième cas : il les échange ; ses puissances paires définissent les mêmes puissances sur les deux corps, et il faut prévoir le cas où il y a un automorphisme constructible de S qui conserve les deux corps et agit sur eux comme le frobenius. **Fin**

Pour trouver des énoncés aussi esthétiques dans le cas général, ou seulement un multicorps formé de n corps est définissable sans paramètres, il faudrait faire une étude plus précise des multicorps minimaux. Cependant, on obtient sans se fatiguer cette version très générale du Théorème de Borel-Tits :

Théorème 4.18. *Soient* S *une structure constructible autonome en caractéristique* p *, et* M *un multicorps définissable sans paramètres dans* S *; alors le quotient* $\mathrm{Aut}_{def}(S)/\mathrm{Aut}_{max}(S)$ *est isomorphe à un sous groupe du groupe des automorphismes définissables de* M *; si* S *est définissable avec des paramètres algébriques, il existe un nombre fini de classe modulo* $\mathrm{Aut}_{max}(S)$ *dans lesquelles on peut ramener grâce à un automorphisme définissable du corps de base n'importe quel automorphisme définissable.*

Démonstration. $\mathrm{Aut}_{def}(S)/\mathrm{Aut}_{max}(S)$ est le groupe des automorphismes du multicorps induit par les automorphismes définissables de S ; quand ce dernier est définissable avec paramètres algébriques, les automorphismes induits par les grosses puissances du frobenius du corps de base forment un groupe d'indice fini dans $\mathrm{Aut}_{def}(S)/\mathrm{Aut}_{max}(S)$. **Fin**

5. Retour aux groupes algébriques simples

L'idéologie gouvernant cet article, c'est qu'on peut démontrer des résultats subtils de Géométrie Algébrique par des arguments triviaux de Théorie des Modèles. Ce genre de sport a ses limites, et, quand il est question d'un groupe algébrique simple G , pour maîtriser la situation on n'échappe pas à une description précise de la structure de G et de celle de son groupe d'automorphismes définissables ; en d'autres termes il faut recourir au Théorème de Borel-Tits originel.

Comme nous l'avons dit, le groupe $\mathrm{Aut}_{abs}(G)$ de tous les automorphismes du groupe G ne nous est pas vraiment utile ; nous n'utilisons que le groupe $\mathrm{Aut}_{def}(G)$ de ses automorphismes définissables.

Dans le but d'identifier le groupe $\mathrm{Aut}_{max}(G)$, nous introduisons le groupe $\mathrm{Aut}_{geo}(G)$ des automorphismes géométriques de G , qui sont, ainsi que leurs inverses, des morphismes pour la structure de variété de G . Cette définition repose sur le choix d'une structure de variété pour laquelle la multiplication et l'inversion de G sont des morphismes, et il n'est pas sûr a priori que $\mathrm{Aut}_{geo}(G)$ soit uniquement déterminé par le groupe G , car il est possible que deux groupes algébriques simples soient constructiblement isomorphes sans être géométriquement isomorphes (soit encore qu'un même G soit muni de deux structures de variété distinctes qui en font un groupe algébrique)[12].

[12] Rappelons que la notion de variété n'a de sens que vue du corps K , puisqu'elle est définie par l'anneau des fonctions-polynômes de G dans K . Une conséquence du Théorème 3.1 est que deux groupes algébriques simples, sur le même corps algébriquement clos, qui sont abstraitement isomorphes, le sont constructiblement ; mais, comme le note HUMPHREYS 1981, p. 194, $SL_p(K)$ et $PGL_p(K)$ ne sont pas géométriquement isomorphes en caractéristique p , car ils n'ont pas les mêmes points sur les corps imparfaits.

Ayant donc choisi une représentation de G comme un groupe de matrices, de déterminant égal à 1, défini par des équations polynomiales à coefficients entiers, nous décrivons le groupe $Aut_{geo}(G)$ correspondant.

En caractéristique nulle, un automorphisme constructible τ est génériquement rationnel ; comme les translations sont des morphismes, c'est un automorphisme géométrique, c'est-à-dire un polynôme puisque la variété de G est affine ; dans ce cas $Aut_{geo}(G)$ est intrinsèque, car égal à $Aut_{def}(G)$, lequel, d'après notre Théorème 4.9, est égal à $Aut_{max}(G)$.

En caractéristique p, τ s'écrit génériquement sous la forme $R(X\hat{}p^n)$, où R est une fraction rationnelle et n un exposant négatif ; mais comme la représentation est à coefficients entiers, le frobenius induit un automorphisme du groupe G, et en composant τ avec l'automorphisme de groupe $X\hat{}p^{-n}$, on obtient un automorphisme de groupe qui est génériquement rationnel, et en fait polynomial. Autrement dit les automorphismes constructibles s'écrivent $P(X\hat{}p^n)$ où P est un polynôme ; cela ne signifie pas qu'ils s'écrivent comme composition d'une puissance du frobenius et d'un automorphisme géométrique, car il n'est pas sûr qu'on puisse choisir un P bipolynomial, ayant un inverse également polynomial, même si on minimise son degré pour que sa différentielle ne soit pas nulle : l'obstruction vient de l'existence (en caractéristique 2 ou 3) d'endogénies[13] exceptionnelles découvertes par Chevalley, que Borel et Tits ont trouvées sur leur chemin dans les cas pénibles de leur théorème ; ce sont des automorphismes polynomiaux dont le carré est le frobenius, et dont l'inverse (comme d'ailleurs celui du frobenius) n'est pas un polynôme.

Cependant, nous en savons déjà assez pour tirer ceci du Corollaire 4.7, que nous préciserons dans le théorème final :

Corollaire 5.1. *Tout isomorphisme entre un groupe algébrique simple* $G = G(K)$ *, sur le corps* K *algébriquement clos, et un groupe* $H = H(L)$ *algébrique sur le corps algébriquement clos* L *, lorsque ces deux groupes sont munis de leur structures de variété respectives, envoie constructible sur constructible et fermé de Zariski sur fermé de Zariski.*

Démonstration. Tout isomorphisme échange les ensembles définissables, qui sont dans le cas présent les constructibles puisque les groupes sont autonomes.

Pour la suite on applique le Corollaire 4.7. Quand on considère le groupe G comme un groupe de matrices défini par des équations à coefficients entiers, l'application σ^* induite par un isomorphisme σ entre les corps est un simple transport de structure qui échange les fermés de Zariski.

Il en est de même des automorphismes constructibles du groupe H, car ce sont des morphismes géométriques, des applications-polynômes en caractéristique nulle. En caractéristique p, ils s'écrivent $P(X\hat{}p^n)$, où P est polynôme et n un exposant négatif ou nul, application pour laquelle l'image

[13] Chez nous, qui ne considérons que des groupes simples et pas des groupes quasi-simples, ces endogénies sont des automorphismes.

réciproque d’un fermé de Zariski est un fermé de Zariski ; la conclusion suit de ce que ce sont des bijections dont l’inverse, étant de même nature, fait la même chose. En fait, les automorphismes de groupe constructibles sont ceux dont le graphe est un fermé de Zariski, défini par des équations polynomiales. **Fin**

On remarque que cette démonstration utilise un peu de géométrie : il faut savoir qu’un groupe algébrique simple est *géométriquement* isomorphe à un groupe linéaire Zariski-clos, et il importe que ce dernier soit défini par des équations à coefficients entiers en caractéristique p .

Ce Corollaire 5.1 enveloppe d'un mystère ténébreux la Conjecture d'Algébricité : si elle est vérifiée, il y aura une façon intrinsèque de distinguer les fermés de Zariski parmi les ensembles définissables dans les groupes simples nus ! Une réciproque est donnée par HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996.

Nous en déduisons aussi le résultat suivant, équivalent au Corollary 2.26 de ABC 2008 :

Corollaire 5.2. *Dans un contexte de rang de Morley fini (ou même seulement superstable), tout groupe définissable connexe d’automorphismes d’un groupe algébrique simple* G *sur un corps algébriquement clos est formé d’automorphismes intérieurs.*

Démonstration. Cela revient à montrer que la composante connexe de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{max}}(G)$ est formée d’automorphismes intérieurs. Mais, comme ce groupe est constructible, constructiblement isomorphe à un groupe algébrique (et même à un groupe linéaire puisque le centre de sa composante connexe est trivial), il s’agit d’un théorème de pure géométrie, où le résultat est bien connu (cf. HUMPHREYS 1981, p. 167), comme nous allons le voir brièvement.

La démonstration repose sur une analyse de la structure intime de G , qu’il est en fait inutile de reproduire, comme le font BOROVIK-NESIN 1994, Theorem 8.4, pour généraliser le Corollaire 5.2 du cas algébrique au cas de rang de Morley fini. **Fin**

Dans ABC 2008, ce Corollary 2.26 est tiré d’un Fact 2.25 p. 134, dont la démonstration - trop rapide à mon goût[14] - s'appuie sur un théorème de HUMPHREYS 1981 qu'il vaut la peine de citer in extenso :

Theorem (HUMPHREYS 1981, p. 160). *Let* G *be semisimple.*
(a) Aut G = (Int G)D.
(b) *The natural map* $D \to \Gamma$ *induces a monomorphism* Aut G/Int $G \to \Gamma$ *; in particular,* Int G *has finite index in* Aut G.

[14] Que signifie "As *F* can be interpreted in a Borel *B* and the action of *Aut(F)* on *F* can be interpreted via its action on *B*, …" ? En outre, dans le contexte subtil à l’extrême de cette démonstration, force est de remarquer que la citation de Humphreys n’est pas conforme à l’original.

Chez Humphreys, $\text{Aut } G$ désigne le groupe $\text{Aut}_{geo}(G)$ des automorphismes géométriques de G , ce qui implique qu'il a muni G d'une structure de variété qui en fait un groupe algébrique.

$\text{Int } G$ est le groupe des automorphismes intérieurs, isomorphe à G , D est le groupe des automorphismes qui fixent un borel et un tore maximal donnés, et Γ est le groupe (fini) des automorphismes du système de racines associé.

L'interprétation qu'en font ABC 2008 est une description trop optimiste du groupe $\text{Aut}_{abs}(G)$, causée selon moi par une confusion entre le corps de base K et ses copies définissables dans G ; elle est contredite par la possible existence d'automorphismes exceptionnels. Pour la corriger, on extrait tout d'abord le fait suivant de la lecture de BOREL-TITS 1973 :

Fait 5.3.[15] *Deux cas se produisent pour un groupe algébrique simple* G *sur un corps algébriquement clos* K *de caractéristique* p .

Dans le cas ordinaire, tout automorphisme abstrait de G *se décompose en un transport induit par un automorphisme de* K , *suivi d'un automorphisme géométrique.*

Dans le cas spécial, qui ne se manifeste qu'en caractéristique 2 *ou* 3 *, tout automorphisme abstrait de* G *se décompose en un transport induit par un automorphisme de* K , *suivi d'un automorphisme géométrique ou bien d'un automorphisme exceptionnel, polynomial mais non bipolynomial, dont le carré vaut le frobenius. En outre, dans le cas spécial, le groupe* $\text{Aut}_{geo}(G)$ *est réduit aux automorphismes intérieurs.*

On a bien l'impression que le cas ordinaire correspond à l'existence d'une copie de K définissable sans paramètres dans G , et le cas spécial à celle d'un bicorps tordu avec un automorphisme de G échangeant les deux corps. En tous cas, cela permet d'aboutir à la même conclusion que celle du Theorem 8.4 de BOROVIK-NESIN 1994 :

Corollaire 5.4. *Si* G *est un groupe algébrique simple, le groupe* $\text{Aut}_{max}(G)$ *est le même que le groupe* $\text{Aut}_{geo}(G)$ *des automorphismes géométriques de* G .

Démonstration. En caractéristique nulle, où tout automorphisme constructible d'un groupe algébrique est géométrique, il est évident que $\text{Aut}_{max}(G) = \text{Aut}_{def}(G) = \text{Aut}_{geo}(G)$.

Pour le reste, on remarque d'abord, comme le font Altinel, Borovik et Cherlin, que $\text{Aut}_{geo}(G)$ est définissable dans le corps K , car il est engendré par $\text{Int}(G)$ et un nombre fini d'automorphismes constructibles ; $\text{Int}(G)$ est sa composante connexe, et il est par conséquent inclus dans $\text{Aut}_{max}(G)$.

Par ailleurs, il est normal dans $\text{Aut}_{def}(G)$ parce que le frobenius normalise les polynômes dans le cas ordinaire, et parce qu'il est égal à $\text{Int}(G)$ dans le cas

[15] Je suis infiniment reconnaissant à mon ami Gregory Cherlin pour avoir attiré mon attention sur les endogénies exceptionnelles, ainsi que sur l'insuffisance des démonstrations du Fact 2.25 et de versions antérieures de ma conclusion, et pour sa contribution à leurs corrections.

spécial. La conclusion suit de la comparaison des quotients $Aut_{def}(G)/Aut_{geo}(G)$ décrit dans BOREL-TITS 1973, et $Aut_{def}(G)/Aut_{max}(G)$ décrit en 4.D. **Fin**

Dernière remarque 5.5. Au bout du compte, nous constatons que le groupe, noté Aut G par Humphreys, des automorphismes géométriques de G est aussi son plus grand groupe constructible et son plus grand groupe superstable d'automorphismes, constitué de ceux qui fixent point par point le corps dans le cas ordinaire, le bicorps dans le cas spécial : c'est celui que nous avons noté $Aut_{max}(G)$. C'est rassurant et en même temps troublant, car, si la notion de constructible se suffit à elle-même au niveau de G , celle de morphisme n'a de sens que vue de K .

Les automorphismes du corps K agissent de façon évidente sur G , une fois qu'on a fixé une définition sans paramètres de ce dernier (considéré comme un groupe *défini* dans K), mais ce qui est véritablement intrinsèque, c'est l'action que nous avons décrite des automorphismes de G (considéré comme un objet *définissable* dans K) non pas sur K , mais sur une copie L de K , ou sur un bicorps de copies de K , dont le noyau est formé des automorphismes géométriques de G .

Les faciles démonstrations de cet article ne concernent que les propriétés modèle-théoriques des groupes algébriques simples (ω_1-catégoricité, internité au sens de Hrushovski, autonomie, définition sans paramètres de multicorps, version constructible du Théorème de Borel-Tits) ; elles sont illustrées par leurs propriétés algébriques (Théorème de la base et représentation linéaire à coefficients entiers de Chevalley, isogénies exceptionnelles, Théorème de Borel-Tits, description de $Aut_{geo}(G)$), aux démonstrations desquelles je n'apporte rien de nouveau[16] ; en particulier, je n'explique pas pourquoi les bicorps sont seuls à se manifester ; il ne faut pas s'en étonner car ce sont de très grands résultats des Mathématiques du XX° siècle, menant entre autres choses à la classification des groupes simples finis.

La conclusion de cet article s'éclaircirait considérablement si on pouvait répondre positivement aux deux questions suivantes, la seconde se posant même en caractéristique nulle :

Question E. *Est-ce que tout isomorphisme constructible entre deux groupes algébriques, sur un même corps algébriquement clos, conjugue les automorphismes géométriques du premier sur ceux du second ?*

Question F. *Si* G *est un groupe algébrique quelconque, sur un corps algébriquement clos, est-ce que le groupe de ses automorphismes géométriques est définissable ? Est-ce le plus grand groupe constructible d'automorphismes de* G *?*

[16] Je me suis efforcé de n'utiliser que des faits géométriques faciles à exprimer, espérant les rendre peu sensibles aux erreurs d'interprétation.

Par amour de la généralité, et de ma spécialité mathématique favorite, j'ajoute deux dernières questions :

Question G. *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi, quand* G *est simple, la composante connexe de* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{max}}(\mathrm{G})$ *est formée des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire expliquant pourquoi le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{max}}(\mathrm{G})$ *a même dimension que* G *?*

Question H. *Que deviennent les conclusions de cet article si on remplace "constructible" par "définissable dans le corps des réels" ?*

Exercice final. La citation de la première page est extraite de l'édition de 1932 du Larousse du XX° siècle ; j'invite mes lectrices et mes lecteurs à essayer de la placer dans la conversation.

Références

ABC 2008 Tuna Altınel, A.V. Borovik & Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley Rank,* American Mathematical Society

ARTIN-SCHREIER 1927 Emil Artin & Otto Schreier, *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossen Körper,* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 5, Springer, 225-231

BERLINE-LASCAR 1986 Chantal Berline & Daniel Lascar, *Superstable Groups,* Annals of Pure and Applied Logic, 30.1, 1-41

BHMPW 2009 Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martín Pizarro & Frank Wagner, *Die böse Farbe,* Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 8, 415-443

BMPZ 2007 Andreas Baudisch, Amador Martin-Pizarro & Martin Ziegler, *Red Fields,* the Journal of Symbolic logic, 72, 207-225

BOREL 1970 Armand Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups,* Lecture Notes in Mathematics 131

BOREL-TITS 1973 Armand Borel & Jacques Tits, *Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples,* Annals of Mathematics, 97, 499-571

BOROVIK 1984 Aleksandr Vasil'ević Borovik, *Théorie des groupes finis et groupes incomptablement catégoriques* (en russe), prépublication n° 511, Novosibirsk

BOROVIK 2024 Id., *Finite group actions on abelian groups of finite Morley rank,* Model Theory, Vol. 3, nb 2, 539-569

BOROVIK-NESIN 1994 Aleksandr Vasil'ević Borovik & Ali Azizoğlu Nesin, *Groups of Finite Morley Rank,* Clarendon Press, Oxford

CACEYDO-HILS 2015 Juan Diego Caceydo & Martin Hils, *Bad fields with torsion,* the Journal of Symbolic Logic, 80, 221-233

CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank,* Annals of Mathematical Logic, 17, 1-23

HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996 Ehud Hrushovski & Boris Zil'ber, *Zariski geometries,* Journal of the American Mathematical Society, 9, 1-56

HUMPHREYS 1981 James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups,* Springer

MACINTYRE 1971 Angus Macintyre, *On ω_1-categorical theories of fields,* Fundamenta Mathematicae, 71, 1-25

ROSENLICHT 1961 Maxwell Rosenlicht, *On a result of Baer,* Proceedings of the American Mathematical Society, 12, 984-988

MUSTAFIN-POIZAT 2006 Yerulan Mustafin & Bruno Poizat, *Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$,* Journal of Agebra, 297, 155-167

POIZAT 1983 Bruno Poizat, *Une théorie de Galois imaginaire,* the Journal of Symbolic Logic, 48, 1151-1170

POIZAT 1985 Id., *Cours de Théorie des Modèles,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

POIZAT 1987 Id., *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

POIZAT 1988 Id., *MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense,* the Journal of Symbolic Logic, 53, 124-131

POIZAT 2001 Id., *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner,* the Journal of Symbolic Logic, 66, 1637-1646

ROCHE 2017 Olivier Roche, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard (Lyon-I)

STEINBERG 1974 Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups,* Séminaire Bourbaki, n° 435, 307-426

THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups,* Archiv der Math., 41, 103-116

WAGNER 2001 Frank Wagner, *Fields of finite Morley rank,* the Journal of Symbolic Logic, 66, 703-706

WAGNER 2003 Id., *Bad fields in positive characteristic,* Bulletin of the London Mathematical Society, 35, 499-502

WEIL 1948 André Weil, *Foundations of Algebraic Geometry,* American Mathematical Society

ZIL'BER 1977 Boris Iosifović Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique* (en russe), Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188

ZIL'BER 1980 Id., *Totally categorical theories; structural properties and the non-finite axiomatizability,* Lecture Notes in Mathematics, 834, 381-410

ZIL'BER 1984 Id., *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields,* Colloquium Mathematicum, 48, 173-180

15 février 2025