Indépendance et liberté

Bruno Poizat[1]

Abstract. We define in the infinitely generated free models of an arbitrary equational class an independence relation, which is necessarily the model-theoretic independence over the empty set when these structures happen to be ω-homogeneous stable groups. We establish the basic properties of this independence relation, give some examples, and ask some questions concerning its model-theoretic behaviour (many of them dealing with the treatment of the free models in Positive Logic).

Mots-clefs. Algèbres libres, groupes libres, déviation, Logique Positive.

Introduction

Cet article est consacré à l'examen des deux questions suivantes, pour lesquelles je ne connais pas de contre-exemple :

1. Dans une variété dont le modèle libre L_κ, à une infinité κ de générateurs, a une théorie stable, est-ce-qu'un ensemble libre et générateur de L_κ est formé de points indépendants au-dessus de $\varnothing$ au sens modèle-théorique, et de même type fort sur $\varnothing$? Ce premier problème s'évanouit si on a affaire à un groupe (stable), car il est alors connexe et les points d'un système libre et générateur sont génériques et indépendants.

2. Supposant ce premier obstacle franchi, est-ce-que deux uplets indépendants au-dessus de $\varnothing$ extraits de L_κ s'expriment nécessairement comme des multitermes en des uplets disjoints extraits d'un ensemble libre et générateur de L_κ ? La réponse est positive quand L_κ est ω-homogène, mais il ne l'est pas toujours.

Nous mettons en évidence dans les modèles libres infiniment engendrés de n'importe quelle classe équationnelle une notion d'indépendance, que nous appellons I-indépendance, et qui est nécessairement l'indépendance modèle-théorique au-dessus du vide s'il se trouve que ces structures sont des groupes stables ω-homogènes ; nous cherchons à lui trouver un statut modèle-théorique en restant dans un cadre général. Nous donnerons beaucoup d'exemples, malheureusement trop peu sophistiqués ; pour économiser l'espace, ils sont traités de façon elliptique, le lecteur étant invité à transformer lui-même en démonstrations les affirmations qui les concernent ; la conclusion récapitule les questions relatives aux comportement modèle-théorique de ces modèles libres que nous nous serons posées au cours de l'article.

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

En effet, cette I-indépendance si facile à définir pose pourtant de nombreux problèmes, en plus des deux énoncés ci-dessus. Par exemple, on ne voit pas comment définir une notion satisfaisante d'indépendance au-dessus d'un ensemble quelconque de paramètres, valable dans les modèles libres de n'importe quelle variété. Certains de nos exemples semblent indiquer qu'il n'y a pas de moyen de le faire, pas plus qu'il n'est possible, dans un modèle saturé d'une théorie stable, de définir l'indépendance sur un uplet quelconque de paramètres à partir de l'indépendance au-dessus de l'ensemble vide.

Un moyen de contourner ces difficultés est d'ajouter au langage des symboles interprétant les uplets basiques ; comme dans la plupart des exemples significatifs les modèles libres deviennent alors instables si on conserve le libre usage de la négation, il est tentant de les traiter par la Logique Positive, telle qu'elle est exposée dans BEN-YAACOV & POIZAT 2007. Dans bien des situations concrètes, la Logique Positive en donne une description bien meilleure que celle de la logique ordinaire, avec négation, qui encombre leurs extensions élémentaires saturées d'ornements parasites ; mais il n'est pas certain que ce soit un phénomène de portée générale.

Nos résultats s'appliquent en particulier aux groupes libres ; on voit que la foi du charbonnier suffit à décrire l'indépendance au-dessus de $\emptyset$ dans les groupes libres infiniment engendrés : il suffit de savoir qu'ils sont stables et ω-homogènes ! On trouve ces informations dans une somme de travaux récents, dont la complexité est sans commune mesure avec les généralités qui sont montrées ici ; ils donnent une image assez claire du comportement des groupes libres vis-à-vis de la logique du premier ordre, que je résume ici, car nous rencontrerons sur notre chemin des structures bien plus faciles à décrire qui partagent certaines de leurs propriétés.

Tout d'abord, les groupes libres L_2 , ... L_n , ... L_ω , ... L_κ , ... sont élémentairement équivalents, y compris ceux qui sont finiment engendrés par plusieurs générateurs libres (SELA 2006) ; de plus, les plongements naturels de l'un d'entre eux dans un autre (ceux qui envoient un système libre et générateur du premier dans un système libre et générateur du second) sont élémentaires. En fait, tout plongement élémentaire de L_n dans L_κ est naturel, et les seules restrictions élémentaires de L_n sont des plongements naturels (PERIN 2011). Tous ces groupes libres sont ω-homogènes, c'est-à-dire que deux uplets qui satisfont aux mêmes formules du langage des groupes se correspondent par automorphisme (PERIN & SKLINOS 2012, OULD HOUCINE 2011).

Leur théorie est stable (SELA 2013) ; ils sont connexes, et tout ensemble libre et générateur de L_κ est formé de points génériques indépendants (ce qui a été remarqué dès POIZAT 1993, bien avant que la stabilité des groupes libres ne fût établie !). Le type générique est de poids infini (PILLAY 2009), et on peut même trouver dans L_κ un point générique qui fait dévier chaque point d'une suite dénombrable de points génériques et indépendants (SKLINOS 2011).

Comme cette suite ne peut être incluse dans un ensemble engendrant librement L_κ , il existe toujours des plongements élémentaires non-naturels de L_ω dans L_κ , et aucun des L_κ n'est ω_1-homogène (voir aussi BELEGRADEK 2012 pour un résultat de portée générale).

A. Ensembles libres dans une classe équationnelle

On fixe un langage £ arbitraire, comprenant des relations, des fonctions et des constantes individuelles ; comme d'habitude, le symbole d'égalité en fait toujours partie. Une *équation,* c'est tout simplement une formule atomique de ce langage ; ce choix de vocabulaire vient de ce que les seules formules atomiques qui importent aux algébristes sont les égalités entre termes, les relations n'étant utiles qu'aux théoriciens des modèles, comme nous le verrons bientôt. Une *classe équationnelle* (on dit aussi une *variété*) est une classe élémentaire de £-structures axiomatisée par des conditions de la forme $(\forall \underline{x})\ \varepsilon(\underline{x})$, où ε est une équation ; un ensemble d'axiomes de ce type est dit *théorie équationnelle*. On observe qu'une variété contient toujours la structure réduite à un point qui satisfait à toutes les formules atomiques, que nous appelons *Terminus*.

Rappelons qu'un *homomorphisme* entre les deux £-structures M et N est une application h de M vers N telle toute formule atomique satisfaite par un uplet $\underline{a}$ extrait de M l'est aussi par son image $h(\underline{a})$; si, pour chacun de ces $\underline{a}$ de M , $\underline{a}$ et $h(\underline{a})$ satisfont aux mêmes formules atomiques, on dit que h est un *plongement*. Si le langage ne comprend pas d'autres symboles de relation que l'égalité, les plongements sont les homomorphismes injectifs.

Les classes équationnelles sont closes par sous-structure, image homomorphe et produits cartésiens ; d'après le célèbre théorème de BIRKHOFF 1935 (étendu à un langage pouvant contenir des relations), ces propriétés les caractérisent. Les structures libres peuvent être définies dans le contexte plus large des quasivariétés (voir HODGES 1993, Ch. 9), mais nous nous en tiendrons ici aux variétés.

> **Exemple 1.** Le langage est réduit au prédicat $P(x)$ et la variété est définie par l'équation $(\forall\ x, y)\ \ x = y$; à isomorphie près, elle se compose de deux structures, qui sont réduites à un point, et qui se distinguent par le fait que ce point satisfait à P ou non.

A partir de maintenant nous ne considérons que des classes équationnelles *non-dégénérées,* c'est-à-dire ne satisfaisant pas à l'équation $(\forall\ x, y)\ x = y$.

Nous dirons qu'une formule en n variables libres est *inévitable* (nos ancêtres auraient plutôt dit *valide*), parmi les modèles d'une théorie, si elle est satisfaite par tous les n-uplets extraits de ces modèles.

Un sous-ensemble A d'un modèle d'une théorie équationnelle T est dit *libre* si, pour tout n , chaque n-uplet d'éléments de A distincts ne satisfait qu'aux équations inévitables parmi les modèles de T ; toute partie d'un ensemble libre est elle-aussi libre. Si A est libre, toute application de A dans un modèle M de T s'étend en un homomorphisme de la structure engendrée par A dans M.

Pour tout cardinal κ il existe un ensemble libre de ce cardinal : pour le construire, on prend κ variables, on considère l'algèbre des termes qu'elles engendrent grâce aux fonctions du langage, qu'on quotiente par les égalités de termes inévitables, et on interprète les relations de façon minimaliste, $r(\tau_1(\underline{x}), \ldots \tau_\nu(\underline{x}))$ n'étant satisfaite que si on ne peut l'éviter ; comme la classe équationnelle est supposée non-dégénérée, les κ variables restent distinctes dans le quotient ; il est même impossible que l'une d'entre elles, y, s'exprime comme un terme $\tau(\underline{x})$ en fonction des autres, car sinon l'équation $y = \tau(\underline{x})$ serait vraie partout.

On notera L_κ le modèle librement engendré par κ générateurs, où κ est un cardinal infini ; il est unique à isomorphie près, et toute permutation d'un sous-ensemble libre et générateur de L_κ s'étend en un unique automorphisme de ce dernier. Par abus de langage, on dira qu'un tel modèle est libre.

La structure fonctionnelle des modèles libres détermine leur structure relationnelle ; en effet, un uplet $\underline{x}$ extrait d'un modèle libre satisfait à l'équation $\varepsilon(\underline{x})$ seulement s'il est de la forme $\underline{x} = \tau(\underline{y})$, où l'équation $(\forall\ \underline{y})\ \varepsilon(\tau(\underline{y}))$ est valide dans la variété ; en particulier, tout automorphisme de la structure fonctionnelle de L_κ préserve aussi sa structure relationnelle. De même, les notions de uplet basique et de I-indépendance, que nous allons définir, ne dépendent que des fonctions. Cependant, les relations n'ont pas qu'un rôle décoratif, car, puisqu'il y a une infinité de candidats pour τ, il n'est pas assuré qu'elles soient définissables à partir des seules fonctions ; elles peuvent compliquer la description des extensions élémentaires des L_κ, et elles joueront un grand rôle dans nos exemples. Le lecteur est invité à méditer sur le suivant :

Exemple 2. Le langage £ comprend une fonction binaire pour noter le produit, une fonction unaire pour noter l'inverse, et une constante représentant l'élément neutre ; les équations de la variété sont celles qui expriment qu'on a affaire à un groupe. Si on ajoute un symbole de relation binaire $r(x,y)$ au langage, et aux équations celles de la forme $r(x^m,x^n)$ pour chaque couple (m,n) d'entiers naturels, le modèle libre L_κ de la variété est le groupe libre à κ générateurs décoré de la relation satisfaite par les couples (u,v) de la forme $u = x^m$ et $v = x^n$. Comme dans un groupe libre les centralisateurs sont cycliques et disjoints, si $a \neq 1$ le centralisateur de a est défini par la formule $r(x,a^{-1}) \vee x=1 \vee r(x,a)$; $r(x,a)$ définit donc la partie positive du centralisateur de a, qui se présente comme un groupe ordonné, si bien que la structure est instable.

Si au contraire nous mettons dans les équations de la variété toutes les $r(x^m,x^n)$ où m et n sont des entiers relatifs, dans le groupe libre r(x,y) est l'équivalence " x et y ont même centralisateur", qui se définit en termes de la loi du groupe, si bien que la structure est stable.

Comme nous ne les utiliserons pas, nous laissons au lecteur le soin de définir le produit libre $A*B$ de deux modèles A et B d'une théorie équationnelle T , ainsi que, quand f est un homomorphisme de C dans A et g un homomorphisme de C dans B , le produit $A*_C B$ amalgamé au-dessus de C .

On remarque en passant que l'homomorphisme canonique de A dans $A*B$ n'est pas toujours un plongement ; ce n'est pas le cas, dans le langage de deux constantes 0 et 1 , si on amalgame avec Terminus la structure A formée de deux points 0 et 1 distincts. Autre exemple : le langage comprend deux fonctions unaires f(x) et g(x) , la variété est définie par l'équation $(\forall x,y)\ f(x) = f(y)$, et B satisfait à $g(f(x)) = f(x)$, contrairement à A .

Dans ce qui suit, on n'accordera que peu d'attention aux modèles libres L_n finiment engendrés. On ne fera aucune hypothèse sur la cardinalité du langage.

B. Plongements naturels

Nous dirons qu'un élément de L_κ est *basique* s'il fait partie d'un ensemble libre et générateur de ce dernier ; plus généralement, nous dirons qu'un n-uplet injectif est *basique* s'il est extrait d'un ensemble libre et générateur de L_κ .

Nous appelons *multiterme* un uplet de termes. Nous dirons qu'un multiterme est *inversible* s'il définit une bijection entre deux puissances cartésiennes de L_κ ; cette terminologie est justifiée par l'observation suivante :

Lemme 1. *Si un multiterme est bijectif, la bijection inverse est aussi définie par un multiterme.*

Démonstration. Soient $\tau(\underline{x})$ un multiterme définissant une surjection de L_κ^m sur L_κ^n , et $\underline{b}$ un n-uplet basique ; il est de la forme $\underline{b} = \tau(\theta'(\underline{b},\underline{c}))$, où $\underline{c}$ est pris dans un ensemble libre et générateur de L_κ prolongeant $\underline{b}$; comme $\underline{b}$^$\underline{c}$ est libre, l'équation $\underline{y} = \tau(\theta'(\underline{y},\underline{z}))$ est inévitable ; en remplaçant $\underline{z}$ par des points de $\underline{y}$ on obtient une autre équation $\underline{y} = \tau(\theta(\underline{y}))$ valable partout.

Le terme θ définit donc une section de τ , et si en outre τ est injectif il représente la bijection inverse. **Fin**

Lemme 2. *(i) Deux uplets libres engendrant la même sous-structure de* L_κ *se correspondent par des multitermes inverses l'un de l'autre.*
(ii) Considérons deux uplets s'exprimant chacun en fonction de l'autre par des multitermes inverses l'un de l'autre : si l'un est libre, l'autre l'est aussi ; si l'un est basique, l'autre l'est aussi.

Démonstration. Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ nos deux uplets.
(i) S'ils engendrent la même sous-structure, on peut trouver des multitermes tels que $\underline{b} = \tau(\underline{a})$ et $\underline{a} = \theta(\underline{b})$, et donc $\theta(\tau(\underline{a})) = \underline{a}$ et $\tau(\theta(\underline{b})) = \underline{b}$; s'ils sont de plus

libres, les équations $\theta(\tau(\underline{x})) = \underline{x}$ et $\tau(\theta(\underline{y})) = \underline{y}$ sont inévitables, et ces deux multitermes définissent des bijections inverses l'une de l'autre.
(ii) On suppose donc que $\underline{b} = \tau(\underline{a})$ et $\underline{a} = \theta(\underline{b})$ où θ et τ sont inverses l'un de l'autre, et que $\underline{a}$ est libre ; si $\varepsilon(\underline{b})$ est une équation satisfaite par $\underline{b}$, l'équation $\varepsilon(\tau(\underline{x}))$, étant satisfaite par $\underline{a}$, est inévitable, ainsi que $\varepsilon(\underline{y})$ puisque tout $\underline{y}$ est de la forme $\underline{y} = \tau(\underline{x})$. Si $\underline{a}$ est basique, nous le complétons en un ensemble $\underline{a}$^C libre et engendrant L_κ ; d'une part $\underline{b}$^C engendre L_κ , et d'autre part il est libre, car, pour tout uplet $\underline{c}$ extrait de C , $\underline{b}$^$\underline{c}$ est l'image de $\underline{a}$^$\underline{c}$ par un multiterme inversible. **Fin**

Exemple 3. On considère, dans le langage £ de deux fonctions unaires $f(x)$ et $g(x)$, la variété définie par l'équation $f(g(x)) = x$. Le modèle libre L_κ est formé de la juxtaposition des κ sous-structures engendrées par les points basiques. Un point a est libre si et seulement si $g(f(a)) \neq a$, soit encore s'il n'est pas dans l'image de g ; la structure qu'il engendre est formée des $g^n(f^m(a))$. Un point b est basique si et seulement s'il est libre et si son seul antécédent par f est $g(b)$ (les autres points libres en ont un deuxième) ; $g(b)$, qui n'est pas basique (ni bien sûr libre !), engendre la même sous-structure que b ; comme l'ensemble des points basiques est définissable, L_κ est ω-homogène (Lemme 8 de la section suivante). Le maximum des rangs de Morley des 1-types de la théorie des L_κ vaut trois, tandis que tous sont de rang de Lascar un.

Compliquons un peu cet exemple en introduisant une infinité de sections g_1 , ... g_n , ... pour la surjection f ; les équations de la variété sont donc $f(g_1(x)) = x$, ... $f(g_n(x)) = x$, ... ; chaque terme se met sous la forme canonique $g.f^m$, où g est un terme en les g_n . Si b est basique, il n'est pas dans les images des $g_n(x)$, et ses seuls antécédents par f sont les $g_n(b)$ (les points libres non-basiques en ont un de plus) ; on voit facilement qu'il existe un automorphisme du réduit de L_κ au langage $£_n$ = { f , g_1 , ... g_n } qui envoie b sur $f(b)$, et donc que b et $f(b)$ ont même type bien que $f(b)$ ne soit pas basique : les L_κ ne sont pas ω-homogènes. Dans un modèle ω-saturé de leur théorie, chaque point x a une infinité d'antécédents par f qui sont distincts des $g_n(x)$; le type de x est donné par la liste des équations de la forme $g_n(f^{m+1}(x)) = f^m(x)$ auxquelles il satisfait (ou pas !) ; cette théorie est superstable, non ω-stable, et ω est le plus grand rang de Lascar de ses 1-types (on verra plus de détails dans la Section J).

Une conséquence évidente du lemme suivant est que deux n-uplets basiques se correspondent par un automorphisme de L_κ :

Lemme 3. *Tout ensemble générateur de* L_κ *comprend au moins* κ *éléments, et deux ensembles libres et générateurs de* L_κ *se correspondent par automorphisme.*

Démonstration. Soient A un ensemble libre de cardinal κ engendrant L_κ , et B une partie de L_κ de cardinal strictement plus petit ; chaque point de B est engendré par une partie finie de A , si bien que B est contenu dans la sous-structure de L_k engendrée par un sous-ensemble propre de A . Pour le deuxième point, si A et A' sont deux parties libres et génératrices de L_κ , elles ont même cardinal κ , et toute bijection entre A et A' s'étend en un automorphisme de L_κ . **Fin**

On voit donc que, si $\kappa < \lambda$, L_κ et L_λ ne sont pas isomorphes. L'exemple suivant montre qu'il est possible que L_m et L_n le soient même si $m < n$.

> **Exemple 4.** Dans le langage £ comprenant une fonction binaire $c(x,y)$ et deux fonctions unaires $g(z)$ et $d(z)$, on considère la variété définie par les équations $g(c(x,y)) = x$, $d(c(x,y)) = y$, $c(g(x),d(x)) = x$. Tous ses modèles L_n libres et finiment engendrés sont isomorphes, puisque, d'après le Lemme 2, si $(b_0, b_1, \ldots b_n)$ est basique, alors $(c(b_0, b_1),b_2,\ldots b_n)$, qui lui correspond par un multiterme inversible, l'est aussi. Si on introduit une fonction $(n+1)$-aire et ses $n+1$ inverses unaires, on obtient un exemple semblable où les modèles libres finiment engendrés se reproduisent avec périodicité n .
>
> En utilisant le Lemme 10 de la Section C qui suit, on voit facilement que les L_κ sont ω-homogènes ; par contre, aucun d'entre eux n'est ω_1-homogène, c'est-à-dire qu'on peut toujours en extraire deux suites dénombrables qui satisfont les mêmes formules du langage £ mais ne se correspondent pas par automorphisme. Soit en effet b basique, et posons $a_n = g(d^n(b))$; chaque uplet $(a_0, \ldots a_n)$ est basique, et pourtant la suite $a_0 , \ldots a_n , \ldots$ ne peut être isomorphe à une partie dénombrable d'un ensemble libre et générateur de L_κ , car un ensemble libre la contenant ne peut engendrer b .

On appelle *plongements naturels* de L_κ dans L_λ ceux qui sont induits par une injection d'un ensemble libre et générateur du premier dans un ensemble libre et générateur du second. Dans cette situation, nous noterons $A \cup B$ un ensemble libre et générateur de L_λ tel que A engendre L_κ ; nous appelons B le *bout* du plongement. Le théorème qui suit reste valable si on remplace κ ou λ par des nombres finis.

Lemme 4. *Si* L_κ *est naturellement plongé dans* L_λ *, tout automorphisme du premier s'étend en un automorphisme du second fixant le bout du plongement.*

Démonstration. Soit A' l'image de A par un automorphisme de L_κ. Comme $A' \cup B$ engendre L_λ, il suffit de montrer qu'il est libre, ce qu'on fait de la même manière que dans la démonstration du Lemme 2. **Fin**

Nous introduisons un prédicat $I(x)$ pour nommer l'ensemble des points basiques, et, pour chaque n, un symbole de relation n-aire $I_n(\underline{x})$ désignant l'ensemble des n-uplets basiques. Le langage $£(I)$ est celui qui est obtenu en ajoutant à $£$ tous ces I_n ; la $£$-structure de L_κ et sa $£(I)$-structure ont les mêmes automorphismes.

Théorème 5. *Les plongements naturels de* L_κ *dans* L_λ *sont des plongements élémentaires pour le langage* $£(I)$.

Démonstration. Soit comme ci-dessus A un ensemble libre et générateur de L_κ, que nous complétons en un ensemble libre $A \cup B$ pour engendrer L_λ. La première chose à vérifier est que ce plongement naturel est un plongement pour le langage $£(I)$, c'est-à-dire qu'un n-uplet $\underline{b}$ extrait de L_κ est basique au sens de L_κ si et seulement s'il l'est au sens de L_λ.

Si $\underline{b}$ est basique dans L_κ, il existe un automorphisme de ce dernier qui l'envoie sur les n premiers éléments $\underline{a}$ de A, et d'après le Lemme 4 cet automorphisme s'étend à L_λ.

Supposons maintenant que $\underline{b}$ soit basique dans L_λ, c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme σ de ce dernier qui l'envoie sur $\underline{a}$; notons $\underline{\alpha}$ un uplet extrait de A contenant $\underline{a}$ et engendrant $\underline{b}$. Si $\lambda = \kappa$, on trouve une bijection entre A et $A \cup B$ fixant $\underline{\alpha}$, et on obtient, grâce à une conjugaison par les isomorphismes induits, un automorphisme de L_κ qui envoie $\underline{b}$ sur $\underline{a}$. Si $\lambda > \kappa$ on construit par va-et-vient une partie A' de $A \cup B$ de cardinal κ, contenant A, et engendrant une sous-structure stable par σ ; on est alors ramené au cas précédent.

On voit ensuite facilement, par va-et-vient infini, que l'extension est élémentaire (et même plus que ça !). **Fin**

Si A est un ensemble libre et générateur de L_κ, et $\varphi(x,\underline{a})$ est une formule à paramètres dans L_κ du langage $£(I)$, $\underline{a}$ s'exprime comme un multiterme à partir d'un nombre fini $\underline{\alpha}$ d'éléments de A, et tous les autres points de A satisfont à $\varphi(x,\underline{a})$, où bien tous satisfont à sa négation. Cette suite totalement indiscernable et insécable a donc un *type limite* (on dit aussi un *type moyen*) sur L_κ, formé des formules à paramètres dans L_κ qui sont satisfaites par tous les éléments de A sauf un nombre fini ; ce type est réalisé dans les bouts des extensions naturelles de L_κ, et les Lemmes 3 et 4 impliquent que deux ensembles libres et générateurs de L_κ ont même type limite. Nous l'appellerons le *type basique* sur L_κ.

De même, si $\varphi(\underline{x},\underline{a})$ est une formule en n variables, il existe une partie cofinie A' de A dont tous les n-uplets injectifs satisfont à $\varphi(\underline{x},\underline{a})$, ou bien dont tous les n-uplets injectifs satisfont à sa négation. On obtient ainsi un n-type moyen, indépendant de la suite libre et génératrice choisie. Cette propriété s'exprime dans le lemme suivant :

Lemme 6 (de Prolongement). *Si* $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ *sont basiques, il existe un nouvel élément* b *tel que* $\underline{a}$^b *et* $\underline{a}'$^b *le soient aussi.*

Démonstration. Un tel b existe dans l'extension élémentaire de L_κ obtenue en ajoutant un point à ses ensembles libres et générateurs ; en fait, presque tous les points de n'importe quel ensemble libre et générateur de L_κ conviennent. **Fin**

Ce lemme nous permet de conclure la section en posant le problème qui hante cet article. Tous les n-uplets basiques satisfont aux mêmes formules du langage £ , et nous qualifierons de £-*basiques* les uplets qui ont même £-type qu'un uplet basique. La question est de savoir si, dans L_κ , ou bien dans un modèle ω-saturé de la théorie des L_κ , le Lemme de Prolongement reste valide pour les uplets £-basiques.

L'exemple suivant et rudimentaire montre que le Lemme de Prolongement ne s'étend pas aux uplets libres.

> **Exemple 5.** Le langage comprend une fonction unaire $f(x)$ et une relation binaire $r(x,y)$, et les équations sont $r(x,x)$, $r(f(x),y)$ et $r(x,f(y))$; dans les modèles libres, f est une injection sans cycles et les points basiques sont ceux qui ne sont pas dans l'image de f ; les points non-basiques sont reliés par r à tous les autres. Tous les points sont libres, mais un point non-basique ne se prolonge pas en un couple libre.

Remarque. Comme il a été remarqué dans POIZAT 2014 à propos des groupes libres, le Théorème 5 s'étend de façon obvie au langage de toutes les relations invariantes par les automorphismes de L_κ .

C. Homogénéité

Chaque modèle L_κ est ω-homogène dans le langage £(I) , ce qui signifie que deux uplets de même longueur qui satisfont aux mêmes £(I)-formules se correspondent par automorphisme ; en effet chaque uplet $\underline{a}$ satisfait à une formule du genre $(\exists\, \underline{y})\ \underline{x} = \tau(\underline{y}) \wedge I_n(\underline{y})$, où $\tau(\underline{y})$ est un multiterme, et cette formule le détermine à automorphisme près.

Par contre, nous avons vu grâce à l'Exemple 3 que ces structures ne sont pas nécessairement ω-homogènes pour le langage £ , et nous faisons à ce propos quelques observations faciles, sans prétendre à une grande originalité.

Lemme 7. *Si l'un des* L_κ *est* ω-*homogène pour le langage* £ *, tous le sont.*

Démonstration. Supposons L_ω ω-homogène ; étant donnés deux uplets d'éléments de L_κ , on peut trouver un plongement naturel de L_ω dans L_κ qui les contient ; d'après le Théorème 5 et le Lemme 4, L_κ est lui-aussi ω-homogène.

Supposons L_κ , $\kappa > \omega$, ω-homogène, et considérons deux uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même type extraits de L_ω ; si nous plongeons naturellement ce dernier dans L_κ , il existe un automorphisme σ de L_κ qui les échange ; on construit alors, comme dans la démonstration du Théorème 5, un deuxième plongement naturel de L_ω , contenant le premier, qui est stable par σ . **Fin**

Nous dirons que I_n est £-définissable s'il existe une formule sans paramètres φ_n du langage £ telle que dans un L_κ , et en fait dans tous, les n-uplets basiques soient précisément ceux qui satisfont φ_n .

Lemme 8. *(i) Si chaque* I_n *est £-définissable, les* L_κ *sont* ω*-homogènes et le Lemme de Prolongement s'étend aux types £-basiques.*
(ii) Les I_n *sont tous £-définissables si et seulement si leurs types sont isolés.*

Démonstration. (i) Dans ces conditions, l'homogénéité dans £(I) implique l'homogénéité dans £ , et le Lemme de Prolongement fait partie de la théorie élémentaire des L_κ .
(ii) Si I_n est défini par $\varphi_n(\underline{x})$, pour toute £-formule sans paramètres $\psi(\underline{x})$, L_κ satisfait à $\neg (\exists\, x, y)\ \varphi_n(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{x}) \wedge \varphi_n(\underline{y}) \wedge \neg\psi(\underline{y})$, si bien que $\varphi_n(\underline{x})$ isole un type complet ; réciproquement, si pour chaque n il existe une formule $\varphi_n(\underline{x})$ isolant le n-type £-basique, les L_κ sont atomiques, et L_ω est le modèle premier de leur théorie. S'il est dénombrable, il est bien connu que L_ω est ω-homogène, si bien que tous ses uplets £-basiques sont basiques. Mais il l'est aussi même si le langage n'est pas dénombrable, car en fait toute structure M atomique et dénombrablement engendrée est ω-homogène ; en effet, si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ont même type, en procédant par va-et-vient on les prolonge en deux suites dénombrables A et B de même type, chacune contenant un système générateur de M ; la bijection naturelle entre A et B définit un isomorphisme entre les structures qu'elles engendrent, c'est-à-dire un automorphisme de M . **Fin**

La première partie du dernier lemme est valable dans un contexte plus général ; nous dirons que L_κ est *basiquement saturé* si toute formule avec paramètres $\varphi(\underline{x}_1, \ldots \underline{x}_n)$ constistante avec le fait que $\underline{x}_1 , \ldots \underline{x}_n$ soient basiques, c'est-à-dire telle que $(\exists\, \underline{x}_1, \ldots \underline{x}_n)\ \varphi(\underline{x}_1, \ldots \underline{x}_n) \wedge \psi(\underline{x}_1) \wedge \ldots \wedge \psi(\underline{x}_n)$ soit satisfaite pour tout fragment ψ du m-type £-basique, est réalisée dans L_κ par des uplets basiques. Il est inutile de mettre des paramètres dans la formule φ , car tout uplet s'exprime comme multiterme à partir d'un uplet basique ; et on ne perd pas de généralité en supposant tous les $\underline{x}_i$ de même longueur.

Lemme 9. *(i) Si l'un des* L_κ *est basiquement saturé, tous le sont ; ils sont alors aussi* ω*-homogènes et le Lemme de Prolongement s'étend aux types* £*-basiques.*
(ii) Si l'un des L_κ *est* ω*-saturé, tous le sont, et ils sont basiquement saturés.*

Démonstration. (i) Tous le sont car ils ont même théorie dans le langage £(I) ; si $\underline{a} = \tau(\underline{b})$, $\underline{a}' = \tau(\underline{b}')$, $\underline{b}$ et $\underline{b}'$ étant basiques, et si $\underline{a}'$ a même type que $\underline{a}$, l'égalité $\tau(\underline{x}) = \tau'(\underline{x}')$ est consistante avec la basicité de $\underline{x}$ et de $\underline{x}'$, d'où l'homogénéité ; si dans un modèle ω-saturé de la théorie des L_κ deux n-uplets £-basique $\underline{b}$ et $\underline{b}'$ n'avaient pas de prolongement commun, c'est qu'ils satisferaient $\neg\ (\exists\ x)\ \psi(\underline{b},x) \wedge \psi(\underline{b}',x)$ pour un certain fragment ψ du type des (n+1)-uplets basiques, et on pourrait reproduire la chose dans L_κ .
(ii) Tous le sont car ils se correspondent par va-et-vient infini ; si L_ω est ω-saturé, il est ω-homogène car il est dénombrablement engendré, si bien que tous ses uplets £-basiques sont basiques. **Fin**

Ce Lemme 9 s'applique au cas particulier, très précocement envisagé par BALDWIN & SHELAH 1983, où l'un des L_κ est ω_1-saturé, dont l'étude a été reprise dernièrement par PILLAY & SKLINOS 2014.

On peut envisager d'autres renforcements de l'homogénéité ; par exemple, nous dirons que L_κ est *finiment homogène* si deux uplets de même type se correspondent par un automorphisme d'une sous-structure engendrée par un uplet basique à laquelle ils appartiennent tous deux.

Lemme 10. *Si chaque uplet de* L_κ *engendre la même sous-structure qu'un certain uplet basique, les* L_κ *sont* ω*-homogènes.*

Démonstration. D'après le Lemme 2, dans L_κ tout uplet libre est basique ; supposons que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ soient des n-uplets d'éléments de L_κ de même type, et que $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{\alpha} = \theta(\underline{a})$ où $\underline{\alpha}$ est basique ; alors $\underline{\beta} = \theta(\underline{b})$ est libre, $\underline{\beta}$ et $\underline{\alpha}$ se correspondent par automorphisme, et $\underline{b} = \tau(\underline{\beta})$. **Fin**

D. Modèles libres et formules positives

Cette section est un prélude à l'étude positive des modèles libres. Nous y travaillons dans le langage £ (pas le langage £(I)), et nous montrons qu'un contre-exemple au problème que nous nous sommes posé devra nécessairement faire intervenir des formules d'une certaine complexité..

Une formule du genre $(\exists\ \underline{y})\ \varepsilon_1(\underline{x},\underline{y}) \wedge \ldots \wedge \varepsilon_s(\underline{x},\underline{y})$, où les ε_i sont atomiques, est dite *positive primitive.* Une formule est *positive* si elle s'obtient à partir des formules atomiques par l'usage de $\vee$, $\wedge$ et $\exists$ seulement ; une formule positive est équivalente à une disjonction de formules positives primitives.

Nous dirons qu'une formule est *s-positive* si elle s'obtient à partir des formules atomiques par l'usage de $\vee$, $\wedge$, $\exists$ et $\forall$; sous forme prénexe, elle s'écrit comme une suite de blocs de quanteurs universels ou existentiels devant une formule libre positive. La lettre s est pour "surjection" ; on prendra garde à ce que certaines personnes qualifient de positives les formules que nous appelons s-positives.

Lemme 11. *Dans* L_κ *, un uplet basique ne satisfait à une £-formule s-positive que si elle est inévitable dans la variété considérée, et chaque uplet* $\underline{a}$ *satisfait à une formule positive qui implique toutes les formules s-positives auxquelles il satisfait.*

Première démonstration. Soient M un modèle de la variété et $\underline{b}$ un n-uplet d'éléments de M ; pour κ assez grand, $\underline{b}$ est l'image d'un n-uplet basique par un homomorphisme envoyant surjectivement L_κ sur M ; or les formules s-positives sont préservées par les homomorphismes surjectifs.

Tout uplet $\underline{a}$ extrait de L_κ est de la forme $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$, où $\underline{\alpha}$ est basique, si bien qu'une formule s-positive $\varphi(\underline{x})$ n'est vérifiée par $\underline{a}$ que si $\varphi(\tau(\underline{y}))$ est inévitable ; $\varphi(\underline{x})$ est alors conséquence de $(\exists\ \underline{y})\ \underline{x} = \tau(\underline{y})$. **Fin**

Deuxième démonstration. Soit $\varphi(\underline{x})$ une formule s-positive satisfaite dans L_κ par un uplet $\underline{x}$ basique ; si elle est de la forme $(\exists\ \underline{u})\ \varphi_1(\underline{x},\underline{u})$, $\varphi_1(\underline{x},\underline{u})$ est satisfaite par un $\underline{u}$ s'écrivant $\underline{u} = \tau_1(\underline{x},\underline{y}_1)$ où $\underline{x}\hat{}\underline{y}_1$ est basique ; si φ_1 est de la forme $(\forall\ \underline{v})\ \psi_1(\underline{x},\underline{u},\underline{v})$, ψ_1 est vraie en particulier pour $\underline{x}\hat{}\tau_1(\underline{x},\underline{y}_1)\hat{}\underline{z}_1$ quand $\underline{x}\hat{}\underline{y}_1\hat{}\underline{z}_1$ est basique ; à la deuxième étape, on obtient une formule $\psi_2(\underline{x},\tau_1(\underline{x},\underline{y}_1),\underline{z}_1,\tau_2(\underline{x},\underline{y}_1,\underline{z}_1,\underline{y}_2),\underline{z}_2)$; en itérant, on aboutit à une suite finie de termes τ_1 , ... τ_n ne dépendant pas des variables situées à leur droite, mis dans une formule positive sans quanteurs, qui est vérifiée par les uplets basiques ; elle est donc vérifiée partout, et comme c'est une forme de Skolem de $\varphi(\underline{x})$, cette dernière est également valide. **Fin**

Corollaire 12. *Soient* h *un homorphisme d'un modèle* M *de la variété dans un modèle libre* L_κ *, et* $\underline{a}$ *un uplet d'éléments de* M *; si* $h(\underline{a})$ *est basique,* $\underline{a}$ *ne satisfait qu'à des formules positives inévitables ; si en outre* h *est surjectif,* $\underline{a}$ *ne satisfait qu'à des formules s-positives inévitables.*

Démonstration. Toute formule positive satisfaite par $\underline{a}$ l'est par $h(\underline{a})$, et si h est surjectif cela est aussi vrai des formules s-positives. **Fin**

Le Lemme 11 suggère de définir le préordre suivant sur les n-uplets de termes : $\tau \leq \theta$ si la variété vérifie $(\forall\ \underline{x})(\exists\ \underline{y})\ \tau(\underline{x}) = \theta(\underline{y})$; comme cela se produit pour $\underline{x}$ basique, cela signifie encore qu'il existe un multiterme $\tau'(\underline{x})$ tel que l'équation $\tau(\underline{x}) = \theta(\tau'(\underline{x}))$ soit valide dans la variété. Nous dirons que deux termes sont équivalents si $\tau \leq \theta$ et $\theta \leq \tau$.

Pour chaque $\underline{a}$ de L_κ , si τ est un multiterme maximal tel que $\underline{a}$ soit de la forme $\underline{a} = \tau(\underline{x})$, cette égalité détermine les formules s-positives qu'il satisfait, mais en général elle ne détermine pas son type ; il existe θ équivalent à τ et $\underline{\beta}$ basique tel que $\underline{a} = \theta(\underline{\beta})$, mais pas nécessairement $\underline{\alpha}$ basique tel que $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ (voir l'Exemple 9 dans la Section I).

Le théorème qui suit déclare que, en cas de stabilité, la positivité évitable fait dévier. Nous dirons que a est positivement générique au dessus d'un modèle M de la théorie des L_κ si, pour toute formule s-positive $\varphi(x,\underline{y})$ et tout $\underline{b}$ dans M , $\varphi(a,\underline{b})$ n'est satisfaite que si $\underline{b}$ vérifie $(\forall x)\, \varphi(x,\underline{b})$.

Théorème 13. *(i) Au-dessus de chaque modèle* M *de la théorie* T *des* L_κ *il y a des types positivement génériques.*
(ii) Si T *est stable, toute extension non déviante du type basique sur* $\varnothing$ *est positivement générique ; la suite de Morley de ce type ne satisfait qu'aux formules s-positives inévitables.*
(iii) Si pour chaque n *le* n*-type basique est axiomatisé par les négations des formules s-positives évitables, le Lemme 6 de prolongement s'étend aux uplets £-basiques.*

Démonstration. (i) Etendons L_ω en ajoutant un point a à sa suite libre et génératrice ; si $\underline{b}$ est dans L_ω , il est de la forme $\underline{b} = \tau(\underline{c})$, où $a\hat{}\underline{c}$ est basique ; si la formule s-positive $\varphi(a,\underline{b})$ est satisfaite, d'après le Lemme 11 $\varphi(x,\tau(\underline{z}))$ est inévitable, si bien que $\underline{b}$ satisfait à $(\forall x)\, \varphi(x,\underline{b})$. Autrement dit a est positivement générique sur L_ω , et le résultat suit par compacité.
(ii) Le type de a sur L_ω omet la formule $\varphi(x,\underline{y}) \wedge (\exists t)\, \neg\varphi(t,\underline{y})$; d'après le Théorème de la Borne (LASCAR & POIZAT 1979), il en est de même de toute extension non-déviante de $tp(a/\varnothing)$ sur un quelconque modèle M de T . Le deuxième point s'obtient par itération du premier.
(iii) Si M est un modèle contenant deux uplets £-basique, tout point positivement générique sur M permet le prolongement. **Fin**

Il serait intéressant de disposer d'un exemple avec une relation d'équivalence $e(x,y)$ £-définissable sans paramètres telle que deux points basiques soient toujours congrus modulo e , mais pas deux points £-basiques ; cela empêcherait l'extension du Lemme de Prolongement aux points £-basiques, et, en cas de stabilité, impliquerait que le type basique dévie sur l'ensemble vide, ou bien n'est pas stationnaire sur ce dernier. Si c'est possible, il faudra que la formule définissant $e(x,y)$ soit assez compliquée ; en effet :

Lemme 14. *On considère une combinaison booléenne* $\varphi(x,\underline{u})$ *de formules s-positives ; si dans les* L_κ *deux points basiques quelconques sont toujours congrus modulo l'équivalence* $(\forall \underline{u})\, \varphi(x,\underline{u}) \Leftrightarrow \varphi(y,\underline{u})$ *, il en est de même de deux points £-basiques dans un quelconque modèle de leur théorie.*

Démonstration. Considérons dans L_κ un x basique et $\underline{u}$ tels que $\varphi(\underline{x},\underline{u})$ soit satisfaite ; $\underline{u}$ est de la forme $\tau(x,\underline{y})$ où $x\hat{}\underline{y}$ est basique, et si $x\hat{}\underline{y}\hat{}z$ est basique $\varphi(z,\underline{u})$ est aussi satisfaite ; si $\alpha(x,\underline{u})$ est une formule s-positive parmi celles dont φ est combinaison booléenne, d'après le lemme précédent $\alpha(z,\tau(x,\underline{y}))$ est vraie si et seulement si $(\forall\ t)\ \alpha(t,\tau(x,\underline{y}))$ est vraie. Si donc nous notons $\varphi^*(\underline{u})$ la formule obtenue en remplaçant chaque $\alpha(x,\underline{u})$ par $(\forall\ t)\ \alpha(t,\underline{u})$, dans le type £-basique figure la formule $(\forall\ \underline{u})\ [\varphi(x,\underline{u}) \Rightarrow \varphi^*(\underline{u})]$. On y trouve de même la formule $(\forall\ \underline{u})\ [\neg\varphi(x,\underline{u}) \Rightarrow (\neg\varphi)^*(\underline{u})]$. Mais $(\neg\varphi)^*$ est la négation de φ^* . **Fin**

Lemme 15. *Si la théorie des* L_κ *n'a pas la Propriété d'Indépendance, à toute formule s-positive* $\varphi(\underline{x},\underline{y})$ *est attaché un entier* n *tel que, si* $\underline{a}_1 \wedge ... \wedge \underline{a}_n$ *est £-basique,* $\varphi(\underline{x},\underline{a}_1) \wedge ... \wedge \varphi(\underline{x},\underline{a}_n) \Rightarrow (\forall\ \underline{y})\ \varphi(\underline{x},\underline{y})$.

Démonstration. Considérons un $\underline{x}$ de L_κ satisfaisant à $\varphi(\underline{x},\underline{a}_1) \wedge ... \wedge \varphi(\underline{x},\underline{a}_n)$ et $(\exists\ \underline{y})\ \neg\varphi(\underline{x},\underline{y})$; si $x = \tau(\underline{c})$ et $\underline{c}\wedge\underline{b}$ est basique, $\varphi(\underline{x},\underline{b})$ n'est donc pas satisfaite, et on trouve donc, dans une suite libre et génératrice prolongeant celle des $\underline{a}_i$, des uplets $\underline{b}_i$, deux-à-deux disjoints et disjoints des $\underline{a}_i$, et tels que $\neg\varphi(\underline{x},\underline{b}_1) \wedge ... \wedge \neg\varphi(\underline{x},\underline{b}_n)$ soit satisfaite. Si n n'est pas borné, l'indiscernabilité de la suite provoque la Propriété d'Indépendance. **Fin**

E. Modèles libres et Logique Positive

La positivité des équations nous invite à décrire les modèles libres (dans le langage £(I)) en termes de Logique Positive, dont nous rappelons brièvement les bases en suivant BEN-YAACOV & POIZAT 2007.

Un énoncé est dit *h-universel* s'il est équivalent à un énoncé de la forme $\neg\ (\exists\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x})$, soit encore $(\forall\ \underline{x})\ \neg\varphi(\underline{x})$, où φ est positive ; il est dit *h-inductif* s'il équivaut à une conjonction finie d'énoncés de la forme $(\forall\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x}) \Rightarrow \psi(\underline{x})$, où φ et ψ sont positives (la lettre h est pour "homomorphisme"). Les énoncés h-universels, et ceux de la forme $(\forall\ \underline{x})(\exists\ \underline{y})\ \psi(\underline{x},\underline{y})$, où ψ est positive, doivent être considérés comme des cas particuliers d'énoncés h-inductifs, ce qui peut être obtenu formellement grâce à l'introduction d'un symbole spécifique pour l'antilogie. Dans les années 70, ces énoncés h-inductifs étaient appelés "énoncés cohérents" par les théoriciens des modèles catégoristes du Québec (MAKKAI & REYES 1977).

Dans ces conditions, en mettant sa partie booléenne sous forme conjonctive, on constate que tout énoncé universel (sans restriction d'emploi de la négation dans sa partie booléenne) est aussi h-inductif. De fait, les énoncés h-inductifs sont ceux dont la satisfaction passe aux limites inductives d'homomorphismes ; ce n'est pas le cas d'énoncés comme $(\exists\ x)\ \neg P(x)$ ni comme $(\exists\ x)(\forall\ y)\ R(x,y)$.

Si h est un homomorphisme de M vers N , toute formule positive satisfaite par $\underline{a}$ dans M l'est par $h(\underline{a})$ dans N ; quand, pour tout uplet $\underline{a}$ extrait de M , $\underline{a}$ et $h(\underline{a})$ satisfont aux même formules positives, on dit que h est une *immersion*. Si T est une théorie h-inductive, on dit qu'un de ses modèles

M est *positivement clos* (parmi les modèles de T) si tout homomorphisme de M dans un autre modèle de T est une immersion ; chaque modèle de T se continue (c'est-à-dire, a une image homomorphe) dans un modèle positivement clos ; T a les mêmes modèles positivement clos que la théorie formée de ses conséquences h-universelles.

Dans un modèle positivement clos, si un uplet $\underline{a}$ ne satisfait pas à une certaine formule positive $\varphi(\underline{x})$, c'est qu'il satisfait à une autre, $\psi_{\underline{a}}(\underline{x})$, que la théorie T déclare incompatible avec la première : elle implique l'énoncé h-universel $\neg\, (\exists\, \underline{x})\, \varphi(\underline{x}) \wedge \psi_{\underline{a}}(\underline{x})$. L'ensemble des formules positives satisfaites par $\underline{a}$ constitue un type positif maximal consistant avec T , et la stabilité (positive !) de T s'évalue en comptant les types positifs au-dessus des ensembles de paramètres : on ne considère, en somme, que les modèles positivement clos.

La théorie h-inductive T est dite (positivement) *modèle-complète* si tous ses modèles sont positivement clos ; cela signifie qu'à toute formule positive $\varphi(\underline{x})$ est associée une autre formule positive $\psi(\underline{x})$ dont T déclare qu'elle est la négation de $\varphi(\underline{x})$, soit encore que $\neg\, (\exists\, \underline{x})\, \varphi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{x})$ et que $(\forall\, \underline{x})\, \varphi(\underline{x}) \vee \psi(\underline{x})$. Tout homomorphisme entre modèles de T est alors un plongement élémentaire ; le cadre classique de la Théorie des modèles avec négation se ramène, modulo une expansion du langage (dite Morleyisation), à celui des théories h-inductives modèle-complètes. On notera que cette notion est plus exigeante que la modèle-complétude d'Abraham Robinson, qui demande seulement que la négation d'une formule existentielle soit équivalente à une formule existentielle.

Une classe plus vaste de théories h-inductives est celles des théories Hausdorff, dont les espaces de types sont séparés ; elles sont aussi caractérisées par le fait que les homomorphismes entre les modèles de la théorie h-inductive de leurs modèles positivement clos peuvent s'amalgamer, ou encore que les uplets qu'on en extrait ont une unique destinée : toutes leurs continuations dans des modèles positivement clos ont même type. D'après BEN-YAACOV 2003 & 2003bis, l'essentiel des manipulations shelahiennes d'indicernables en Théorie des modèles classique s'étend aux théories Hausdorff.

Remarques. (i) Dans une variété, Terminus est le seul modèle positivement clos ; tous les modèles libres ont même théorie h-universelle dans le langage £ , puisque L_1 est à la fois image homomorphe et sous-structure de chaque L_κ , et en conséquence, aucun L_κ , sauf peut-être L_1 , n'est modèle positivement clos de sa théorie h-inductive. Par exemple, dans le langage des groupes, tous les groupes ont même théorie h-universelle, dont Terminus est le seul modèle positivement clos. Si on veut obtenir des théories h-inductives intéressantes, exprimant des conditions négatives barrant l'autoroute de Terminus, il est par conséquent nécessaire d'étendre le langage.
(ii) Tout plongement naturel de L_n dans L_m est une immersion pour le langage £ ; considérons en effet $\underline{a}$ dans le premier et $\underline{b}$ dans le second ; $\underline{a}$ =

$\tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\alpha},\underline{\beta})$, où $\underline{\alpha}$ est la base de L_n et $\underline{\beta}$ le bout de l'extension ; si φ est une formule positive sans quanteurs satisfaite par $\underline{a}$^$\underline{b}$, $\varphi(\tau(\underline{x}),\theta(\underline{x},\underline{y}))$ est satisfaite partout, en particulier pour $\underline{x} = \underline{\alpha}$ et en prenant pour $\underline{y}$ n'importe quel uplet de points de L_n : si $(\exists\ \underline{y})\ \varphi(\underline{a},\underline{y})$ est vérifiée dans L_m , elle l'est aussi dans L_m . Le Théorème 5 déclare quelque chose de beaucoup plus fort !

Théorème 16. *Dans le langage* £(I) *,* L_κ *est un modèle positivement clos de sa théorie h-inductive.*

Démonstration. Supposons qu'un uplet $\underline{a}$ de L_κ ne satisfasse pas à une certaine formule positive $\varphi(\underline{x})$ de ce langage ; $\underline{a}$ est de la forme $\underline{a} = \tau(\underline{b})$ où τ est un uplet de termes et $\underline{b}$ est basique, si bien que la formule h-universelle $\neg(\exists\ \underline{y})\ I_n(\underline{y}) \wedge \varphi(\tau(\underline{y}))$ est satisfaite dans L_κ ; par conséquent la formule positive $(\exists\ \underline{y})\ I_n(\underline{y}) \wedge \underline{x} = \tau(\underline{y})$, à laquelle $\underline{a}$ satisfait, est contradictoire avec $\varphi(\underline{x})$ au sens de la théorie h-inductive de L_κ : aucune continuation de $\underline{a}$ ne peut satisfaire à $\varphi(\underline{x})$. **Fin**

Le £(I)-type positif de $\underline{a}$, c'est-à-dire l'ensemble des formules positives du langage £(I) auxquelles il satisfait (dans L_κ , ou dans n'importe quelle continuation de L_κ), est déterminé par la formule positive $(\exists\ \underline{y})\ I_n(\underline{y}) \wedge \underline{x} = \tau(\underline{y})$: si $\underline{a}'$ satisfait aussi à cette formule, $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ se correspondent par un automorphisme de L_κ . Cela ne signifie nullement que ce type soit isolé, car une formule définit un fermé dans l'espace des types, qui n'est ouvert que si elle possède une négation.

En résumé, nous associons aux L_κ deux théories : celle que nous appellerons désormais leur *théorie négative* $T^\neg$, qui est leur théorie complète dans le langage £ , et celle que nous appellerons leur *théorie positive* T^+ , qui est leur théorie h-inductive dans le langage £(I) , dont nous ne considérons principalement que les modèles positivement clos.

Nous avons semblablement deux sortes de types pour un uplet d'éléments de L_κ : son *type positif* dans le langage £(I) , qui le détermine à automorphisme près ; et son *type négatif,* qui est l'ensemble des formules du langage £ auxquelles il satisfait. C'est ainsi qu'un uplet (extrait de L_κ , ou d'une extension élémentaire de L_κ) est £-basique s'il a même type négatif que les uplets basiques de même longueur.

Le langage £(I) est naturellement adapté à la description des modèles libres ; son avantage est contrebalancé par les faibles chances qu'on a d'obtenir une théorie stable dans ce langage si on conserve la négation, d'où la tentation de passer à la Logique Positive : on espère que l'affaiblissement de la logique compensera l'augmentation du langage ! N'étant pas sûr que ce soit toujours le cas, je ne peux prétendre que la Logique Positive soit la panacée universelle pour le traitement des modèles libres ; je peux seulement offrir un résultat assurant, dans un cas particulier significatif, que la théorie positive est plus simple, ou du moins pas plus compliquée, que la théorie négative.

Pour l'énoncer, nous introduisons un affaiblissement de la saturation basique définie dans la section C : si les L_κ obéissent à cette définition pour les formules φ positives, nous dirons qu'ils sont *basiquement saturés positivement.*

Théorème 17. *Si les* L_κ *sont basiquement saturés positivement et si leur théorie négative est* λ*-stable, leur théorie positive l'est aussi.*

Démonstration. Nous introduisons la morleysation la morleysation T' de la théorie négative $T^\neg$, dans le langage £' comprenant un symbole atomique pour chaque formule de £ ; il s'agit d'une théorie h-inductive modèle-complète qui a les mêmes modèles que $T^\neg$, à interprétation près. Considérons une extension élémentaire M ω-saturée de L_κ , dans le langage £'(I) où chaque I_n est interprété par l'ensemble des n-uplets £-basiques de M ; la théorie h-inductive de M dans le langage £'(I) n'est qu'une simple morleysation infinie de T' (voir BEN-YAACOV & POIZAT 2007) : ces deux théories ont les même espaces de types et les mêmes modèles positivement ω-saturés ; elles sont stables dans les mêmes conditions. Il suffit alors de vérifier que, si nous restreignons le langage £'(I) au langage £(I) , nous conservons la stabilité en λ de la théorie h-universelle de M ; en effet, comme L_κ est basiquement positivement saturé, il satisfait aux mêmes énoncés h-universels que M dans le langage £(I) , et c'est même un modèle positivement clos de cette théorie. (Une remarque à l'intention des lecteurs novices en positivisme : la stabilité d'une théorie h-universelle, c'est la même chose que la stabilité de n'importe laquelle de ses compagnes, et en particulier de la théorie h-inductive de ses modèles positivement clos !)

En renouvelant nos notations, on considère donc une £'-structure M de h-universelle T' ; nous notons T sa théorie h-universelle réduite à un sous-langage £ de £' . Si cette dernière est instable en λ , on peut trouver, dans un de ses modèles positivement clos, un ensemble A de cardinal λ , et une suite de points a_i indexés par λ^+ , dont les types positifs sur A sont deux-à-deux contradictoires : si $i \neq j$, a_i satisfait à une £-formule positive $\varphi(x,\underline{a})$, et a_j satisfait à une £-formule positive $\psi(x,\underline{a})$, telles que les formules $\varphi(x,\underline{y})$ et $\psi(x,\underline{y})$ soient contradictoires, la théorie T comprenant l'axiome h-universel $\neg (\exists\, x,\underline{y})\ \varphi(x,\underline{y}) \wedge \psi(x,\underline{y})$, qui est donc aussi conséquence de T' . L'axiome h-universel affirmant l'inexistance d'un fragment fini de ce diagramme ne fait pas partie de T , et donc on trouve dans M une copie de ce fragment ; par compacité, on obtient l'instabilité de T' en λ . **Fin**

On pourrait aussi considérer des théories positives dans des langages plus étendus que £(I) , par exemple en Morleyisant £ , puisque le Théorème 5 reste valable si on ajoute au langage toutes les relations invariantes par les automorphismes de L_κ . Si nous nous restreignons au langage minimal $£(I)$, c'est pour maximiser nos chances d'obtenir une théorie (positivement) stable.

Remarquons enfin que si les modèles libres d'une variété sont les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive, ou même seulement si tout modèle de T^+ se continue dans un modèle libre, alors cette théorie est superstable, puisqu'il suffit dans ce cas de compter les types des points de L_λ au-dessus d'un plongement naturel de L_κ dans L_λ .

Exemple 6. (i) La variété est formée de toutes les structures dans le langage $£$ d'une fonction unaire $f(x)$; la théorie positive de L_κ exprime que f est une injection sans cycle, que I est le complément de l'image de f , et que I_2 interprète l'inégalité restreinte à I ; les I_n sont donc $£$-définissables. Ses modèles sont formés des L_κ augmentés d'un certain nombre d'orbites de type Z ; l'inégalité $x \neq y$ n'étant pas positivement définissable dans $£(I)$, rien de positif n'interdit d'identifier deux orbites de type Z ; en conséquence ses modèles positivement clos sont d'une part les L_k , et d'autre part les L_κ augmentés d'une seule orbite de type Z . Cette théorie n'est pas Hausdorff, car l'identification de deux orbites de type Z peut se faire de plusieurs manières.

(ii) Dans le langage $£'$ obtenu en ajoutant une constante 0 à $£$, l'équation $f(0) = 0$ définit une variété dont le modèle libre L'_κ s'obtient en ajoutant 0 à L_κ ; les L'_κ sont alors les seuls modèles positivement clos de leur théorie h-inductive dans le langage $£'(I)$, qui est Hausdorff, mais pas positivement modèle-complète car l'inégalité $x\neq y$ ne peut se définir positivement.

(iii) Dans le langage $£''$ obtenu en ajoutant une relation binaire $r(x,y)$ à $£$, on considère la variété définie par les équations $r(x,f^n(x))$, pour $n \geq 0$; son modèle libre L''_κ est obtenu en ordonnant par r les orbites de f sur L_κ , la relation d'équivalence $r(x,y) \vee r(y,x)$ définissant l'équivalence " x et y sont dans la même orbite". Dans le langage $£''(I)$ la théorie h-inductive de L''_κ est positivement modèle-complète, et équivalente à sa théorie négative dans le langage $£$. Par exemple, l'inégalité $x \neq y$ est définie positivement par la formule $r(f(x),y) \vee r(f(y),x) \vee [(\exists u,v)\ I_2(u,v) \wedge r(u,x) \wedge r(v,y)]$. Contrairement aux deux cas ci-dessus, on obtient cette fois-ci une théorie instable.

Exemple 7. Le langage comprend deux fonctions unaires f et g inverses (bilatères) l'une de l'autre ; les L_κ sont composés d'une infinité d'orbites de type Z ; tous les points sont basiques, et un uplet satisfait à I_n si et seulement si ses points sont dans des orbites différentes ; les L_κ ne forment pas une classe élémentaire, mais ce sont les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive, qui n'est pas Hausdorff. Il est impossible de définir positivement la négation de l'égalité, ni celle de I_2 .

Une bonne façon de traiter cet exemple est d'ajouter au langage la négation de l'égalité $x \neq y$; cela ne change ni les modèles, ni les ensembles de types, mais enrichit leurs topologies, qui deviennent Hausdorff ; on obtient alors une simple Morleyisation d'une théorie classique par adjonction d'un fermé, mais ce faisant on sort du cadre des variétés !

Exemple 8. Les groupes abéliens d'exposant six forment une variété, dans le langage d'une fonction binaire $x+y$ nommant la loi de groupe ; chacun se décompose comme produit d'un groupe d'exposant deux et d'un groupe d'exposant trois, qu'on peut considérer comme des espaces vectoriels sur les corps à deux et trois éléments. Le groupe libre L_κ est caractérisé par le fait que ces deux facteurs sont de cardinal κ ; le prédicat I est satisfait par ses éléments d'ordre six, et un n-uplet est basique si et seulement si ses carrés comme ses cubes sont linéairement indépendants. Comme $x \neq 0$ équivaut à $(\exists\, y)\ I(y) \wedge (x = y \vee x = 2.y \vee x = 3.y)$, les I_n s'interprètent positivement en fonction de la loi de groupe et de I . La théorie positive des L_κ est modèle-complète, et équivalente à leur théorie négative, mais les L_κ ne sont pas ses seuls modèles ; de plus, en jouant sur les codimensions de chacun des facteurs, on obtient des plongements non-naturels de L_κ dans L_κ .

Autre exemple du même genre : $£ = (+, 0, f(x))$; les équations déclarent que la structure est un groupe d'exposant 2 , et que f est un projecteur linéaire ; comme $x = x + f(x) + f(x)$, tout modèle est somme directe de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$; il est libre si et seulement si ces deux espaces ont même dimension.

Remarque. Pour décrire nos modèles libres, on pourrait modifier les règles de la Logique Positive en remplaçant les formules positives par les formules s-positives, et en ne considérant que les homomorphismes qui respectent ces dernières ; contrairement à la logique classique, cette variante ne pourrait s'obtenir par une simple morleyisation de la Logique Positive ordinaire, puisqu'on ne peut morleyiser directement les quanteurs universels (voir BEN-YAACOV & POIZAT 2007).

F. Groupes

On suppose dans cette section que le langage $£$ contient un symbole de constante pour noter l'élément neutre, un symbole de fonction unaire pour noter l'inverse, et un symbole de fonction binaire pour noter la loi de groupe, plus éventuellement d'autres symboles de relation, de constante ou de fonction ; une famille d'équations contenant celles qui affirment qu'on a affaire à un groupe définit ce que nous appelons une *variété de groupe.*

Soit A un ensemble libre, et A' un ensemble obtenu à partir de A en remplaçant certains des points de A par leurs inverses ; il est clair que A et A' engendrent la même structure, et que, d'après le Lemme 2, A' est libre. De même, si $\underline{a}$ est extrait de A et $\tau(\underline{x})$ est un terme, l'ensemble A' formé de $\underline{a}$ et des $\tau(\underline{a}).b$, où b parcourt A - $\{\underline{a}\}$, est libre et engendre la même structure.

On voit donc que, dans les groupes libres (infiniment engendrés) de la variété, le type basique est conservé par inversion et par translations : si jamais ces groupes sont stables, il s'agit de leur unique type générique !

On remarque aussi qu'une formule s-positive générique $\varphi(x,\underline{a})$ à paramètres $\underline{a}$ dans un quelconque modèle de leur théorie, supposée stable, est satisfaite par tout x . C'est une conséquence du Théorème 13, et de la définissabilité de la généricité.

Les groupes libres de nombreuses variétés dans le pur langage des groupes sont des objets classiques : groupes libres, groupes commutatifs libres, groupes n-nilpotents libres, groupes n-résolubles libres, groupes d'exposant p libres, groupes localement fini d'exposant p libres, etc.

Dans le langage £ = (0, 1, +, -, ×) , les anneaux commutatifs forment une classe équationnelle encore plus classique, à condition qu'on veuille bien considérer Terminus comme un anneau dégénéré, le seul à satisfaire à $0 = 1$; L_κ est l'anneau des polynômes en κ variables, à coefficients entiers.

Voici une réponse simple à une question naïve de POIZAT 2014 :

Lemme 18. *Les groupes libres (dans la variété de tous les groupes) ne sont pas les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive ; en fait, ils ne sont pas positivement* ω*-saturés.*

Démonstration. Dans un groupe libre, $x \neq 1$ ne peut commuter qu'avec au plus deux points basiques y et y^{-1} , et il est alors de la forme $x = y^n$. Considérons une suite arbitraire n(p) de restes modulo p , pour chaque nombre premier p ; l'ensemble des formules $(\exists\, y, z)\ \ I(y) \wedge x.y = y.x \wedge z.y = y.z \wedge x = y^{n(p)}.z^p$ est consistant ; cependant, si les n(p) ne sont pas finalement constants, il n'est réalisé dans aucun groupe libre. **Fin**

Remarque. Il est montré dans SKLINOS 2011 que, dans un groupe libre L_κ infiniment engendré, une formule $\varphi(x,\underline{a})$ à paramètres dans L_κ qui n'est satisfaite que par des points basiques ne peut contenir de point générique sur $\underline{a}$, si bien que le type générique n'est pas isolé ; les points basiques de L_n sont définis par une formule, et même une formule positive, à paramètres dans L_n , ce qui implique bien sûr que ces paramètres les font tous dévier.

G. Indépendance

Nous nous plaçons de nouveau dans une variété non-dégénérée de langage quelconque, et nous travaillons dans ses modèles libres infiniment engendrés.

Nous dirons que les uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$, extraits de L_κ, sont *I-indépendants* s'il existe $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}$ basique et des multitermes τ et θ tels que $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$.

Lemme 19. *Si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont basiques, ils sont I-indépendants si et seulement si* $\underline{a}$^$\underline{b}$ *est basique.*

Démonstration. Si $\underline{a}$^$\underline{b}$ est basique, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont I-indépendants par définition. Réciproquement, supposons que $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$ avec $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}$ basique ; en itérant le Lemme 6, on trouve $\underline{\beta}'$ de même longueur que $\underline{\beta}$ tel que $\underline{a}$^$\underline{\beta}'$ et $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}'$ soient basiques ; comme il existe un automorphisme envoyant $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}$ sur $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}'$, lequel fixe $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$, $\underline{a}$^$\underline{\beta}$ est aussi basique ; pour conclure, il ne reste qu'à oublier $\underline{\alpha}$ et à regarder de l'autre côté. **Fin**

On remarque que, par définition, si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont I-indépendants, $\tau(\underline{x})$ et $\theta(\underline{y})$ le sont aussi.

Lemme 20. *(i) Quels que soient* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$*, il existe* $\underline{b}'$ *de même type positif que* $\underline{b}$ *tel que* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}'$ *soient I-indépendants.*
(ii) Si $\underline{a}$ *et* $\underline{a}'$ *ont même type positif, ainsi que* $\underline{b}$ *et* $\underline{b}'$*, et si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont I-indépendants, ainsi que* $\underline{a}'$ et $\underline{b}'$*, alors* $\underline{a}$^$\underline{b}$ *et* $\underline{a}'$^$\underline{b}'$ *ont même type positif.*

Démonstration. (i) On peut écrire $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$ où $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont basiques ; on choisit $\underline{\beta}'$ tel que $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}'$ soit basique et on pose $\underline{b}' = \theta(\underline{\beta}')$.
(ii) On peut écrire $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$, ainsi que $\underline{a}' = \tau'(\underline{\alpha}')$ et $\underline{b}' = \theta'(\underline{\beta}')$, où $\underline{\alpha}$^$\underline{\beta}$ et $\underline{\alpha}'$^$\underline{\beta}'$ sont basiques. Comme $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ ont même type, on peut trouver $\underline{\alpha}_1$ basique tel que $\underline{a} = \tau'(\underline{\alpha}_1)$; $\underline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}_1$ s'expriment comme des multitermes en fonction d'un troisième uplet basique $\underline{\gamma}$. De même, on peut trouver $\underline{\beta}_1$ basique tel que $\underline{b} = \theta'(\underline{\beta}_1)$, $\underline{\beta}$ et $\underline{\beta}_1$ s'expriment en fonction d'un autre uplet basique $\underline{\delta}$. On peut alors déplacer $\underline{b}$ en $\underline{b}''$ par automorphisme, de sorte que $\underline{\gamma}$^$\underline{\delta}$ soit basique ; d'après le Lemme 19, $\underline{a}$^$\underline{b}''$ a même type que $\underline{a}$^$\underline{b}$ et que $\underline{a}'$^$\underline{b}'$. **Fin**

Ce dernier lemme affirme non seulement la stationnarité de la I-indépendance, mais aussi le fait que cette notion ne dépend pas des multitermes $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$ choisis.

On en déduit que la I-indépendance est associative et commutative : si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont I-indépendants ainsi que $\underline{a}$^$\underline{b}$ et $\underline{c}$, il en est de même de $\underline{b}$ et $\underline{c}$ et de $\underline{b}$^$\underline{c}$ et $\underline{a}$; en effet, cela signifie que $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{c}$ s'expriment comme multitermes en fonction de uplets basiques et indépendants. Cela permet de définir la I-indépendance pour un ensemble fini, et même un ensemble quelconque, de uplets.

Lemme 21. *Si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont I-indépendants, toute formule s-positive du langage* £ *satisfaite par* $\underline{a}$^$\underline{b}$ *est impliqué par une formule positive satisfaite par* $\underline{a}$ *et une formule positive satisfaite par* $\underline{b}$.

Démonstration. On peut écrire $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$, $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$, où $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\beta}$ est basique. Si $\varphi(\underline{a},\underline{b})$ est vraie, où φ est s-positive, $\varphi(\tau(\underline{x}),\theta(\underline{y}))$ est inévitable d'après le Lemme 11. **Fin**

L'Exemple 5 montre qu'il est possible que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ soient libres et indépendants sans que $\underline{a}\hat{}\underline{b}$ soit libre.

Théorème 22. *Si la théorie positive T^+ de L_κ est stable, deux uplets extraits de ce dernier sont I-indépendants si et seulement s'ils sont indépendants sur $\varnothing$ au sens de T^+ .*

Démonstration. Les axiomes $(\forall\ \underline{x}, \underline{y})\ (\exists\ z)\ \ I_n(\underline{x})\wedge I_n(\underline{y}) \Rightarrow I_{n+1}(\underline{x},z)\wedge I_{n+1}(\underline{y},z)$ font partie de T^+ , si bien que, dans tous les modèles positivement clos de cette dernière, deux suites dont tous les n-uplets satisfont à I_n ont le même type moyen ; cela implique que ce type moyen est basé sur $\varnothing$: autrement dit, deux uplets basiques sont indépendants au sens de T^+ si et seulement si leur concaténé est basique. L'indépendance dans L_κ implique donc l'indépendance au sens de T^+ ; réciproquement, si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ extraits de L_κ sont indépendants au sens de T^+ , on peut trouver dans une continuation de L_κ un uplet $\underline{x}\hat{}\underline{y}$ basique tel que $\underline{a} = \tau(\underline{x})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{y})$; comme L_κ est positivement clos, on peut aussi en trouver un dans ce dernier. **Fin**

Le même résultat vaut bien sûr pour la théorie négative des L_κ dans le langage £(I) , quand elle est stable, ce qui se produit peu souvent. Plus fréquent est la cas d'une théorie négative stable $T^\neg$ dans le langage £ originel ; dans tous les exemples que je connais, la I-indépendance est l'indépendance sur $\varnothing$ au sens de $T^\neg$, mais je ne peux montrer cette identité que dans des cas particuliers.

Théorème 23. *Dans une variété de groupe, si la théorie négative $T^\neg$ de L_κ est stable, deux uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ I-indépendants extraits de ce dernier sont indépendants sur $\varnothing$ au sens de $T^\neg$; réciproquement, si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont indépendants au sens de $T^\neg$, ont peut trouver $\underline{b}'$ tel que $\underline{a}$ et $\underline{b}'$ soient I-indépendants et que $\underline{a}\hat{}\underline{b}$ et $\underline{a}\hat{}\underline{b}'$ aient même £-type.*

Démonstration. Comme le groupe L_κ est connexe et que son type basique est son unique type générique, il est basé sur $\varnothing$; par conséquent, dans les modèles de $T^\neg$, deux uplets £-basiques sont indépendants si et seulement si leur concaténé est £-basique. **Fin**

On voit que les deux conditions nous permettant d'identifier, en cas de stabilité de la théorie, la I-indépendance et l'indépendance sur $\varnothing$ sont dans un sens l'extension du Lemme de Prolongement et dans l'autre l' ω-homogénéité !

Si jamais on trouve un exemple où la suite basique n'est pas basée sur $\varnothing$, on pourra toujours faire intervenir son paramètre canonique ; il sera intéressant de savoir si cet être imaginaire à une interprétation en termes algébriques.

H. Déviation

Nous avons jusqu'à présent défini l'indépendance au-dessus du vide ; pour avoir une notion de déviation générale, il nous faudrait définir l'indépendance au-dessus d'un ensemble quelconque de paramètres, ou au moins au-dessus d'un ensemble fini, c'est-à-dire donner un sens à l'expression " $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont I-indépendants au-dessus de $\underline{c}$ ".

C'est facile quand $\underline{c}$ est un n-uplet basique $\underline{\gamma}$; en effet, le modèle L_κ devient alors le modèle libre d'une variété obtenue en ajoutant ce n-uplet au langage, pour lequel on obtient la nouvelle notion de basicité suivante : $\underline{\alpha}$ est basique au-dessus de $\underline{\gamma}$ si $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\gamma}$ est basique. Autrement dit $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont *I-indépendants au-dessus de* $\underline{\gamma}$ si on peut trouver $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ tels que $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\beta}\hat{}\underline{\gamma}$ soit basique, que $\underline{a}$ s'exprime comme un multiterme en $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\gamma}$ et que $\underline{b}$ s'exprime comme un multiterme en $\underline{\beta}\hat{}\underline{\gamma}$.

Pour faire entrer dans ce nouveau cadre l'indépendance définie dans la section précédente, il suffit de considérer l'ensemble vide comme un 0-uplet basique ; le lemme suivant est bien valable quand $\underline{\gamma} = \varnothing$!

Lemme 24. *Supposons que* $\underline{\gamma}$ *et* $\underline{\delta}$ *soient basiques, que* $\underline{\gamma} = \tau(\underline{\delta})$ *et que* $\underline{a}$, $\underline{b}$ *et* $\underline{\delta}$ *soient I-indépendants au-dessus de* $\underline{\gamma}$ *; alors* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont I-indépendants au-dessus de* $\underline{\delta}$ *.*

Démonstration. On peut donc trouver $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\beta}\hat{}\underline{\delta}'$ basique au-dessus de $\underline{\gamma}$ et des multitermes exprimant $\underline{a}$ en fonction de $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\gamma}$, $\underline{b}$ en fonction de $\underline{\beta}\hat{}\underline{\gamma}$ et $\underline{\delta}$ en fonction de $\underline{\delta}'\hat{}\underline{\gamma}$; comme $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\beta}\hat{}\underline{\delta}'\hat{}\underline{\gamma}$ est basique, $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\beta}\hat{}\underline{\delta}$ est basique d'après le Lemme 11, et, comme $\underline{\gamma} = \tau(\underline{\delta})$, $\underline{a}$ s'exprime comme un multiterme en $\underline{\alpha}\hat{}\underline{\delta}$ et $\underline{b}$ s'exprime comme un multiterme en $\underline{\beta}\hat{}\underline{\delta}$. **Fin**

Nous ne définissons l'indépendance qu'au-dessus des bons plongements (voir le Theorem 1 de PERIN & SKLINOS 2013, dont la difficulté vient de ce qu'il est valable dans les groupes libres finiment engendrés). Dans bien des cas, il y a en évidence une notion de I-indépendance au-dessus d'un uplet quelconque de paramètres ; cependant, certains de nos exemples donnent l'impression qu'il n'y a pas moyen de définir une telle notion en toute généralité.

Remarque. En cas de stabilité, le type limite de la suite libre et génératrice est basé sur n'importe lequel de ses fragments dénombrable, si bien que la I-indépendance au-dessus de L_ω implique l'indépendance au-dessus de L_ω ; mais si L_ω est bien plongé dans L_κ , même si le bout du plongement est infini, il n'est pas clair que deux uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ extraits de ce dernier et indépendants sur L_ω soient I -indépendants sur L_ω (l'Exemple 8 donne facilement des contre-exemples avec des bouts finis) ; en effet, si $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha})$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta})$, où $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont basiques sur L_ω , on peut trouver quelque part $\underline{\alpha}'\hat{}\underline{\beta}'$ basiques au-dessus de L_ω tels que $\underline{a} = \tau(\underline{\alpha}')$ et $\underline{b} = \theta(\underline{\beta}')$, mais il n'est pas clair qu'on puisse les trouver dans L_κ ; comme dans le Théorème 23, il est seulement assuré qu'on y trouve $\underline{b}'$ de même type que $\underline{b}$ sur L_ω , I-indépendant de $\underline{a}$ sur L_ω , tel que $\underline{a}\hat{}\underline{b}$ et $\underline{a}\hat{}\underline{b}'$ aient même type sur L_ω .

I. Variétés localement finies

On dit qu'une variété est *localement finie* si chacun des L_n est fini. Comme nous avons supposé la variété non-dégénérée, L_{n+1} a alors strictement plus d'éléments que L_n ; pour un n-uplet d'éléments de L_n , être libre, ou être générateur de L_n sont des propriétés équivalentes, et la liberté est £-définissable. Dans ce cas le Lemme 2 s'exprime ainsi : si les n-uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ engendrent la même sous-structure, et si $\underline{a}$ est basique, $\underline{b}$ l'est aussi.

Nous dirons que la variété est *à génération bornée* si à chaque entier n est associé un entier $\gamma(n)$ tel que chaque n-uplet $\underline{b}$ extrait de L_κ soit de la forme $\underline{b} = \tau(\underline{a})$, où $\underline{a}$ est basique et de longueur inférieure à $\gamma(n)$.

Théorème 25. *La théorie négative des* L_κ *est* ω*-catégorique si et seulement si la variété est localement finie et à génération bornée ; dans ce cas, leur théorie positive est modèle-complète et équivalente, à interprétation près, à leur théorie négative.*

Démonstration. Si la variété est localement finie à génération bornée, le groupe des automorphismes de L_κ n'a qu'un nombre fini d'orbites de n-uplets, ce qui implique que sa théorie est ω-catégorique (on peut dans ce cas se restreindre à un langage dénombrable).

Supposons réciproquement que L_ω soit le seul modèle dénombrable de sa théorie négative ; il est alors ω-homogène, si bien que chacun des I_n est définissable par une formule du langage £ . La ω-catégoricité implique la locale finitude, et comme il n'y a qu'un nombre fini de types de n-uplets, chacun devant satisfaire une formule $\underline{x} = \tau(\underline{y}) \wedge I_m(\underline{y})$, elle borne la génération. Comme chaque formule du langage £ est disjonction d'un nombre fini de formules $(\exists\, \underline{y})\ \underline{x} = \tau(\underline{y}) \wedge I_m(\underline{y})$, qui sont positives dans £(I) , la théorie positive est modèle-complète, et équivalente à la théorie négative. **Fin**

Les modules sur un anneau R forment une variété dans le langage qui comprend un symbole de fonction binaire pour noter l'addition et un symbole de fonction unaire pour chaque scalaire de l'anneau.

Corollaire 26. *Les modules libres infiniment engendrés sur un anneau fini sont* ω*-catégoriques.*

Démonstration. Ils sont de toute évidence localement finis. D'après le Lemme 2, si $b_1, \ldots b_n, b_{n+1}$ est basique, il en est de même de $b_1, \ldots b_n, b_n + b_{n+1}$. Si un n-uplet est combinaison linéaire d'un uplet basique de longueur supérieure à k^n, où k est le nombre d'éléments de l'anneau, il y a nécessairement deux colonnes identiques dans la matrice de ses coordonnées, et on obtient une expression plus courte ; la génération est donc bornée. **Fin**

Exemple 9. Le langage comprend une fonction binaire $x+y$, et la variété est définie par les équations $x+x = x$, $x+y = y+x$, $(x+y)+z = x+(y+z)$; tous les termes en n variables $\underline{x} = (x_1, \ldots x_n)$ sont égaux à $x_1 + \ldots + x_n$. La formule $x+y = x$ définit un ordre partiel $x \geq y$, qui est un demi-treillis, dans lequel $x+y$ est la borne supérieure de x et de y ; réciproquement, n'importe quel demi-treillis correspond à un membre de la variété. Si X est libre, la structure qu'il engendre est celle de ses parties finies non-vides structurées par la réunion. Dans L_κ, I est l'ensemble des éléments minimaux : c'est l'unique sous-ensemble libre engendrant L_κ ; les I_n interprètent l'inégalité restreinte à I ; les négations des I_n sont positivement définissables dans le langage $£(I)$; par exemple $\neg I(x)$ signifie que $(\exists\, y, z)\ I_2(y,z) \wedge x+y+z = x$. Comme L_κ a des chaînes infinies pour l'ordre $x \geq y$, il devient une structure instable à condition qu'on ajoute l'inégalité $x \neq y$ au langage ; mais cette dernière n'est pas positivement définissable à partir de $+$ et des I_n. Remarquons aussi que si on ajoute l'incomparabilité au langage, la suite basique n'est plus uniformément insécable, ce qui donne la propriété d'indépendance (voir le Lemme 15).

Dans un modèle M de la théorie positive T^+ des L_κ l'ensemble I est infini et engendre une sous-structure A isomorphe à un L_λ ; si nous notons B le complément de A dans M, aucun point de A n'est de la forme $a = b+y$ avec b dans B : en effet, T^+ contient des axiomes comme $(\forall\, x, y, u, v)\ \ I_2(x,y) \wedge x+y = u+v \Rightarrow u = x \vee u = y \vee u = x+y$. Par conséquent B, s'il n'est pas vide, peut être contracté par homomorphisme sur un seul point, qui devient absorbant pour $+$, c'est-à-dire maximal pour l'ordre ; par compacité, on voit qu'on obtient bien ainsi un modèle de la théorie h-universelle de L_κ. Il n'y a donc que deux sortes de modèles positivement clos pour T^+, les L_κ et les L_κ augmentés d'un maximum 1 ; T^+ est une théorie Hausdorff positivement superstable (tous ses 1-types sont de rang de Lascar fini, qui est égal à leur rang de Morley, sauf pour le type de 1 dont le rang de Lascar vaut 0 et le rang de Morley ω).

Si on ajoute le maximum au langage, et l'équation $1+x = 1$, on obtient un exemple du même genre où les L_κ sont les seuls modèles positivement clos de leur théorie h-inductive.

Si α_1 , ... α_s sont basiques dans L_κ , on obtient une projection homomorphe de L_κ dans L_κ en les envoyant sur leur borne supérieure, qui devient alors basique ; d'après le Corollaire 11bis, on en conclut que, si x_1 , ... x_n n'ont deux-à-deux pas de minorants communs, c'est-à-dire sont libres, le uplet $\underline{x}$ ne satisfait qu'aux formules s-positives inévitables du langage £ : L_κ n'est donc pas positivement ω-homogène dans le langage £ . Par contre, si on autorise la négation, la I-structure de L_κ est définissable dans £ , si bien que les modèles libres sont ω-homogènes dans le langage £ .

Pour l'indépendance au-dessus de c , la candidate est l'indépendance au-dessus de l'ensemble fini des points basiques qui minorent c .

Exemple 10. Dans le langage des anneaux, on considère la variété des anneaux de Boole, définie par l'équation $x^2 = x$; ils sont commutatifs de caractéristique deux, et on peut aussi les considérer dans le langage des algèbres de Boole. L'anneau libre fini L_n est l'unique anneau de Boole ayant $2\wedge 2^n$ éléments ; il a 2^n atomes. Les anneaux de Boole libres infinis sont sans atomes ; leur théorie négative est ω-catégorique et élimine les quantificateurs, si bien que L_ω est l'unique anneau de Boole dénombrable sans atomes ; comme il est ω-homogène, deux n-uplets satisfaisant aux mêmes formules atomiques du langage £ sont isomorphes ; en particulier un n-uplet est basique dès qu'il est libre. D'après le Théorème 25, la théorie T^+ est modèle-complète, équivalente à la théorie négative, et ses modèles sont tout simplement les anneaux de Boole sans atomes, où les I_n sont interprétés par la liberté.

Nous remarquons que L_κ n'est jamais ω_1-homogène ; en effet, si s = $(b_0, b_1, \dots b_n, \dots)$ est le début d'une suite libre et génératrice de ce dernier, la suite $s' = (b_0.b_1, b_0.b_2, \dots b_0.b_n,\dots)$ est également libre, et a donc même type que s ; cependant s et s' ne sont pas isomorphes, car s n'a pas de majorant $\neq 1$.

Il existe donc des automorphismes de L_ω qui envoient b_0 sur $b_0.b_1$, mais aucun automorphisme σ d'un anneau de Boole fini B les contenant n'a cette propriété : en effet, il n'est pas possible que $a > \sigma(a)$ puisque a et $\sigma(a)$ majorent le même nombre d'atomes de B . On voit aussi qu'il existe des plongements élémentaires pour le langage £(I) de L_ω dans L_κ , et aussi de L_κ dans L_λ si $\kappa \leq \lambda$, qui ne sont pas naturels.

Deux uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont I-indépendants si aucun atome de l'anneau engendré par l'un n'est disjoint d'un atome de l'anneau engendré par l'autre ; cela signifie encore que l'anneau engendré par $\underline{a}\wedge\underline{b}$ est le produit libre de celui engendré par $\underline{a}$ et de celui engendré par $\underline{b}$; on peut définir ainsi l'indépendance au dessus-de $\underline{c}$: l'anneau engendré par $\underline{a}\wedge\underline{b}\wedge\underline{c}$ est le produit de celui engendré par $\underline{a}\wedge\underline{c}$ et de celui engendré par $\underline{b}\wedge\underline{c}$ amalgamé au-dessus de $\underline{c}$; il n'est d'ailleurs pas nécessaire que $\underline{c}$ soit fini. Cette notion d'indépendance fait sens dans tout anneau de Boole sans atomes, tout type ayant une unique extension non-déviante, mais il n'est pas possible, bien sûr, de borner les bases des types.

Exemple 11. On considère la variété des groupes d'exposant 4 et à carrés centraux, définis par les équations $x^4 = 1$ et $x^2.y = y.x^2$. Puisqu'un groupe d'exposant 2 est commutatif, les commutateurs doivent être produits de carrés, et en effet $[x,y] = x^{-1}.y^{-1}.x.y = x^{-2}.(x.y^{-2}.x^{-1}).(xy)^2$; ces groupes sont donc nilpotents de classe deux. Dans un groupe libre L_κ , tout point est produit de puissances d'éléments d'une suite libre génératrice et de commutateurs ; le centre C est donc formé des involutions, qui sont aussi les produits de carrés (en nombre non bornable) ; les points basiques sont les éléments d'ordre 4 , et un uplet est basique si et seulement s'il est linéairement indépendant dans L_κ/C (les I_n sont donc définissables dans £) : pour le voir, il suffit de montrer que, si $x, y_1, \dots y_n$ est basique, il en est de même de $x', y_1, \dots y_n$ où $x' = x.\tau(x,\underline{y})^2$; or $\tau(x,\underline{y})^2 = \tau(x',y)^2$ puisque les carrés sont centraux, si bien que $(x,\underline{y})$ et $(x',\underline{y})$ engendrent le même sous-groupe (Lemme 2). Les négations de I et des I_n sont positivement définissables dans le langage £(I) , mais pas l'inégalité $x \neq y$.

Les modèles de la théorie négative $T^\neg$ des L_κ sont formés des produits de ces derniers par un groupe central d'exposant 2 . C'est une théorie bidimensionelle de rang de Morley $\omega+1$, et les L_κ sont précisément ses modèles qui omettent le générique du centre (celui qui n'est pas somme d'un nombre fini de carrés), qui est de rang ω . Par contre les L_κ sont les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive, qui n'est pas Hausdorff : en effet, le choix du facteur direct des produits de carrés dans le centre est un obstacle à l'amalgamation.

Considérons une paire basique (a,b) ainsi qu'un point c satisfaisant à $(\exists\, y)\, [a,b] = [c,y]$; c est congru modulo C à a , b ou $a.b$; comme L_κ omet le générique de son centre, le type de c sur (a,b) dévie toujours sur $[a,b]$!

Une variété apparentée est celle des groupes 2-nilpotents d'exposant p , où p est un nombre premier $\neq 2$; ses modèles libres peuvent être autosuffisamment plongés dans les groupes de BAUDISCH 1996, qui sont de rang de Morley deux : ils en représentent en quelque sorte l'ossature générique.

I. Algèbres unaires

Nous parlons ici de variétés dans un langage £ dont toutes les fonctions sont unaires ; nous commençons par les algèbres nullaires, où le langage n'a pas de fonctions du tout.

Nous considérons même, dans un premier temps, une variété dans un langage purement relationnel. Tous les points de L_κ sont alors basiques, ainsi que tous ses uplets injectifs ; comme tous ces n-uplets injectifs satisfont aux mêmes formules atomiques, la structure de L_κ s'interprète en termes d'égalité, si bien que L_κ n'est rien d'autre qu'un ensemble nu de cardinal κ . Cela conforte notre impression que les relations ne sont que des bibelots.

Mais ces bibelots peuvent se révéler encombrants dès qu'il y a des constantes, car il peuvent alors servir à définir, par les équations idoines, n'importe quelle structure sur ces constantes.

Exemple 12. Le langage £ comprend un symbole binaire $r(x,y)$ et un ensemble C de constantes c_{ni} pour $i \leq n$; les équations sont $r(c_{ni},c_{nj})$. Les modèles libres sont formés de κ points basiques posés à côté de C ; ce sont les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive, qui affirme que les points de C restent distincts, que l'interprétation de r sur C se réduit aux équations ci-dessus, et que $\neg (\exists\, x, y)\ I(x) \wedge (r(x,y) \vee r(y,x))$. La formule négative $(\forall\, z)\ r(x,z) \Leftrightarrow r(y,z)$ définit une relation d'équivalence $e(x,y)$, qui coïncide avec r sur C ; I en est une classe infinie, définie sur $\emptyset$ par $\neg\, r(x,x)$; la théorie négative est celle d'une relation d'équivalence ayant, pour chaque n , une unique classe à n éléments, avec une classe infinie distinguée ; le type basique n'est pas son type générique, qui est de rang de Morley deux. Cet exemple manifeste une plus grande adéquation de la théorie positive au contexte des modèles libres : alors que la théorie négative se perd dans des considérations superfétatoires, la théorie positive se contente de décrire un ensemble nu ! On observe également que si on oublie r et ne conserve que e , on obtient un modèle d'Ehrenfeucht dont la suite génératrice n'est pas indépendante sur $\emptyset$.

Cependant, ce n'est pas en introduisant seulement des constantes et des relations que nous pouvons obtenir des contre-exemples intéressants, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 27. *Considérons une variété dans un langage £ ne comprenant que des constantes et des relations ; alors :*
(i) Toute permutation d'un modèle de la théorie négative des L_κ *qui en fixe les points non-£-basiques en est un automorphisme.*
(ii) Toute permutation d'un modèle de la théorie positive des L_κ *qui en fixe les points non-basiques en est un automorphisme.*

Démonstration. (i) Si φ est une formule atomique, la formule suivante : $(\forall\ \underline{y})\ [\ \varphi(x,\underline{y})\ \Rightarrow\ x = y_1 \vee ... \vee x = y_n \vee (\forall\ t)\ \varphi(t,\underline{y})\ ]$ est satisfaite par chaque point basique x de L_κ ; en effet, si x est disjoint de $\underline{y}$, ce dernier est de la forme $\underline{z}$^$\underline{c}$ où $\underline{c}$ est constant et x^$\underline{z}$ basique ; par conséquent, cette formule fait partie du type £-basique.

Considérons alors, dans un quelconque modèle M de $T^{\neg}$, deux points £-basiques distincts a et a' satisfaisant une formule atomique $\varphi(a,a',\underline{b})$, où $\underline{b}$ est disjoint de a comme de a' ; $\varphi(a,v,\underline{b})$ est donc satisfaite par tout v , et $\varphi(u,v,\underline{b})$ l'est par tout (u,v) , sauf peut-être si $v = a \vee v = b_1 \vee ... \vee v = b_n$; de même, $\varphi(u,v,\underline{b})$ est vérifiée par tout (u,v) , sauf peut-être si $u = a' \vee u = b_1 \vee ... \vee u = b_n$; il n'y donc qu'un seul couple (u,v) , $u \neq v$, disjoint de $\underline{b}$, qui reste candidat à ne pas satisfaire $\varphi(u,v,\underline{b})$, à savoir le couple (a',a) ; mais la théorie $T^{\neg}$ déclare que, s'il en est ainsi, tous les couples (u,v) satisfont $\varphi(u,v,\underline{b})$!

En conséquence, toute transposition de deux points basiques est un automorphisme de M , d'où la conclusion.

(ii) Si $\varphi(\underline{x},\underline{y})$ est une formule atomique du langage £ (et même du langage £(I) !), l'énoncé suivant fait partie de la théorie h-inductive des L_κ :

$(\forall\ \underline{x}, \underline{x}', \underline{y})\ [\ I_m(\underline{x}) \wedge I_m(\underline{x}') \wedge \varphi(\underline{x},\underline{y})\ \Rightarrow\ \varphi(\underline{x}',\underline{y}) \vee I(y_1) ... \vee I(y_n)\ ]$. **Fin**

Passons maintenant au cas des variétés dans un langage £ comportant des constantes, des fonctions unaires et des relations ; nous appellerons constantes non seulement les éléments de L_κ nommés par une constante du langage, mais aussi ceux qui sont la valeur d'un terme constant, satisfaisant à l'équation $\tau(x) = \tau(y)$. S'il n'y a ni relations ni constantes, les modèles libres correspondent aux actions libres du monoïde des termes du langage ; si ce monoïde est fini, on a alors affaire à une structure totalement catégorique, mais en général la théorie des modèles de ce genre d'objets peut être assez compliquée (voir MUSTAFIN-POIZAT 1995). Considérons par exemple le langage £ constitué de fonctions unaires f , g , h_n , k_{mn} pour $m > n$, et la variété définie par les équations $f(k_{mn}(x)) = h_m(x)$ et $g(k_{mn}(x)) = h_n(x)$; si b est basique dans un modèle libre, l'ensemble des $h_n(b)$ est ordonné par la formule $(\exists\ z)\ x = f(z) \wedge y = g(z)$, si bien que cette structure est instable ; cela est vrai même en Logique positive, car les formules $(\exists\ z)\ x = f(z) \wedge y = g(z)$ et $(\exists\ z)\ x = g(z) \wedge y = f(z)$ sont contradictoires.

Considérons deux systèmes libres B et B' engendrant L_κ ; tout point b' de B' s'exprime comme un terme $b' = \tau(b)$ en fonction d'un point de B , qui est unique puisque b' n'est pas constant ; de même b est de la forme $b = \theta(b'')$ avec b'' dans b' , et comme $\tau(\theta(b'')) = b'$, il faut que $b'' = b'$ et que θ et τ soient inverses (bilatères !) l'un de l'autre. Autrement dit, si Γ désigne le groupe des termes inversibles, un ensemble libre et générateur choisit exactement un point de chaque orbite de l'action de Γ sur les points basiques ; si b est basique, $\tau(b)$ n'est basique que si le terme τ est inversible ; en fait, les points basiques de L_κ sont ceux qui ne sont de la forme $\tau(y)$ que pour les termes τ inversibles. Si b est basique $\tau(b)$ est £-basique, b satisfait $(\exists\, y)\ b = \tau(y)$, pour un y qui ne peut être que de la forme $y = \theta(b)$; on voit donc que τ est inversible à gauche, et que, si le monoïde des termes est commutatif, les points £-basiques sont les mêmes que les points basiques.

Si le langage £ ne comprend que des constantes, des relations et des fonctions unaires, la génération d'un n-uplet est bornée par n, et toute suite basique de L_κ est uniformément insécable, si bien qu'elle a un type moyen définissable sur n'importe quelle extension élémentaire de L_κ ; en effet, si $\underline{y}$ est de longueur n, et si la formule $\varphi(x,\underline{a})$ est satisfaite par au moins $n+1$ points de cette suite, elle est satisfaite par tous sauf au plus n ; si φ est s-positive, cela ne se produit que si $(\forall\, t)\ \varphi(t,\underline{a})$ est vérifiée, mais il n'est pas clair pour autant que le type limite commun à toutes les suites basiques soit définissable sans paramètres.

Nous regrettons amèrement d'ignorer si le résultat suivant reste vrai ou non quand il y a une infinité de constantes, ou bien des relations d'arité supérieure à un.

Théorème 28. *Si le langage ne comprend que des relations unaires et des fonctions unaires, s'il n'y a pas de constantes et si la théorie négative des* L_κ *est stable, la* I-*indépendance est la même chose que l'indépendance sur* $\emptyset$ *au sens de* $T^\neg$.

Démonstration. Nous appelons chemin une suite de points x_0 , x_1 , ... x_n pris dans un modèle de $T^\neg$, tels que, pour chaque $i < n$, x_{i+1} s'exprime comme un terme en x_i ou bien x_i s'exprime comme un terme en x_{i+1} . Deux points liés par un chemin sont dits dans le même bloc.

On remarque que les blocs sont conservés par extension élémentaire, et que, si $\varphi(x)$ est une formule satisfaite par un point non-constant de L_κ , dans chacun des modèles de $T^\neg$ il y a une infinité de blocs qui en contiennent une réalisation. Considérons deux uplets $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sans points constants extraits d'un modèle ω-saturé de $T^\neg$ tels que : $\underline{a} = \underline{a}_1 \hat{}\ldots \hat{}\ \underline{a}_n$ et $b = \underline{b}_1 \hat{}\ldots \hat{}\underline{b}_n$; pour chaque i , $\underline{a}_i$ et $\underline{b}_i$ ont même type (négatif), et les points de $\underline{a}_i$ sont dans un même bloc ; si $i \neq j$, le bloc de $\underline{a}_i$ n'est pas celui de $\underline{a}_j$, et le bloc de $\underline{b}_i$ n'est pas celui de $\underline{b}_j$. On montre alors, par va-et-vient infini, que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ont même type.

Considérant un type $tp(\underline{a}/\emptyset)$, on en obtient donc une extension complète sur un quelconque modèle de $T^\neg$ en disjoignant $\underline{a}$ des blocs des points de ce modèle : ce type est l'unique fils de $tp(\underline{a}/\emptyset)$ qui omette toutes les formules du genre $(\exists\, \underline{z})\ \ x = \tau_1(z_1) \wedge \theta_1(z_1) = \tau_2(z_2) \wedge \ldots \wedge \theta_n(z_n) = y$. Si $T^\neg$ est stable, d'après le Théorème de la Borne de LASCAR & POIZAT 1979, c'est l'unique extension non-déviante de $tp(\underline{a}/\emptyset)$. Autrement dit, deux uplets d'éléments de

L_κ sont indépendants sur $\varnothing$ si et seulement s'ils n'ont pas de blocs en commun : c'est exactement ce que déclare la I-indépendance. **Fin**

Revenons maintenant à l'Exemple 3. On remarque que la théorie positive des modèles libres, et encore plus leur théorie négative, déclare que $\neg (\exists x)\, g(x) = g'(x)$, où g et g' sont des termes en g_1 , ... g_n différents. Nous dirons qu'un point x est un saut si $g_n(f(x)) \neq x$ pour chaque n , soit encore si x n'est de la forme $x = g_n(y)$ pour aucun n . Dans un modèle libre les sauts sont les points basiques b et leurs images par f itérées $f(b)$, ... $f^m(b)$, ... , mais dans un modèle ω-saturé chaque point a une infinité d'images réciproques par f qui sont des sauts ; dans ce modèle libre, comme il n'y a qu'une seule réalisation du type de b sur $f(b)$, on ne peut pas en trouver deux qui soient indépendantes.

S'il n'y a qu'un nombre fini h de sauts parmi les $f^m(x)$, nous dirons que x est de hauteur h ; sinon nous dirons qu'il est de hauteur infinie. Soient N un modèle de $T^\neg$, et x un point situé dans une de ses extensions élémentaires ; si le bloc de x n'a pas de point dans N , le rang de Lascar de x sur N vaut $h+1$ s'il est de hauteur finie h , et ω sinon ; si le bloc de x a des points dans N , le rang de Lascar de x est le nombre de fois qu'il saute avant de tomber dans N , c'est-à-dire le nombre de sauts de la forme $f^m(x)$ qui ne sont pas dans N . La théorie négative est donc superstable de rang ω ; elle n'est pas ω-stable car il y a des infinités continupotentes de types de chaque hauteur.

Dans un modèle de T^+ il ne peut y avoit qu'un point de I par bloc, et si b est basique tous les $f^m(b)$ sont des sauts. Mais si x est une autre sorte de saut, on peut l'identifier par homomorphisme avec $g_1(f(x))$ (ou $g_2(f(x))$, ... ou $g_n(f(x))$, ... !) tout en restant dans T^+ . Autrement dit, les modèles positivement clos de T^+ sont les M_κ augmentés de copies de blocs de hauteur nulle (pas plus d'une copie de chacun de ces blocs). La théorie positive, qui n'est pas Hausdorff, est superstable de rang un ! On remarque que l'indépendance au sens de T^+ au-dessus d'un point de M_κ est la I-indépendance au-dessus de l'unique point basique de son bloc.

K. Groupes commutatifs libres

Nous considérons maintenant des variétés de groupes abéliens, notés additivement.

Nous commençons par la variété des espaces vectoriels sur un corps K , dans le langage £ comprenant 0 , la fonction binaire $x+y$ et une fonction unaire pour chaque scalaire dans K . Tous ses modèles sont libres, L_κ étant l'espace vectoriel V_κ de dimension κ ; $I(x)$ équivaut à $x\neq 0$, si bien que l'inégalité est positivement définissable dans £(I) , et I_n est satisfait par les n-uplets linéairement indépendants. Si le corps K est fini, la théorie positive T^+ des V_κ est modèle-complète, les I_n étant positivement définissables en termes de £ et de I (Théorème 25). Si K est infini, un modèle M de T^+ est un espace vectoriel de dimension κ infinie, dans lequel les I_n sont satisfaits par certains uplets linéairement indépendants ; l'application identité est un £(I)-homomorphisme de M dans V_κ , si bien que, si M est positivement clos, il coïncide avec V_κ : les V_κ sont les seuls modèles positivement clos de T^+ . La théorie T^+ n'est pas modèle-complète, car il n'y a aucun moyen de définir positivement la négation de I_2 ; elle reste cependant Hausdorff, car il n'y a qu'une manière de continuer un de ses modèles en un modèle positivement clos : il s'agit d'un cas très simple de *morleyisation infinie* d'une théorie classique.

On considère ensuite un entier m et la variété des groupes abéliens d'exposant m , satisfaisant à l'équation $m.x = 0$; c'est aussi la variété des modules sur l'anneau Z/mZ . D'après le Corollaire 26, la théorie négative des L_κ est ω-catégorique ; le langage £(I) équivaut positivement à celui de x+y et x≠y . Comme nous l'avons vu dans l'Exemple 8, si m a plusieurs facteurs premiers, elle a des modèles non-libres. Un uplet est basique, ou libre, si et seulement si, chaque fois que $s_1.x_1 + ... + s_n.x_n$ est divisible par s , c'est-à-dire de la forme s.y , alors chacun des entiers s_i est divisible par s modulo m .

Nous abordons maintenant l'étude du groupe commutatif libre Z_κ , somme directe de κ copies du groupe cyclique infini. D'après SZMIELEW 1955 (plus tard généralisé au modules), dans un groupe commutatif toute formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules positives ; en conséquence, d'après le Lemme 11, dans un module libre infiniment engendré le type d'un uplet est déterminé par les formules $\underline{x} = \tau(\underline{y})$ qu'il satisfait ; le multiterme τ étant de la forme $x_1 = \lambda_{11}.y_1 + ... + \lambda_{1m}.y_m$, ... $x_n = \lambda_{n1}.y_1 + ... + \lambda_{nm}.y_m$, il peut être mis sous la forme matricielle $\underline{x} = M.\underline{y}$, les uplets de vecteurs étant mis en colonne (M a donc n lignes et m colonnes) ; on dira alors que $\underline{x}$ est divisible par M ; par exemple les uplets £-basiques sont ceux qui ne sont divisibles que par les matrices inversibles à droite.

Dans le cas de Z_κ , c'est-à-dire des Z-modules, nous allons pousser plus loin l'analyse jusqu'à montrer l'homogénéité. Un uplet $\underline{x}$ est libre s'il est Q-linéairement indépendant dans sa clôture divisible : $s_1.x_1 + ... + s_n.x_n = 0$ seulement si chacun des entiers s_i est nul. D'après le lemme suivant (qui ne prétend pas à une grande originalité), la basicité équivaut à l'indépendance linéaire modulo $m.Z_\kappa$ pour chaque entier m .

Lemme 29. *Dans* Z_κ *, le point* x *est basique si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier* $m \neq \pm 1$ *; plus généralement, le* n-*uplet* $\underline{x}$ *est basique si et seulement si, chaque fois que* $s_1.x_1 + ... + s_n.x_n$ *est divisible par l'entier* m *, alors* m *divise chacun des entiers* s_i .

Démonstration. En fait, il suffit de vérifier cette condition pour chaque m = p premier, car il y a unicité de la division quand elle est possible.

D'une part, cette condition est bien vérifiée par les uplets injectifs extraits de la base canonique de Z_κ .

Considérons d'autre part x_1 , ... x_n satisfaisant la condition, s'exprimant en fonction de m éléments $\underline{y}$ pris dans la base canonique ; comme, dans la clôture divisible de Z_κ , x_1 , ... x_n sont linéairement indépendants sur le corps des rationnels, $n \leq m$. Notons M la matrice de leurs coordonnées (entières !) dans la base des $\underline{y}$, qui a n lignes et m colonnes ; les déterminants d'ordre n extraits de cette matrice n'ont pas de facteur premier p en commun, car sinon x_1 , ... x_n seraient liés modulo p ; si $n = m$, le déterminant de M vaut donc 1 ou -1 , et l'inverse de M est à coefficients entiers.

Supposons que $n < m$, et montrons qu'on peut ajouter une ligne à M tout en préservant la condition. On peut extraire de M une matrice N à n lignes et $n+1$ colonnes ayant au moins un mineur non-nul ; si nous notons d le pgdc de ses mineurs δ_i , on peut trouver des entiers λ_i tels que $\lambda_1.\delta_1 + ... + \lambda_{n+1}.\delta_{n+1} = d$, et ajouter une ligne entière à N pour obtenir une matrice N' dont le déterminant vaut d ; nous complétons cette ligne par des 0 (ou n'importe quels entiers !) pour obtenir un prolongement M' de M . Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que tous les déterminants d'ordre $n+1$ extraits de M' soient divisibles par un nombre premier p ; comme il n'y a pas de liaison modulo p entre les n premières lignes de M' , sa dernière ligne est combinaison linéaire modulo p de ses n premières lignes ; on a donc une liaison de la forme $l_{n+1} = \mu_1.l_1 + ... + \mu_n.l_n + p.l$ entre les lignes de N' , ce qui implique que le déterminant de N' est divisible par $p.d$, alors qu'il vaut $d \neq 0$ par construction.

Nous finissons donc par compléter $\underline{x}$ en un m-uplet qui s'envoie sur $\underline{y}$ par un automorphisme du groupe engendré par ce dernier. **Fin**

Voici une autre façon de voir les choses : les uplets basiques sont ceux qui ne sont divisibles que par les matrices carrées de déterminant ± 1 . En effet, si $\underline{x} = M.\underline{y}$ où le déterminant de M est divisible par p , x_1 , ... x_n sont liés modulo p ; réciproquement, s'ils sont liés modulo p , l'un d'entre eux, par exemple x_n , s'exprime modulo p en fonction des autres, ce qui donne une égalité $x_n = m_1.x_1 + ... + m_{n-1}.x_{n-1} + p.y$, et la divisibilité par une matrice de déterminant p .

Un énoncé équivalent au Lemme 29 est donc le suivant : toute matrice à coefficients entiers inversible à droite se complète en une matrice carrée inversible à coefficients entiers.

Lemme 30. *Dans* Z_κ *, tout* n*-uplet* Q*-linéairement indépendant (c'est-à-dire libre) est de la forme* $\underline{x} = M.\underline{y}$ *où* $\underline{y}$ *est un* n*-uplet basique et* M *une matrice à coefficients entiers de déterminant non nul.*

Démonstration. Supposons que $\underline{x} = M.\underline{y}$ et que $\underline{x}$ et $\underline{y}$ s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un m-uplet basique ; si $\underline{x}'$ et $\underline{y}'$ sont les projections respectives de $\underline{x}$ et de $\underline{y}$ sur l'espace engendré par n de ces vecteurs basiques, on a aussi $\underline{x}' = M.\underline{y}'$, et $X = M.Y$ où X est la matrice carrée des coordonnées de $\underline{x}'$ et Y celle de $\underline{y}'$; par conséquent, $\det(M)$ divise det(X) . Comme $\underline{x}$ est linéairement indépendant, on peut extraire un déterminant $n \times n$ non nul de la matrice de ses coordonnées, si bien que det(M) est borné ; pour avoir $\underline{y}$ basique il suffit de minimaliser la valeur absolue de det(M) . **Fin**

Une conséquence des Lemmes 29 et 30 est que Z_κ est ω-homogène pour le langage £ : tout uplet est de la forme $\underline{a}$^$\underline{a}$' , où $\underline{a}$ en est une base sur Q ; le type de $\underline{a}$ est déterminé par les formules $(\exists\, \underline{y})\ \underline{x} = M.\underline{y}$ auxquelles il satisfait, et si on prend M de déterminant minimum, il existe un (unique !) n-uplet basique tel que $\underline{a} = M.\underline{b}$; comme chaque point de $\underline{a}$' satisfait à une équation $m.x = \lambda_1.b_1 + ... + \lambda_n.b_n$, chacun des λ_i est divisible par n et $\underline{a}$' est dans le sous-groupe engendré par $\underline{b}$; finalement, le £-type de $\underline{a}$^$\underline{a}$' détermine une matrice N telle qu'il existe un unique n-uplet basique $\underline{b}$ tel que $\underline{a}$^$\underline{a}$' = N.$\underline{b}$.

On obtient même une forte propriété d'homogénéité finie : si $\underline{a}$ et $\underline{a}$' ont même type et appartiennent au sous-groupe engendré par le uplet basique $\underline{b}$, il existe un automorphisme de ce sous-groupe qui envoie $\underline{a}$ sur $\underline{a}$' .

On remarque au passage qu'un uplet libre est libre modulo $p.Z_\kappa$ pour tous les nombres premiers qui ne divisent pas le déterminant de la matrice qui l'exprime à partir d'un uplet basique de même longueur. Par ailleurs la liberté modulo un seul $p.Z_\kappa$ implique bien sûr la liberté !

On voit aussi que l'indépendance au-dessus de $\underline{c}$ se ramène à l'indépendance au-dessus d'un uplet basique qui engendre à division près le même sous-groupe que $\underline{c}$: il s'agit de la déviation au sens de la théorie négative de Z_κ , qui est stable comme toute théorie de groupe abélien.

Lemme 31. *Le type générique de Z_κ est de poids infini, et aucun Z_κ n'est ω_1-homogène.*

Démonstration. Considérons le début x_0 , x_1 , ... x_n , ... d'un ensemble libre engendrant Z_κ , et posons $y_1 = x_0 + p_1.x_1$, ... $y_n = x_0 + p_n.x_n$, ... où les p_i sont des nombres premiers distincts ; y_1 , y_2 , ... y_n sont génériques et indépendants : en effet, si $s_1.y_1 + ... + s_n.y_n$ est divisible par un nombre premier p , tous les s_i sauf peut-être un le sont, mais comme leur somme l'est aussi, ils le sont tous. Comme x_0 fait dévier chaque y_i , son poids est infini, et la suite des y_i ne peut faire partie d'un ensemble libre et générateur de Z_κ . **Fin**

Théorème 32. *(i) Les Z_κ sont basiquement saturés, et en conséquence leur théorie positive est stable.*
(ii) Leur théorie positive est strictement plus faible que leur théorie négative ; un modèle positivement clos de leur théorie positive ne contient pas d'élément non-nul divisible par tout entier, et l'inégalité $x \neq y$ n'est pas positivement définissable dans le langage £(I) .
(ii) Les Z_κ ne sont pas les seuls modèles positivement clos de leur théorie positive ; en fait, ils ne sont pas positivement ω-saturés.

Démonstration. (i) On veut réaliser la formule $\varphi(\underline{x}_1, \dots \underline{x}_n)$ avec des uplets $\underline{x}_i$ basiques, sachant qu'il est possible de le faire avec des uplets libres modulo $p.Z_\kappa$ pour chaque p pris dans un ensemble fini arbitraire de nombres premiers ; en la mettant sous forme disjonctive, on se ramène au cas où φ est une conjonction de formules positives et de négations d'une telle formule. Il est en particulier possible de le faire avec des uplets libres $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$, puis avec des uplets $\underline{b}_1, \dots \underline{b}_n$ qui sont libres modulo $p.Z_\kappa$ pour tous les p pour lesquels un $\underline{a}_i$ ne l'est pas ; on les réalise de manière indépendante (Z_κ est donc décomposé en un produit de trois facteurs libres, le premier contenant les $\underline{a}_i$ et le second les $\underline{b}_i$), et on prend pour $\underline{c}_1, \dots \underline{c}_n$ leurs sommes élément par élément ; les $\underline{c}_i$ sont basiques, et, vu la décomposition en facteurs directs, ce uplet satisfait à la formule φ .

(ii) Comme les Z_κ sont basiquement saturés, et pas seulement positivement, leur théorie négative équivaut à leur théorie h-inductive dans le langage £'(I) , défini dans la démonstration du Théorème 27 ; comme les types basiques ne sont pas isolés, on ne peut y définir positivement les négations des I_n .

Soit A un modèle positivement clos de leur théorie positive ; A se plonge dans un modèle B ω-saturé de la théorie du groupe Z_κ , dans lequel on interprète chaque I_n par l'ensemble des n-uplets qui sont libres modulo p.B pour chaque nombre premier p ; B est un modèle de la théorie h-inductive des Z_κ dans le langage £'(I) , et à plus forte raison dans le langage £(I) ; le plongement de A dans B est donc une immersion, si bien que les n-uplets de A qui satisfont I_n sont ceux qui sont libres modulo p.A pour tout p .

Notons D le sous-groupe formé des éléments de A divisibles par tout entier (A est sans torsion) ; si un uplet est £-basique, il en est de même de tout uplet obtenu en remplaçant ses points par d'autres qui leurs sont congrus modulo D , si bien que le passge au quotient donne un homomorphisme pour le langage £(I) de A sur A/D ; comme D est facteur direct dans A , A/D est isomorphe à une sous-structure de A , si bien que A et A/D ont même théorie h-universelle dans le langage £(I) ; le passage au quotient est donc une immersion, et D = 0 .

B est un modèle de la théorie positive des Z_κ qui contient des points non-nuls divisibles par tout entier ; il se continue, de manière nécessairement non-injective, dans un modèle positivement clos de cette théorie, si bien que l'inégalité n'est pas positivement définissable.

(iii) Si p est premier et n est non-divisible par p , on peut trouver des entiers u et v tels que $1 = u.p + v.n$, si bien que tout x s'écrit $x = u.p.x + v.n.x$: dans un groupe positivement ω-saturé, tout élément s'écrit donc comme produit d'un élément divisible par p et d'un élément divisible par tous les nombres premiers à p (et qui commutent). S'il existe un élément non-divisible par p , il existe un élément non-nul divisible par tous les nombres premiers à p . Cette démonstration convient aussi pour les groupes libres. **Fin**

Quant à notre dernier théorème, il n'a rien d'inattendu :

Théorème 33. *Dans le langage* £(I) *, la théorie négative des* Z_κ *est instable ; il en est de même de celle des groupes libres.*

Démonstration. Si p_1 , ... p_n sont des nombres premiers distincts, le lemme chinois permet de trouver des entiers m_1, ... m_n tels que, pour chaque i , m_1 , ... m_i-1 , ... m_n soient divisibles par p_1 ; considérons alors b_1 , ... b_n génériques et indépendants, et posons $a = m_1.b_1 + ... + m_n.b_n$; pour chaque i , $a+b_i$ est divisible par p_i , et n'est donc pas générique, tandis que a+b est générique si b est générique sur a . La suite génératrice n'est donc pas uniformément insécable, d'où Propriété d'indépendance.

Le même argument vaut pour le groupe libre : son générique, dont l'image dans Z_κ est générique, n'est pas divisible par p_i modulo des commutateurs. **Fin**

Naturellement, on n'obtient pas de cette manière l'instabilité en Logique Positive, car la formule positive qui contredit la généricité n'est pas la même à chaque fois.

L. Et quelques questions pour terminer !

Dans l'établissement de nos (modestes) résultats, nous avons rencontré des obstacles que nous récapitulons en une liste de dix questions. Il faut s'attendre à des réponses négatives pour la plupart d'entre elles, bien que les exemples très simples - trop simples - traités ici ne fournissent pas de contre-exemples.

1. Dans L_κ , ou même dans ses extensions élémentaires ω-saturées, est-ce que les uplets £-basiques satisfont au Lemme 6 de Prolongement ? Si la théorie négative de L_κ est stable, le £-type basique est-il basé sur $\varnothing$? Et la I-indépendance équivaut-elle à l'indépendance sur $\varnothing$ au sens de cette théorie ?

2. Ou au contraire est-il possible que tous les points basiques soient équivalents modulo une relation d'équivalence définissable (sans paramètres) sans qu'il en soit ainsi des points £-basiques ?

3. Dans L_κ , si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont I-indépendants et £-basiques, est-ce que $\underline{a}$^$\underline{b}$ est £-basique ?

4. Si I_n est définissable dans L_κ par une formule avec paramètres du langage £ , l'est-il par une formule sans paramètres ? La question se pose même dans le cas d'un groupe stable.

5. Si la théorie positive de L_κ est modèle-complète, est-ce que les I_n sont définissables dans £ ? Et est-ce que la théorie négative est modèle-complète (en tant que théorie négative) ?

6. La stabilité de la théorie négative entraîne-t-elle celle de la théorie positive ?

7. Que peut-on dire des variétés dans un langage qui ne comprend que des fonctions unaires, mais avec des constantes, ou bien des relations d'arité arbitraire ?

8. Les groupes libres d'exposant 4 à carrés commutatifs, les groupes libres 2-résolubles d'exposant premier impair, les anneaux de polynômes ont des théories négatives instables ; que peut-on dire de plus à leur propos ?

9. Que peut-on dire des modules libres sur un anneau arbitraire ?

10. Les groupes libres sont-ils basiquement saturés ? Leur théorie positive est-elle stable ?

Références

BALDWIN & SHELAH 1983 John Baldwin et Saharon Shelah, *The structure of saturated free algebras,* Algebra Universalis, 17, 191-199

BAUDISCH 1996 Andreas Baudisch, A new uncountably categorical group, *Transactions of the American Mathematical Society,* 48, 3889-3940

BELEGRADEK 2012 Oleg Vigelmovich Belegradek, Homogeneity in relatively free groups, *Archive for Mathematical Logic,* 51, 781-787

BEN-YAACOV 2003 Itaï Ben-Yaacov, Positive model theory and compact abstract theories, *Journal of Mathematical Logic,* vol. 3, 85-118

BEN-YAACOV 2003bis id., Simplicity in compact abstract theories, *Journal of Mathematical Logic,* vol. 3, 163-191

BEN-YAACOV & POIZAT 2007 Itaï Ben-Yaacov & Bruno Poizat, Fondements de la Logique Positive, *The Journal of Symbolic Logic,* 72, 1141-1162

BIRKHOFF 1935 Georg Birkhoff, On the structure of Abstract algebra, *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* 31, 433-454

HODGES 1993 Wilfrid Hodges, *Model Theory,* Cambridge University Press

LASCAR & POIZAT 1979 Daniel Lascar et Bruno Poizat, An introduction to forking, *The Journal of Symbolic Logic,* 44, nb. 3, 178-198

MAKKAI & REYES 1977 Michael Makkai et Gonzalo Reyes, *First order categorical logic,* Lectures Notes in Mathematics, 611

MUSTAFIN & POIZAT 1995 Tölendi Mustafin et Bruno Poizat, Polygônes, *Mathematical Logic Quaterly,* 41, 93-110

OULD HOUCINE 2011 Abderezzak Ould Houcine, Homogeneity and prime models in torsion-free hyperbolic groups, *Confluentes Mathematici,* 3, 121-155

PERIN 2008 Chloé Perin, *Plongements élémentaires dans un groupe hyperbolique sans torsion,* Thèse de doctorat, Université de Caen

PERIN 2011 Id., Elementary embeddings in torsion-free hyperbolic groups, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.,* 44, 631-681

PERIN & SKLINOS 2012 Chloé Perin et Rizos Sklinos, Homogeneity in the free group, *Duke Math. J.,* 161, 2635-2668

PERIN & SKLINOS 2013 Id., Forking and JSJ decompositions in the free group, *arXiv : 1303.1378v1 [math.LO]*

PILLAY 2009 Anand Pillay, On genericity and weight in the free group, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 137, 3911-3917

PILLAY & SKLINOS 2014 Anand Pillay et Rizos Sklinos, Saturated free algebras revisited, *arXiv : 1409.8604v1 [math.LO]*

POIZAT 1993 Bruno Poizat, Le groupe libre est-il stable ?, *Seminarberichte 93-1,* Humbodt Universität zu Berlin, 169-176

POIZAT 2014 Id., Supergénérix, *Journal of Algebra*, 404, 240-270

SELA 2006 Zlil Sela, Diophantine geometry over groups VI : The elementary theory of a free group, *Geom. Funct. Alal.,* 16, 707-730

SELA 2013 Id., Diophantine geometry over groups VIII : Stability, *Ann. Math.,* 177, 787-868

SKLINOS 2011 Rizos Sklinos, On the generic type of the free group, *the Journal of Symbolic Logic,* 76, 227-234

SZMIELEW 1955 Wanda Szmielew, Elementary properties of abelian groups, *Fundamenta Mathematicae,* 41, 203-271

4 Octobre 2015