SUPERGENERIX STRIKES AGAIN

Bruno POIZAT[1], juillet 2013

Abstract. Given a subroup G of a stable (in the model-theoric sense) group Γ, we establish some properties of the traces on G of the definable subsets of Γ. We give a special attention to the case when Γ is a group of finite Morley rank. An example of this situation is provided by the *linear groups* : for some n, G is a subgroup of $GLn(K)$, where K is a field that we may take algebraically closed ; the definable sets in the sense of $GLn(K)$ are its constructible subsets, i.e. the boolean combinations of a finite number of its Zariski closed subsets.

Résumé. Etant donné un sous-groupe G d'un groupe stable (au sens modèle-théorique) Γ, nous étudions les propriétés des traces sur G des sous-ensembles définissables de Γ. Nous considérons particulièrement le cas où Γ est un groupe de rang de Morley fini. Un exemple de cette situation est fourni par les *groupes linéaires* : pour un certain n, G est un sous-groupe de $GLn(K)$, où K est un corps qu'on peut supposer algébriquement clos ; les ensembles définissables au sens de $GLn(K)$ sont alors ses parties constructibles, c-à-d les combinaisons booléennes d'un nombre fini de ses fermés de Zariski.

1. Définitions

On me permettra d'attaquer bille-en-tête par une double définition, et par un simple fait dont la démonstration préfigure tous les résultats de cet article.

Soit G un groupe ; on dit qu'une partie X de G est *générique* si G est recouvert par un nombre fini de translatés (à gauche) de X ; en d'autres termes, $G = a_1.X \cup \ldots \cup a_m.X$ pour un certain uplet $\underline{a}$ d'éléments de G ; on dit que X est *supergénérique* si toute intersection $b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X$ d'un nombre fini de translatés de X est générique (et en conséquence supergénérique !).

Il est clair qu'un ensemble contenant un générique ou un supergénérique l'est aussi ; qu'un translaté d'un générique ou d'un supergénérique l'est aussi ; et que, si $a_1.X \cup \ldots \cup a_m.X$ est générique, X l'est aussi (mais ça ne marche pas pour supergénérique !).

Si X est supergénérique, son complément $\neg X$ n'est pas générique ; en effet, si $G = a_1.\neg X \cup \ldots \cup a_m.\neg X$, c'est que $a_1.X \cap \ldots \cap a_m.X = \emptyset$. Plus généralement :

Observation fondamentale. *Si X est générique et Y est supergénérique, alors $X \cap Y$ est générique* ; en effet, si $G = a_1.X \cup \ldots \cup a_m.X$, alors $a_1.Y \cap \ldots \cap a_m.Y$, qui est générique par hypothèse, est inclus dans $a_1.(X\cap Y) \cup \ldots \cup a_m.(X\cap Y)$. On en conclut que *l'intersection de deux ensembles supergénériques est supergénérique,* puisque $b_1.(X\cap Y) \cap \ldots \cap b_n.(X\cap Y) = (b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X) \cap (b_1.Y \cap \ldots \cap b_n.Y)$.

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

Les ensembles supergénériques forment donc un filtre de parties de G qui est invariant par translation. Il est clos par inversion quand G est commutatif.

2. Motivations

Bien que les définitions ci-dessus aient leur origine dans la Théorie des modèles appliquée aux groupes, cet article ne s'adresse pas spécialement à des logiciens (sauf dans quelques appartés complices ici et là, et dans les Sections 7 et 8 dont on peut s'abstenir de lire les démonstrations) : on n'y traite que de théorie des groupes et de combinatoire, au demeurant très élémentaires.

J'espère inciter les ingénus en logique à poursuivre la lecture en leur offrant cet exemple familier de tout algébriste : considérons un groupe G *linéaire,* c'est-à-dire un sous-groupe du groupe $GLn(K)$ des matrices inversibles carrées d'ordre n à coefficients dans un corps K , qu'on peut supposer gratuitement algébriquement clos et de degré de transcendance infini. Un des buts de cet article est de chercher à comprendre comment sont faites les intersections avec G des parties *constructibles* de $GLn(K)$; rappellons qu'un sous-ensemble constructible d'une puissance cartésienne de K est par définition une combinaison booléenne d'un nombre fini de fermés de Zariski (qui sont les ensembles définis par un système d'équations-polynômes à coefficients dans K). Un constructible s'écrit comme une réunion finie d'ensembles qui sont chacun intersection d'un ouvert et d'un fermé de Zariski ; il contient donc un ouvert non-vide, ou bien est contenu dans un fermé propre.

Lemme 1. *Soit G un groupe linéaire, dont la clôture de Zariski Γ soit connexe, et soit B l'intersection avec G d'une partie constructible A de Γ ; alors B est dans G ou bien supergénérique, ou bien de complémentaire supergénérique.*

Démonstration. Il est bien connu que Γ est le plus petit groupe constructible contenant G ; comme Γ est connexe, il est irréductible (l'intersection de deux ouverts non-vides est non-vide), et ses sous-ensembles fermés propres sont de dimension inférieure à la sienne.

Il suffit donc de montrer que, quand A est une partie ouverte non-vide de Γ , B est générique dans G . Notons alors d la dimension de Γ , et considérons $d+1$ points $e_0 , \dots e_d$ de Γ qui soient génériques et indépendants, ce qui signifie que $(e_0 , \dots e_d)$ est de degré de transcendance $(d+1).d$ sur le corps k engendré par les coefficients des équations définissant Γ et A ; si a est un élément quelconque de Γ , pour au moins un indice i e_i reste de degré d sur $k(a)$, si bien que $e_i^{-1}.a$ est un point générique de Γ , qui appartient à A .

Autrement dit, A est générique dans Γ , et plus précisément l'ensemble des $(d+1)$-uplets $\underline{x}$ tels que $\Gamma = x_0.A \cup \dots \cup x_d.A$ contient $(e_0 , \dots e_d)$, qui est un point générique de Γ^{d+1} . Or ce dernier ensemble est constructible : pour le voir, il suffit de savoir que la projection d'un constructible de K^{n+1} est un constructible de K^n , résultat mis sous le saint vocable de Chevalley par les géomètres, et sous celui de Tarski par les logiciens ; il est aussi appelé "élimination des quantificateurs" par ces derniers, car il signifie qu'on peut employer les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ sans sortir de la famille des constructibles : pour les logiciens, les constructibles ne sont autres que les *ensembles définissables* dans le corps algébriquement clos K . Cet ensemble donc contient un ouvert non-vide O de Γ^{d+1} ; comme ce dernier est la clôture de Zariski de G^{d+1} , l'intersection de O et de G^{d+1} n'est pas vide. **Fin**

Si la clôture de Zariski Γ du groupe linéaire G n'est pas connexe, nous notons $G°$ l'intersection de G et de la composante connexe $\Gamma°$ de Γ , laquelle est est son plus petit sous-groupe algébrique d'indice fini ; nous remarquons que chaque cossette de $\Gamma/\Gamma°$ a un représentant dans G . Si B est la trace sur G d'une partie constructible de $GLn(K)$, l'intersection de B avec chaque cossette de $G/G°$ est translatée d'une partie supergénérique, ou bien cosupergénérique, de $G°$.

Le lemme suivant illustre comment les propriétés de généricité des parties constructibles de la clôture de Zariski se transmettent à leurs traces sur le groupe :

Lemme 2. *Soit* G *un groupe linéaire, de clôture de Zariski* Γ *, et soit* B *l'intersection avec* G *d'une partie constructible* A *de* Γ *; alors* B *est générique dans* G *si et seulement si* A *est générique dans* Γ *, et* B *est supergénérique dans* G *si et seulement si* A *est supergénérique dans* Γ .

Démonstration. D'après le paragraphe ci-dessus, il suffit de montrer le résultat quand Γ est connexe ; si A contient un ouvert non-vide, il est supergénérique, et nous avons vu que c'est également le cas de B ; si A est contenu dans un fermé propre, son complémentaire est supergénérique, ainsi que le complémentaire de B : ce dernier n'est donc pas générique. **Fin**

Pour un théoricien des modèles, les groupes algébriques constituent le paradigme des groupes de rang de Morley fini, le rang de Morley étant pour eux leur dimension au sens géométrique. Ces groupes sont eux-mêmes un cas particulier de groupes ω-stables, lesquels font partie d'une famille encore plus vaste, celle des groupes stables. Les propriétés de généricité des ensembles définissables dans les groupes stables ont émergé dans POIZAT 1981 (la définition des ensembles génériques grâce aux translations est en fait due à Chantal Berline, et l'emploi du mot "générique" dans ce contexte a été introduit par Gregory Cherlin) ; puis il a été montré dans WAGNER 1990 (voir aussi NEWELSKI 1991) que, si G est un sous-groupe quelconque d'un groupe stable Γ , les traces sur G des parties définissables de Γ héritent de propriétés de généricité et de supergénéricité semblables à celles décrites dans le Lemme 2 ; nous rappellerons tout cela dans les Sections 7 et 8.

Cette théorie de la généricité pour les sous-groupes non-définissables d'un groupe stable a permis de montrer un certain nombre de résultats wagnériens, dont le plus typique est WAGNER 2003. Mais, dans cet article, je développe l'étude de la supergénéricité pour elle-même, sans lui chercher d'applications ; j'espère que l'exemple des groupes linéaires convaincra de l'intérêt de cette démarche. Comme il s'agit d'un premier défrichement, j'y pose beaucoup de questions, qui seront vraisemblablement d'avantage productives en contre-exemples qu'en théorèmes ; je dois dire que j'ai été surpris de constater qu'une définition si simple conduise à autant de problèmes.

3. Latéralité

Ce que nous avons défini, ce sont les notions de généricité et de supergénéricité à gauche, correspondant aux translations à gauche $a.X$; si G n'est pas commutatif, on peut aussi considérer les génériques et supergénériques à droite, correspondant aux translations à droite $X.b$, ainsi que les génériques et supergénériques bilatères, correspondant aux translations bilatères $a.X.b$.

On peut aussi définir généricité et supergénéricité pour la conjugaison $a.X.a^{-1}$, et en fait pour n'importe quelle action de G sur un ensemble E .

On sait que, dans le cas des parties définissables d'un groupe stable, les généricités à gauche, à droite et bilatères coïncident (voir POIZAT 1981, POIZAT 1987, Ch. 5, et la Section 7) ; on observe que c'est bien le cas des ensembles décrits dans les Lemmes 1 et 2.

Si X est supergénérique à gauche, il est aussi supergénérique bilatère. En effet, on remarque tout d'abord que, de même que ses translatés à gauche $a.X$, tous les translatés à droite $X.b$ de X sont aussi supergénériques à gauche ; par conséquent toute intersection $a_1.X.b_1 \cap ... \cap a_n.X.b_n$ est supergénérique à gauche, donc générique à gauche, et a fortiori générique bilatère.

Comme l'observation fondamentale vaut aussi pour eux, les supergénériques bilatères forment un filtre ; par conséquent, si X est supergénérique à gauche, alors X^{-1} est supergénérique à droite, et $X \cap X^{-1}$ est supergénérique bilatère. On voit aussi que le complément de X n'est générique ni à gauche, ni à droite, ni même de façon bilatère.

Voici un petit exercice sur la commutativité : si X est une partie supergénérique bilatère de G , $Y = \{ (x,y) / x.y^{-1} \in X \}$ est supergénérique à gauche dans le groupe produit $G \times G$, tandis que $Z = \{ (x,y) / x^{-1}.y \in X \}$ y est supergénérique à droite. Si X est le complément d'un sous-groupe H d'indice infini dans G , nous allons voir dans la section suivante qu'il y est supergénérique à droite comme à gauche ; si de plus toute partie finie de G est contenue dans un conjugué de H (cette situation est facile à obtenir si G est le groupe des permutations de support fini d'un ensemble infini), Y n'est pas générique à droite, tandis que Z n'est pas générique à gauche.

La conclusion, c'est que j'aurais pu prendre la supergénéricité bilatère comme notion de base de cet article ; je ne l'ai pas fait pour éviter de compliquer l'intelligibilité de la définition, et aussi parce nous allons surtout étudier par la suite les parties supergénériques de groupes commutatifs.

4. Premiers exemples

Si G est fini, toute partie non vide de G est générique, tandis que G est son seul sous-ensemble supergénérique ; si G est infini, ses parties cofinies sont supergénériques : en effet, si $X = G - \{a_1, \ldots a_n\}$, $G = X \cup b.X$ pour n'importe quel b différent de tous les $a_i.a_j^{-1}$; on peut aussi observer que $G = b_0.X \cup b_1.X \cup \ldots \cup b_n.X$ dès que les b_i sont deux-à-deux distincts.

Les sous-groupes génériques de G sont ceux qui sont d'indice fini, tandis que G est son seul sous-groupe supergénérique.

Si H est un sous-groupe d'indice infini dans G, le complément de H est supergénérique : en effet, si X est obtenu en enlevant à G un nombre fini de classes $a_1.H, \ldots a_n.H$ modulo H, alors $G = X \cup b.X$ sauf si pour au moins un couple (i,j) $b.a_i.H = a_j.H$, soit encore $b \in a_j.H.a_i^{-1} = a_j.a_i^{-1}.a_i.H.a_i^{-1}$; il existe bien des b tels que $G = X \cup b.X$ puisque, d'après NEUMAN 1952, un nombre fini de cossettes modulo des sous-groupes d'indice infini ne peut recouvrir G : ces b forment même une partie supergénérique de G ! On voit donc que l'intersection de H avec un ensemble supergénérique est arbitraire.

Si G est infini, toute partie de G de cardinal strictement inférieur à celui de G est finie, ou bien engendre un groupe d'indice infini dans G ; en conséquence son complémentaire est supergénérique.

Nous verrons dans la Section 7 qu'une partie définissable d'un groupe stable est supergénérique si et seulement si son complémentaire n'est pas générique ; ce n'est pas le cas en général, même pour les ensembles génériques, comme le montre le contre-exemple suivant : $G = Z$ est le groupe additif des entiers ; X est formé des entiers négatifs et des entiers positifs pairs ; X est générique, non supergénérique, et son complément n'est pas générique.

De même, dans un groupe stable *connexe,* c'est-à-dire sans sous-groupes propres définissables d'indice fini, toute partie définissable générique est supergénérique. Par contre, il est à peu près évident que n'importe quel groupe $G \neq 1$ peut être divisé en deux sous-ensembles génériques disjoints ; soit en effet $a \neq 1$ dans G ; si a est d'ordre pair ou infini, on considère X qui prend un point sur deux de chaque orbite de l'action de a sur G, deux points consécutifs étant alternativement dans X ou dans son complément $\neg X$, si bien que $G = X \cup a.X = \neg X \cup a.\neg X$; si a est d'ordre impair, on est forcé de mettre une paire de points consécutifs de chaque orbite du même côté, par exemple celui de $\neg X$, si bien que $G = X \cup a.X \cup a^{-1}.X = \neg X \cup a.\neg X$.

D'après le théorème qui suit, si $G \neq 1$, les supergénériques ne forment pas un ultrafiltre, ce qui n'a rien de surprenant.

Théorème 3. *Tout groupe infini s'exprime comme union de deux ensembles non génériques.*

Démonstration. Nous énumérons par son cardinal κ le groupe G, ainsi que les uplets finis d'éléments de G ; nous construisons par induction sur $\lambda < \kappa$ deux ensembles disjoints B_λ et N_λ, de cardinal strictement plus petit que κ, formés d'éléments de G que nous qualifions respectivement de blancs et de noirs. Pour λ limite, nous prenons les réunions des ensembles définis auparavant. A l'étape $\lambda+1$, nous commençons par blanchir le λ-ème élément de G, à moins qu'il ne soit déjà noir ; nous considérons ensuite le λ-ème uplet $(a_1, \ldots a_n)$ ainsi qu'un point x tel qu'aucun des $a_1.x$, … $a_n.x$ ne soit déjà blanc : nous les peignons tous en noir ; enfin, nous peignons en blanc $a_1.y$ et … et $a_n.y$ pour un point y dont aucun de ces n translatés ne soit déjà noir. Nous obtenons finalement deux ensembles complémentaires B_κ et N_κ non génériques. **Fin**

Cependant, le filtre des supergénériques ne peut être trop trivial :

Théorème 4. *Tout groupe infini a des supergénériques non cofinis.*

Démonstration. C'est vrai si le groupe G n'est pas dénombrable. S'il est dénombrable, nous le dénombrons : $G = \{ e_1 , e_2 , \ldots\ e_i , \ldots \}$. Nous appelons poids d'un mot en les e_i et leurs inverses la somme des indices de ses lettres, et longueur d'un élément de G le poids minimal d'un mot qui l'exprime, l'élément neutre étant le seul point de longueur nulle. La distance $d(x,y)$ de deux éléments de G est par définition la longueur de $x^{-1}.y$. Il s'agit bien d'une distance car $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, et $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$; elle est invariante par translation (à gauche).

Etant donné un entier m, nous dirons qu'un ensemble Y est m-*espacé* si, pour tout entier n, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon n qui contiennent au moins $m+1$ points de Y. Comme les boules sont finies, il est facile de construire de nombreux ensembles 1-espacés infinis ; il est clair qu'un translaté d'un ensemble m-espacé l'est aussi, et que la réunion d'un ensemble m-espacé et d'un ensemble m'-espacé est $(m+m')$-espacée ; par ailleurs, le complémentaire d'un ensemble m-espacé est générique, car la réunion de ses translatés par $m+1$ points distincts est cofinie, si bien que G est l'union de deux translatés de cette réunion. **Fin**

On remarque en passant que nous pouvons ainsi construire une infinité continupotente de parties supergénériques pour chaque groupe dénombrable.

5. Premières propriétés

Ça se passe bien pour les quotients et les sous-groupes d'indice fini :

Lemme 5. *Si* f *est un homomorphisme surjectif de* G *sur* H *, l'image par* f *d'un générique de* G *est un générique de* H *, et l'image par* f *d'un supergénérique de* G *est un supergénérique de* H *; l'image réciproque d'un générique de* H *est un générique de* G *, et l'image réciproque d'un supergénérique de* H *est un supergénérique de* G .

Démonstration. On s'appuie sur les faits élémentaires suivants : $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$, $f(a.X) = f(a).f(X)$; $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, $f^{-1}(b.U) = a.f^{-1}(U)$ pour n'importe quel a tel que $f(a) = b$. **Fin**

Lemme 6. *Supposons que* H *soit un sous-groupe d'indice fini de* G *; alors, si* X *est supergénérique dans* G *,* $H \cap X$ *est supergénérique dans* H *; en fait, il existe* Y *supergénérique dans* H *telle que l'intersection de* X *avec chacune des cossettes de* G/H *contienne un translaté de* Y *; réciproquement, cette condition implique la supergénéricité de* X dans G .

Démonstration. Soient $a_1 \ldots a_n$ des représentants des cossettes de G/H ; le générique $a_1.X \cap \ldots \cap a_n.X$ est contenu dans $a_1.(X \cap H) \cup \ldots \cup a_n.(X \cap H)$; ce dernier ensemble est donc générique, ainsi que $X \cap H$, qui est donc générique dans H ; comme dans cet argument on peut remplacer X par l'intersection d'un nombre fini de ses translatés par des éléments de H , on voit que $X \cap H$ est supergénérique dans H . En translatant tout par a_i , on voit aussi que $X \cap a_i.H$ est de la forme $a_i.Y_i$ où Y_i est supergénérique dans H ; l'intersection des Y_i est l'ensemble Y de l'énoncé. La réciproque est aisée. **Fin**

Nous examinons maintenant les parties supergénériques d'un produit de deux groupes. Dans les situations les plus favorables, nous espérons une sorte de Théorème de Fubini, affirmant qu'une partie X de G×H est supergénérique si et seulement si l'ensemble des a dont la coupe $X_a = \{ y \ / \ (a,y) \in X \}$ est supergénérique dans H soit lui-même supergénérique dans G . En l'absence d'un principe de commutativité, comme la symétrie de l'indépendance exploitée dans les Sections 7 et 8, il faut s'attendre à ce que ce ne soit vrai ni dans un sens ni dans l'autre (dans la Section 3, nous avons décrit un ensemble dont toutes les coupes sont supergénériques à droite comme à gauche et qui n'est pas supergénérique à gauche), et la première question qui vient à l'esprit, quand G n'est pas commutatif, est la suivante :

Question 1. *Si* X *est une partie supergénérique de* G *, est-ce que les couples* (x,y) *tels que* $x.y \in X$ *forment une partie supergénérique de* G×G *?*

Le premier résultat est un corollaire immédiat du lemme précédent :

Corollaire 7. *Si* F *est un groupe fini, les parties supergénériques du groupe* $G \times F$ *sont celles qui contiennent un ensemble de la forme* $X \times F$ *, où* X *est supergénérique dans* G .

Les parties d'un produit de groupes $G \times H$ qui contiennent un ensemble $X \times Y$, où X est supergénérique dans G et Y est supergénérique dans H , forment un filtre d'ensembles supergénériques. Si G est infini, le complémentaire du sous-groupe diagonal de $G \times G$, qui est supergénérique, n'est pas de cette forme ; en effet, si $X \times Y$ est inclus dans ce dernier, X et Y sont disjoints et ne peuvent être tous les deux supergénériques.

Considérons deux groupes infinis G et H , et une partie X de $G \times H$ dont chaque coupe X_a contienne tous les éléments de H sauf au plus d , où d est un entier fixé ; si Y est l'intersection de n translatés de X , chacune de ses coupes Y_a contient tous les éléments de H sauf au plus nd , et la réunion des translatés de Y par $nd+1$ éléments distincts de la forme $(1,b_i)$ recouvre $G \times H$; autrement dit X est supergénérique.

Il est essentiel que le nombre des points hors des coupes soit borné par l'entier d ; considérons en effet, dans le groupe additif $Z \times Z$, l'ensemble X non-générique formé des couples (x,y) tels que $|x| < |y|$; chacune de ses coupes X_a est cofinie, tandis chacune des coupes de l'ensemble symétrique est finie (cette dernière propriété est un obstacle à la généricité : plus généralement, si chaque coupe X_a est de complémentaire supergénérique, X ne peut être générique).

On obtient un exemple du même genre avec un groupe de Prüfer P , considérant l'ensemble des couples (x,y) de $P \times P$ tel que y appartienne au groupe engendré par x ; cet ensemble est laissé invariant, à un ensemble fini près, par chaque translation.

On remarque aussi que les couples (x,y) tels que $x \leq y$ si x est pair, et $y \leq x$ si x est impair, forment une partie générique de $Z \times Z$ dont aucune coupe n'est générique dans Z .

Question 2. *Peut-on trouver une partie supergénérique de* $Z \times Z$ *, ou d'un autre produit, dont aucune coupe ne soit générique ?*

6. Uniformité

Nous dirons que X est m-générique si G est recouvert par au plus m translatés de X , et que X est *uniformément supergénérique* si, pour chaque n , il existe un entier $\gamma(n)$ tel que l'intersection de n translatés de X soit $\gamma(n)$-générique. Nous dirons alors que X est γ-supergénérique ; si la fonction $\gamma(n)$ est bornée par la constante m , nous dirons que X est m-supergénérique. Par exemple les ensembles cofinis, ainsi que les complémentaires de groupes d'indice infini, sont 2-supergénériques.

Autre exemple : les complémentaires d'ensembles 1-espacés construits dans la démonstration du Théorème 4 sont uniformément supergénériques, avec une fonction γ linéaire, $\gamma(n) = 2(n+1)$.

Théorème 8. *L'intersection de deux ensembles uniformément supergénériques est uniformément supergénérique.*

Démonstration. L'uniformité signifie que X reste supergénérique dans les extensions élémentaires de (G,X) , les supergénériques uniformes produisant dans chacune de leurs extensions élémentaires un filtre d'ensembles supergénériques ; ce théorème est donc une conséquence du Théorème de compacité de la logique du premier ordre !

Pour être plus précis, et moins farceur, on reprend la démonstration de l'Observation fondamentale. Supposons que X soit $\gamma(n)$-supergénérique, et que Y soit $\chi(n)$-supergénérique ; considérons $b_1 , \ldots b_n$ dans G , et posons $X' = b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X$, $Y' = b_1.Y \cap \ldots \cap b_n.Y$; soient $a_1 , \ldots a_{\gamma(n)}$ tels que $G = a_1.X' \cup \ldots \cup a_{\gamma(n)}.X'$; comme $a_1.(X'\cap Y') \cup \ldots \cup a_{\gamma(n)}.(X'\cap Y')$ contient $a_1.Y' \cap \ldots \cap a_{\gamma(n)}.Y'$, la fonction $\gamma(n).\chi(\gamma(n))$ convient à $X\cap X'$. **Fin**

On obtient donc des filtres en limitant la croissance de la fonction $\gamma(n)$: fonctions constantes, fonctions de croissance polynomiale, etc..

Il existe une notion plus forte d'uniformité : nous dirons que X est *paramétriquement supergénérique* si, pour chaque n , il existe un sous-ensemble fini A_n de G tel que, si X' est l'intersection de n translatés de X , alors G est la réunion des translatés de X' par les éléments de A_n .

Le cardinal de A_n borne bien sûr la fonction γ de X , mais cette dernière peut être beaucoup plus petite. Le rapport entre ces deux uniformités est illustré par les complémentaires de singletons (dans un groupe infini !), qui sont 2-supergénériques ; on peut prendre pour A_n n'importe quel ensemble de $n+1$ points distincts, mais pas moins. Leur exemple montre que, si X est paramétriquement supergénérique et différent de G , A_n contient au moins $n+1$ points.

Théorème 9. *L'intersection de deux ensembles paramétriquement supergénériques est paramétriquement supergénérique.*

Démonstration. On reprend la démonstration du théorème précédent et on montre que, si A_n convient à X et B_n convient à Y , alors $A_n.B_{c(n)}$ convient à $X\cap Y$, où $c(n)$ est le cardinal de A_n . **Fin**

Théorème 10. *Si le groupe* G *est commutatif, tout ensemble supergénérique est paramétriquement supergénérique.*

Démonstration. Nous montrons l'existence de A_n par induction sur n. Pour $n = 1$, si $G = a_1.X \cup \ldots \cup a_m.X$, on a aussi $G = a_1.a.X \cup \ldots \cup a_m.a.X$ pour n'importe quel a, puisque G est commutatif, et on pose $A_1 = \{a_1, \ldots a_m\}$.

Supposons $A_n = \{a_1, \ldots a_s\}$ déjà construit, et considérons $X' = b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X$; l'intersection Y des $a_i.X$ est contenue dans la réunion des $a_i.(X \cap X')$; comme Y est générique, on trouve $c_1, \ldots c_k$ tel que G soit la réunion des $c_j.Y$, et alors G est la réunion des $c_j.a_i.(X \cap X')$; comme on peut tout translater par un quelconque a, vu la commutativité de G, on peut prendre pour A_{n+1} les produits $c_j.a_i$. **Fin**

Considérons de nouveau un groupe G avec un sous-groupe H d'indice infini tel que toute partie finie de G soit contenue dans un conjugué de H ; quels que soient $y_1, \ldots y_s$, il existe donc a tel que $y_1.a.H \cap \ldots \cap y_s.a.H$ ne soit pas vide, et le complément de H n'est pas paramétriquement supergénérique.

Question 3. *Existe-t'il des ensembles supergénériques non uniformément ? des ensembles uniformément supergénériques non* m-*supergénériques pour un certain entier* m *? des ensembles paramétriquement supergénériques dont on ne puisse borner linéairement le nombre d'éléments de l'ensemble* A_n *?*

7. Sous-ensembles définissables d'un groupe stable

Cette section et la suivante on une forte saveur modèle-théorique, qu'un lecteur non-logicien ne pourra apprécier qu'en se laissant guider par l'exemple des groupes linéaires. Pour le ménager, nous ne donnerons le détails des démonstrations que dans le cas ω-stable, où les sous-groupes ont des clôtures définissables ; nous laisserons la technique du cas général, où les clôtures sont infiniment définissables, aux experts en Théorie des modèles, ou bien à ceux qui sont disposés à consulter les bons auteurs.

Comme il a été remarqué dès les temps préhistoriques (POIZAT 1981, POIZAT 1987), les sous-ensembles définissables d'un groupe stable Γ ont, vis-à-vis de la généricité, des propriétés singulières ; tout d'abord, pour eux, être générique à droite, ou à gauche, ou de façon bilatère, c'est la même chose ; ensuite, la réunion de deux parties définissables ne peut être générique que si au moins l'une d'entre elle l'est, ce qui permet de définir des types génériques, qui ne satisfont que des formules génériques. Le groupe agit par translation sur ces types génériques, et cette action est transitive (à condition que le groupe soit assez saturé dans le cas où sa composante connexe est infiniment définissable) ; la composante connexe contient un unique générique, que nous appelons le générique principal. Un sous-ensemble définissable est générique s'il contient un type générique, et supergénérique s'il les contient tous ; il est donc supergénérique si et seulement si son complémentaire n'est pas générique.

Pour ce qui est des produits, si G est H sont des groupes stables, les types génériques du produit $G \times H$ sont obtenus en réalisant de manière indépendante un type générique de G et un type générique de H ; en s'appuyant sur la définissabilité de la généricité, on voit qu'une partie X définissable du produit $G \times H$ est générique si et seulement si les a dont la coupe $X_a = \{ y / (a,y) \in X \}$ est générique dans H forment une partie générique de G, et qu'on a la même chose pour la supergénéricité.

Cela étant dit, nous commençons par un lemme technique qui nous facilitera la vie :

Lemme 11. *Soient* Γ *un groupe stable et* X *une partie définissable de* Γ *; si, pour un uplet* $\underline{e}$ *de réalisations indépendantes du générique principal de* Γ *(au dessus des paramètres de* X *),* $e_1.X \cup \ldots \cup e_n.X$ *est supergénérique, alors* X *est lui-aussi supergénérique.*

Démonstration. Nous supposons Γ assez saturé, et nous considérons un point a générique au dessus des paramètres de X et de $\underline{e}$; a est dans $e_1.X \cup \ldots \cup e_n.X$: pour un certain i, $e_i^{-1}.a$ appartient à X ; mais $e_i^{-1}.a$ est un point générique de même type que a, si bien que X contient tous les génériques. **Fin**

Nous montrons ensuite que les parties définissables supergénériques d'un groupes stable le sont paramétriquement, et même bien plus encore. Voici d'abord ce qui se passe en dimension finie, et qui généralise la démonstration de notre Lemme 1 :

Lemme 12. *Soient* Γ *un groupe de rang de Morley fini* d *, et* X *une partie définissable de* Γ *; alors :*

(i) X *est supergénérique si et seulement si les* $(d+1)$*-uplets* $\underline{x}$ *tels que* $x_0.X \cup \ldots \cup x_d.X = \Gamma$ *forment une partie supergénérique de* Γ^{d+1} ;

(ii) et quand X *est supergénérique, les uplets* $\underline{y}$ *de longueur* $(n+1).d + 1$ *tels que* $y_0.X' \cup \ldots \cup x_{(n+1).d}.X' = \Gamma$ *, pour tout ensemble* X' *qui est intersection d'au plus* n *translatés de* X *, forment une partie supergénérique de* $\Gamma^{(n+1).d+1}$.

Démonstration. Si X satisfait à la condition (i), il est supergénérique d'après le Lemme 11. Supposons réciproquement que X soit supergénérique, et considérons e_0 , ... e_d génériques et indépendants au-dessus des paramètres de X ; si a est un point de Γ , son poids est inférieur à d , si bien que, pour au moins un i , e_i reste générique sur a ; $e_i^{-1}.a$ est donc générique, et appartient à X par hypothèse, si bien que $e_1.X \cup \ldots \cup e_d.X = \Gamma$, que l'ensemble des $\underline{x}$ tels que $x_0.X \cup \ldots \cup x_d.X = \Gamma$ contient tous les points génériques de Γ^{d+1} .

Pour le point (ii) , on considère e_0 , ... $e_{(n+1).d}$ génériques et indépendants ; si a , b_1 , ... b_n sont des points quelconques de Γ , l'un des e_i reste générique sur $a\hat{}\underline{b}$, les $b_j^{-1}.e_i^{-1}.a$ sont génériques, et a est dans $e_i.(b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X)$; on conclut de même. **Fin**

Voici ce que devient ce lemme dans le cas général :

Lemme 13. *Soit* Γ *un groupe stable ; à toute formule* $\varphi(x,\underline{y})$ *est associé un entier* δ *tel que, pour toute partie* X *de* Γ *défini par une formule* $\varphi(x,\underline{c})$ *:*

(i) X *est supergénérique si et seulement si les* $(\delta+1)$*-uplets* $\underline{x}$ *tels que* $x_0.X \cup \ldots \cup x_\delta.X = \Gamma$ *forment une partie supergénérique de* $\Gamma^{\delta+1}$;

(ii) et quand X *est supergénérique, les uplets* $\underline{y}$ *de longueur* $(n+1).\delta + 1$ *tels que* $y_0.X' \cup \ldots \cup x_{(n+1).\delta}.X' = \Gamma$ *, pour tout ensemble* X' *qui est intersection d'au plus* n *translatés de* X *, forment une partie supergénérique de* $\Gamma^{(n+1).\delta+1}$.

Démonstration. Nous supposons X supergénérique, et nous considérons la suite de Morley e_0 , e_1 , ... e_n , ... du générique principal de Γ (suffisament saturé) au dessus des paramètres $\underline{c}$ de X et d'un système de représentants fixé R de $G/G°$; si X est défini par la formule $\varphi(x,\underline{c})$, pour tout a de Γ , la formule $\varphi(x.a,\underline{c})$ est satisfaite par le générique principal, et est donc cofinalement vraie dans sa suite de Morley. Mais cette dernière est uniformément insécable (voir POIZAT 1981a, POIZAT 1985, Ch. 12), si bien qu'à la formule $\varphi(x.y,\underline{z})$ est associé un entier δ' tel que pour tous α et $\underline{\beta}$ dans Γ , ou bien tous les points de la suite de Morley sauf au plus δ' satisfont à la formule $\varphi(x.\alpha,\underline{\beta})$, ou bien tous les points de cette suite sauf au plus δ' satisfont à son contraire. Autrement dit, la formule est satisfaite par le type générique principal si et seulement si elle l'est par au moins l'un des $\delta'+1$ premiers points de sa suite de Morley, si bien que $\Gamma = e_0.X \cup \ldots \cup e_{\delta'}.X$.

Si nous supposons pour simplifier que $G°$ est définissable, étant d'indice fini s dans G , nous considérons l'intersection Y des $\alpha.X$ où α parcourt notre système de représentants R . Comme Y est lui aussi supergénérique, si on pose $\delta = s.\delta'$, on voit que $\Gamma = e_0.Y \cup \ldots \cup e_\delta.Y$; en conséquence $\Gamma = e_0.\alpha_0.X \cup \ldots \cup e_\delta.\alpha_\delta.X$ pour n'importe quel choix des α dans R , si bien que l'ensemble des $\underline{x}$ tels que $x_0.X \cup \ldots \cup x_d.X = \Gamma$ contient tous les types génériques de $\Gamma^{\delta+1}$.

Le point (ii) se montre de la même façon, en utilisant l'insécabilité des suites de Morley.

Dans le cas général, il faut localiser la démonstration, en considérant le stabilisateur Γ_φ des $\varphi(x.y,\underline{z})$-types des génériques, lequel est définissable et d'indice fini dans Γ , et prendre pour Y l'intersection des $\alpha.X$ où α parcourt un système de représentants de Γ/Γ_φ . **Fin**

Dans le cas d'un groupe superstable de rang U fini égal à d , on peut toujours prendre $\delta = d$, si bien que le Lemme 12 reste valable ; mais en général, faute d'une majoration du poids, on ne peut borner δ par un entier fixe : il dépend de la formule définissant l'ensemble X .

8. Sous-groupes d'un groupe stable

Les propriétés que nous avons établies pour les sous-ensembles définissables d'un groupe stable Γ se transmettent en fait à leurs traces sur n'importe quel sous-groupe G de Γ : c'est d'ailleurs ce qui a motivé la définition des ensembles supergénériques. Comme Γ est sous-groupe de lui-même, nous aurions pu économiser de la place en n'énonçant que les théorèmes de la présente section ; toutefois, comme la concision nous a semblé s'approcher dangereusement de la confusion, nous lui avons préféré la redondance, pour éviter de mélanger les poulets et les cochons.

Si G est un sous-groupe quelconque d'un groupe ω-stable Γ, il existe un plus petit sous-groupe définissable de ce dernier contenant G, que nous appelons *clôture définissable de* G. Quand G est seulement stable, cette clôture peut n'être seulement qu'infiniment définissable, c'est-à-dire intersection d'une famille de groupes définissables ; ce que nous appelons les sous-ensembles définissables d'un tel groupe, ce sont les traces sur ce dernier des parties définissables du groupe ambiant ; comme on doit travailler dans des fermés des espaces de types, la théorie de la généricité pour les groupes infiniment définissables ne posent pas de difficulté, et on peut établir à leur propos tout ce que nous avons dit des groupes stables eux-mêmes.

L'observation principale de WAGNER 19990 et NEWELSKI 1991, c'est que si G est un sous-groupe quelconque d'un groupe stable, dont nous notons Γ la clôture définissable, les types génériques de Γ sont finiment satisfaisable dans G (voir POIZAT 2013 pour une démonstration dans le cas des groupes algébriques) ; ils en déduisent, comme nous l'avons fait dans le cas particulier de notre Lemme 2, qu'*une partie définissable* Ξ *de* Γ *est générique dans* Γ *si et seulement si son intersection* X *avec* G *est générique dans* G.

Nous ajoutons qu'*une partie définissable* Ξ *de* Γ *est supergénérique dans* Γ *si et seulement si son intersection* X *avec* G *est supergénérique dans* G. En effet, d'une part si Ξ est supergénérique, pour tous b_1 , ... b_n dans G, $b_1.\Xi \cap \ldots \cap b_n.\Xi$ est générique dans Γ, et donc $b_1.X \cap \ldots \cap b_n.X$ est générique dans G ; d'autre part, si X est supergénérique, son complément n'est pas générique, si bien que le complément de Ξ n'est pas générique dans Γ, et Ξ y est supergénérique.

Nous remarquons donc que, si G est sous groupe d'un groupe stable et X la trace sur G d'une partie définissable de ce dernier, X est supergénérique si et seulement si son complémentaire n'est pas générique ; on observe aussi que, pour X, être générique ou supergénérique à gauche, à droite, ou de façon bilatère, c'est la même chose, car il en est ainsi pour l'ensemble Ξ associé. Par conséquent X est générique, ou supergénérique, si et seulement si X^{-1} l'est.

Venons-en à l'extension des lemmes de la section précédente :

Lemme 14. *Soient* G *un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini* d *, et* X *l'intersection avec* G *d'une partie définissable de ce dernier ; alors :*

(i) X *est supergénérique si et seulement si les* $(d+1)$*-uplets* $\underline{x}$ *tels que* $x_0.X \cup ... \cup x_d.X = G$ *forment une partie supergénérique de* G^{d+1} ;

(ii) et quand X *est supergénérique, les uplets* $\underline{y}$ *de longueur* $(n+1).d + 1$ *tels que* $y_0.Y \cup ... \cup x_{(n+1).d}.Y = G$ *, pour tout ensemble* Y *qui est intersection d'au plus* n *translatés de* X *, forment une partie supergénérique de* $G^{(n+1).d+1}$.

Démonstration. Nous notons Γ la clôture définissable G , et Ξ un ensemble définissable dont provient X . Si Ξ est supergénérique, l'ensemble Ψ des $\underline{x}$ tels que $x_0.\Xi \cup ... \cup x_d.\Xi = \Gamma$ est supergénérique dans Γ^{d+1} , et son intersection Z' avec G^{d+1} est supergénérique dans ce dernier ; or Z' est contenu dans l'ensemble Z des $\underline{x}$ de G^{d+1} tels que $x_0.X \cup ... \cup x_d.X = G$; la condition (i) est donc vérifiée quand X est supergénérique, et la condition (ii) se montre de même.

Supposons réciproquement que Z soit supergénérique ; si $\underline{x}$ est dans ce dernier, le complément de $x_0.\Xi \cup ... \cup x_d.\Xi$ est disjoint de G , et ne peut donc contenir aucun type générique ; par conséquent $x_0.\Xi \cup ... \cup x_d.\Xi$ est supergénérique ; l'ensemble Ω des $\underline{x}$ de Γ^{d+1} tels que $x_0.\Xi \cup ... \cup x_d.\Xi$ soit supergénérique est définissable, et son intersection Z" avec G^{d+1} contient Z . Il est donc supergénérique dans Γ^{d+1} et Ξ est supergénérique dans Γ d'après le Lemme 11. **Fin**

Remarque. L'ensemble Z n'est peut-être pas lui-même la trace d'un ensemble définissable, mais il contient l'ensemble supergénérique Z' qui, lui, l'est ; le résultat s'applique donc aussi à Z , et s'itère à l'infini.

Lemme 15. *Soient* G *un sous-groupe d'un groupe stable , et* X *l'intersection avec* G d'*une partie définissable de ce dernier ; alors il existe un entier* δ *tel que :*

(i) X *est supergénérique si et seulement si les* $(\delta+1)$*-uplets* $\underline{x}$ *tels que* $x_0.X \cup ... \cup x_\delta.X = G$ *forment une partie supergénérique de* $G^{\delta+1}$;

(ii) et quand X *est supergénérique, les uplets* $\underline{y}$ *de longueur* $(n+1).\delta + 1$ *tels que* $y_0.X' \cup ... \cup x_{(n+1).\delta}.X' = G$ *, pour tout ensemble* X' *qui est intersection d'au plus* n *translatés de* X *, forment une partie supergénérique de* $G^{(n+1).\delta+1}$.

Démonstration. Localiser celle du lemme précédent. **Fin**

Remarque. Il n'est pas nécessaire d'utiliser la sophistication de la théorie de Wagner et de Newelski pour établir tous nos résultats ; on peut en effet remarquer que certains arguments combinatoires mettant en jeu les sous-ensembles définissables d'un groupe stable s'appliquent aussi bien à leurs traces sur un sous-groupe quelconque (comme par exemple la démonstration du Lemme 5.1 de POIZAT 1987). On remarque en passant que, si Ξ est définissable dans le groupe ω-stable Γ , et si G est un sous-groupe de Γ , le rang de Cantor de $X = \Xi \cap G$ à l'intérieur de la famille des traces sur G des parties définissables de Γ est inférieur à celui de Ξ parmi les parties définissables de Γ .

Nous concluons la section par une remarque sur les produits :

Lemme 16. *Supposons que le groupe* $G \times H$ *soit un sous-groupe d'un groupe stable, et que* X *soit l'intersection avec* $G \times H$ *d'une partie définissable de ce dernier. Alors* X *est supergénérique si et seulement si les points de* G *de coupe supergénérique dans* H *forment une partie supergénérique de* G .

Démonstration. Notons Γ la clôture définissable de G , et Γ' celle de H ; ces deux groupes commutent l'un avec l'autre, si bien qu'on obtient un homomorphisme f définissable de $\Gamma \times \Gamma'$ sur $\Gamma.\Gamma'$ (le groupe engendré par Γ et Γ') qui vaut l'identité sur $G \times H$; si Ξ est une partie définissable de $\Gamma.\Gamma'$, dont l'intersection avec $G \times H$ est X , l'intersection de $f^{-1}(\Xi)$ avec $G \times H$ est également X . Autrement dit, nous sommes ramenés au cas où la clôture définissable de $G \times H$ est $\Gamma \times \Gamma'$.

Soit donc Ξ une partie définissable de $\Gamma \times \Gamma'$, dont l'intersection avec $G \times H$ est X ; X est supergénérique si et seulement si Ξ est supergénérique, si et seulement si l'ensemble (définissable) Ψ des points α de Γ de fibre Ξ_α supergénérique dans Γ' est supergénérique dans Γ , si et seulement si l'intersection Y de Ψ et de G est supergénérique dans G ; or Y est formé des points a de G de fibre $X_a = \Xi_a \cap H$ supergénérique dans H . **Fin**

9. Dualité : ensembles largement génériques

Les lemmes des sections précédentes justifient l'introduction des définitions suivantes : une partie X d'un groupe G est dite *largement générique* si, pour un certain n , les n-uplets $\underline{a}$ tels que $a_1.X \cup \ldots \cup a_n.X = G$ forment un sous-ensemble supergénérique de G^n ; elle est dite *très largement générique* si à chaque entier n est associé un entier $\lambda(n)$ tel que les $\lambda(n)$-uplets $\underline{y}$ tels que $y_1.X' \cup \ldots \cup y_{\lambda(n)}.X' = G$ pour toute intersection X' de n translatés de X forment une partie supergénérique de $G^{\lambda(n)}$.

Les résultats des Sections 7 et 8 se résument ainsi : pour les traces des ensembles définissables d'un groupe stable sur un de ses sous-groupes, être supergénérique équivaut à être largement générique, et aussi à être très largement générique.

Nous avons donné un exemple d'ensemble supergénérique non paramétriquement générique, et a fortiori non très largement générique.

En reprenant la démonstration de l'Observation fondamentale, on voit que, si G est commutatif, l'intersection de deux ensembles X et X' très largement génériques l'est aussi.

A part cela, ces notions semblent difficiles à manier dans un cadre général, et nous ne pouvons rien faire de plus à leur propos que de poser deux questions et donner un exemple :

Question 4. *Existe-t'il des ensembles largement générique non supergénériques, et des ensembles supergénériques non largement génériques ?*

Et même :

Question 5. *L'intersection de deux ensembles largement génériques est-elle toujours largement générique ?*

Pour l'exemple, nous commençons par un résultat d'allure technique :

Lemme 17. *Soit* G *un groupe commutatif, et* X *une partie de* G *telle que les différences de deux éléments du complémentaire de* X *forment un ensemble cosupergénérique ; alors* X *est très largement générique, et satisfait même la conclusion du Lemme 15 avec* $\delta = 1$.

Démonstration. Nous notons additivement la loi de G , et nous appelons Z l'ensemble des différences de deux points du complémentaire de X . Considérons $n+1$ points $b_0 , \ldots b_n$ de G tels que $b_i - b_j \notin Z$ si $i < j$; d'après le Lemme 5, ces $(n+1)$-uplets forment une partie supergénérique de G^{n+1} . Quel que soit le point a , si $i \neq j$, $b_i+a+Y \cap b_j+a+Y = \emptyset$; si donc Y' est de la forme $a_1+Y \cup \ldots \cup a_n+Y$, alors $b_0+Y' \cap \ldots b_n+Y' = \emptyset$, et $G = b_0+X' \cup \ldots \cup b_n+X'$ où X' désigne le complément de Y' . **Fin**

Ce résultat s'applique au cas où X est le complément d'un sous-groupe H de G d'indice infini.

Plus intéressante est la situation suivante : nous dirons qu'un ensemble Y générateur d'un groupe G est *rapide* s'il existe un entier s tel que tout élément de G s'exprime comme produit de moins de s éléments de Y ou d'inverses d'éléments de Y . Sinon, nous dirons qu'il est *lent* ; on observe alors que, pour tout s , l'ensemble Y_s des points obtenus en moins de s étapes à partir de Y est lui-aussi un ensemble générateur lent.

Que G soit commutatif ou non, le complémentaire X d'un système générateur lent Y est 2-supergénérique ; en effet, l'intersection d'un nombre fini de translatés de X contient le complémentaire X_s de Y_s pour s assez grand (et imprévisible !), et $G = X_s \cup b.X_s$ dès que $b \notin Y_{2s}$. Quand G est commutatif, nous pouvons donc appliquer le Lemme 17 aux complémentaires d'ensembles générateurs lents.

Et puisque cet article se spécialise dans les questions naïves, nous osons conclure la section par celle qui suit :

Question 6. *Est-ce que tout groupe infini possède un sous-ensemble générateur lent infini ?*

10. Les entiers

Nous considérons dans cette section et la suivante les groupes infinis les plus petits possible, qui offrent des situations en quelque sorte opposées : le groupe cyclique infini est finiment engendré, résiduellement fini, et ses sous-groupes propres sont d'indice fini ; les groupes de Prüfer sont divisibles, localement finis, leurs sous-groupes propres étant finis.

Comme tout groupe abélien, le groupe $(Z,+)$ est une structure modulaire (et en particulier stable) : chacune de ses parties définissables, dans le pur langage des groupes, est une combinaison booléenne d'un nombres fini de cossettes modulo des sous-groupes, si bien que ses seules parties supergénériques ainsi définissables sont les ensembles cofinis.

Considérant d'une part que certains des théorèmes les plus profonds de la géométrie arithmétique affirment que la structure induite par certaines variétés abéliennes sur leur sous-groupes de type fini est modulaire (voir GOODE 1997), et d'autre part mon incapacité à produire un contre-exemple, je prends le risque de poser la question suivante :

Question 7. *Soit X une partie de Z supergénérique, qui soit l'intersection avec Z d'une partie définissable d'un groupe de rang de Morley fini dans lequel Z est plongé ; est-ce-que X est nécessairement cofinie ?*

La vraie question est d'ailleurs de savoir si les instruments introduits dans cet article sont utiles pour aborder ce genre de problèmes (voir le Théorème 22 qui suit).

Une partie X du groupe cyclique infini Z est générique si et seulement si $Z = 1+X \cup 2+X \cup \ldots n+X$ pour n assez grand ; autrement dit, X est générique dans Z si et seulement s'il existe un entier n tel que chaque segment de longueur n contienne au moins un point de X , soit encore un entier n qui limite la longueur des segments contenus dans le complémentaire de X .

Lemme 18. *Une partie X de Z est supergénérique si et seulement si elle satisfait à la condition suivante : pour tout entier n , il existe un entier $\chi(n)$ tel que tout intervalle de longueur $\chi(n)$ contienne n éléments consécutifs tous dans X .*

Démonstration. La condition signifie que $Z = 1+X_n \cup \ldots \cup \chi(n)+X_n$, où $X_n = 1+X \cap 2+X \cap \ldots \cap n+X$; elle exprime bien la supergénéricité de X . **Fin**

Nous pouvons adapter la définition des ensembles espacés introduits lors de la démonstration du Théorème 4, en utilisant cette fois la distance usuelle entre les entiers : nous dirons que Y est m-*espacé* si, pour chaque entier n , il n'y a qu'un nombre fini de segments de longueur n qui contiennent plus de m points dans Y ; nous dirons que X est m-*coespacé* si c'est le complémentaire d'un ensemble m-espacé ; 0-espacé signifie fini ; en jouant sur la parité des intervalles séparant deux points consécutifs dans l'ensemble, on fabrique facilement une infinité continupotente d'ensembles 1-espacés.

Il est clair qu'un translaté d'un ensemble m-coespacé est m-coespacé, et que l'intersection d'un ensemble m-coespacé et d'un ensemble m'-coespacé est (m+m')-coespacé. Le résultat suivant donne une estimation de leur fonction γ meilleure que la linéarité.

Théorème 19. *Le complémentaire d'un ensemble* m-*espacé est* (2m+2)-*supergénérique.*

Démonstration. Soit Y un ensemble m-espacé, de complémentaire X ; comme les propriétés de généricité sont stables par translation, on peut se contenter de translater par des entiers positifs. Soit donc Y' la réunion d'un nombre fini de translatés de Y , par des nombres positifs, tous strictement inférieurs à un entier a . Supposons que les points x , x+a , x+2a , ... x+ma soient tous dans Y' ; il y a donc un point de Y dans]x-a x] , un point de Y dans]x+a x+2a] , ... et un point de Y dans]x+(m-1)a x+ma] ; nous trouvons donc au moins m+1 points de Y dans un intervalle de longueur (m+1)a , chose qui ne peut se produire qu'un nombre fini de fois. Si donc nous notons X' le complémentaire de Y' , $X' \cup a+X' \cup 2a+X' \cup \ldots \cup ma+X'$ est cofini, et la réunion de deux de ses translatés recouvre Z . **Fin**

Les ensembles coespacés, c'est-à-dire ceux qui sont m-coespacés pour un certain entier m , forment donc un filtre d'ensembles supergénériques clos par translation, dont les fonctions γ sont constantes. Ces constantes ne sont pas bornées, comme le montre le contre-exemple suivant :

Théorème 20. *Il existe un ensemble* m-*coespacé qui n'est pas* m-*générique.*

Démonstration. Nous commençons par ordonner lexicographiquement tous les m-uplets croissants de nombres strictement positifs : les uplets dont le plus grand élément est inférieur à un α donné forment donc un segment initial de cet ordre. La construction de notre ensemble A se fait par induction ; A contient tous les nombre négatifs ; à la n-ème étape, nous définissons la trace de A sur un segment $]-\infty\ a_n]$; nous commençons par mettre hors de A tous les nombres de la forme $a_{n-1}+\alpha_1$, ... $a_{n-1}+\alpha_m$, où $(\alpha_1, \ldots \alpha_m)$ est le n-ème m-uplet dans l'ordre lexicographique ; enfin, posant $a_n = a_{n-1}+\alpha_m+n$, nous mettons dans A tous les autres nombres du segment $]a_{n-1}\ a_n]$. **Fin**

On peut généraliser la notion d'ensembles co-espacés en introduisant trois fonctions de densité associées à un ensemble X :

- $\delta(n)$ est le plus petit nombre tel que tout intervalle de longueur n ne contienne pas plus de $\delta(n)$ points hors de X ;

- $\delta'(n)$ est le plus petit nombre tel que tout intervalle de longueur n , à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, ne contienne pas plus de $\delta'(n)$ points hors de X ;

- $\delta''(n)$ est le plus petit nombre pour lequel il existe un sous-ensemble cosupergénérique Y_n , tel que tout intervalle de longueur n ne contienne pas plus de $\delta''(n)$ points hors de $X \cup Y_n$.

Il est clair que $\delta(n) \geq \delta'(n) \geq \delta''(n)$. L'ensembles des nombres qui ne comportent que deux chiffres quand on les écrit en base 2 n'est pas dispersé, mais la fonction $n/1+\delta(n)$ de son complément tend vers l'infini.

Théorème 21. *Un ensemble est supergénérique si et seulement si sa fonction* $n/1+\delta''(n)$ *n'est pas bornée.*

Démonstration. Tout translaté de X a la même fonction δ'' , si bien que l'intersection de m translatés de X a sa densité est majorée par $m.\delta''$. Il suffit donc de montrer que X est générique si $n/\delta''(n)+1$ n'est pas bornée ; or $Z = 1+(X \cup Y_n) \cup \ldots \cup n+(X \cup Y_n)$ dès que $\delta(n) < n$; $X \cup Y_n$ est donc générique, ainsi que X puisque le complémentaire de Y_n est supergénérique.

Si X est supergénérique, $\delta''(n) = 0$ puisqu'on peut prendre pour Y_n le complémentaire de X ! **Fin**

Dans Z , l'ensemble des carrés est espacé, mais c'est un ensemble générateur rapide puisque tout entier se met sous la forme $x^2 + (y+1)^2 - y^2$.

Par contre, l'ensemble des puissances de 2 , ou de n'importe quel entier supérieur à 2 , est lent : en effet, si un nombre est somme ou différence de s puissances de 2 , il n'a pas plus de $2.s$ alternances de chiffres. D'après le Lemme 17, il ressemble à la trace sur Z d'un ensemble définissable dans un groupe stable, et en effet :

Théorème 22. *La structure formée du groupe additif des entiers et d'un prédicat* Π *interprétant les puissances de* 2 *est superstable de rang de Lascar* ω .

Démonstration. Dans une extension élémentaire ω-saturée de $(Z ; +, 1, \Pi)$, les éléments de Π qui sont non-standards, c'est-à-dire non entiers, se répartissent en une infinité de chaînes de type Z , chaque élément d'une telle chaîne étant le double du précédent. Ils sont donc infiniment divisibles par 2 ; leurs types de divisibilité possibles sont formés de congruences $x \sim u$ (mod $2n+1$) vérifiées par des 2^m arbitrairement grands, et chacun de ces types se répète une infinité de fois (remarquons que le type de divisibilité de x détermine celui de $2x$ et celui de $x/2$). Toute liaison de la forme $m_1.2^{n1} + \ldots + m_s.2^{ns} = 0$, où les m_i sont des entiers relatifs de module strictement inférieur à 2^n , et où la différence entre deux exposants n_i est minorée par n , est triviale ; en conséquence, des points non-standards de Π pris dans des chaînes différentes engendrent librement un groupe commutatif libre : un point du groupe engendré par Π s'écrit de manière unique sous la forme $n_0 + n_1.\pi_1 + \ldots n_s.\pi_s$, où les π_i sont pris dans des chaînes différentes, où $n_1 , \ldots n_s$ sont des entiers relatifs impairs, et où n_0 est un entier relatif arbitraire.

Cette extension est isomophe à un produit $\underline{Z}\times D_1\times D_2$, où $\underline{Z}$ est la complétion profinie de Z (la coordonnée sur $\underline{Z}$ donne le type de divisibilité), où D_1 et D_2 sont des groupes divisibles qui sont des espaces vectoriels de dimension infinie sur Q , et où $\underline{Z}\times D_1$ contient le groupe engendré par Π .

On voit facilement, par va-et-vient infini (POIZAT 1985, Ch. 1), que deux structures satisfaisant les conditions ci-dessus sont élémentairement équivalentes, si bien que nous avons ainsi caractérisés les extensions élémentaires ω-saturées de $(Z ; +, 1, \Pi)$. Les types sont alors faciles à décrire ; les points non standards de Π sont de rang un ; les points du groupe engendré par Π ont pour rang le nombre d'éléments non-standards de leur expression canonique ; restent les points génériques, dont le principal est celui qui est infiniment divisible. **Fin**

Nous le répétons : dans ce théorème, 2 peut-être remplacé par n'importe quel entier > 1 . On notera l'obstacle à la finitude du rang : si x est somme de s points de Π non standards et indépendants, il les algébrise tous ; mais cela ne prouve pas que Π ne puisse être induit par une partie définissable d'un groupe de rang fini.

On montre de la même façon que le groupe additif des rationnels, muni d'un prédicat interprétant l'ensemble des 2^n , est une structure ω-stable de rang de Morley ω .

Nous quittons notre étude des parties supergénériques des entiers avec un sentiment d'insatisfaction, et en nous posant la question suivante :

Question 8. *Est-il possible d'établir une typologie utile et raisonnable des parties supergénériques de Z , et en particulier de celles qui sont largement génériques ?*

11. Groupes de Prüfer

Le groupe de Prüfer P associé à un nombre premier p est la clôture divisible du groupe cyclique à p éléments ; il est réunion d'une suite croissante de groupe cycliques $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots$, le n-ème ayant p^n éléments ; les P_n sont ses seuls sous-groupes propres. Dans le pur langage des groupes, c'est une structure fortement minimale, dont les seules parties définissables sont finies ou cofinies.

Si P est plongé dans un groupe stable, sa clôture définissable est comme lui divisible, et donc connexe, si bien que les intersections avec P des parties définissables du groupe ambiant sont supergénériques, ou bien de complément supergénérique.

Une partie X de P est générique s'il existe un entier n tel que toute cossette modulo P_n ait un représentant dans X ; elle est supergénérique s'il existe une fonction $\varphi(n)$ telle toute cossette modulo $P_{\varphi(n)}$ ait un représentant dont toute la cossette modulo P_n est incluse dans X .

On définit de la manière suivante les trois fonctions de densité associées à un ensemble X :

- $\delta(n)$ est le plus petit nombre tel que toute cossette modulo P_n ne contienne pas plus de $\delta(n)$ points hors de X ;
- $\delta'(n)$ est le plus petit nombre tel que toute cossette modulo P_n , à l'exception d'un nombre fini d'entre elles, ne contienne pas plus de $\delta'(n)$ points hors de X ;
- $\delta''(n)$ est le plus petit nombre pour lequel il existe un sous-ensemble cosupergénérique Y_n , tel que toute cossette modulo P_n ne contienne pas plus de $\delta''(n)$ points hors de $X \cup Y_n$.

On montre comme dans le Théorème 21 qu'un ensemble est supergénérique si et seulement si sa fontion $p^n/1+\delta''(n)$ n'est pas bornée.

Les ensembles m-coespacés sont ceux pour lesquels $\delta'(n) \leq m$. Encore plus éparpillés que les ensembles espacés sont ceux que nous qualifions d'*épars,* qui sont ainsi définis : Y est m-épars si, pour tout n sauf un nombre fini, il n'a pas plus de m points dans $P_{n+1} - P_n$.

Théorème 23. *Le complémentaire d'un ensemble* m-*espacé est* (2m+2)-*supergénérique.*

Démonstration. Soient Y un ensemble m-espacé, et Y' la réunion des translatés de Y par un nombre fini de points, qui engendrent un certain P_n ; si nous prenons n' assez grand, nous trouvons dans $P_{n'}$ $m+1$ points $a_0 , \dots a_m$ qui deux-à-deux ne sont pas congrus modulo P_n . Supposons que, dans une classe modulo $P_{n'}$, il y ait un point x tel que tous les points $a_0.x , \dots a_n.x$ soient dans Y' ; il y a donc un point x_0 congru au premier modulo P_n qui est dans Y , ... un point x_n congru au dernier modulo P_n qui est dans Y , et tous ces x_i doivent être distincts, si bien que cette situation ne peut se produire qu'un nombre fini de fois. Autrement dit $a_0.Y' \cap \dots \cap a_n.Y'$ est fini. **Fin**

Le groupe de Prüfer a des systèmes générateurs lents (et épars) : considérons en effet une suite $a_0 , a_1 , \dots a_n , \dots$ telle, pour chaque n , a_n soit dans $P_{n+1} - P_n$, et $a_{n+1}{}^p = a_n$ (une telle suite est unique à isomorphie près). La raison pour laquelle cet ensemble générateur est lent est la même que dans le cas des entiers : chaque point de P_{n+1} s'écrit de manière unique comme produit de puissances de $a_0 , \dots a_n$ d'exposants compris entre 0 et $p-1$. On montre pour lui aussi l'analogue du Théorème 22 :

Théorème 24. *La structure formée du groupe de Prüfer et d'un prédicat* Π *interprétant la suite génératrice lente décrite ci-dessus est* ω*-stable de rang de Morley* ω .

Démonstration. Une extension élémentaire ω-saturée de $(P ; . , \Pi)$ est isomorphe à $P \times D_1 \times D_2$, où D_1 et D_2 sont des espaces vectoriels sur Q de dimension infinie, $P \times D_1$ étant la clôture divisible du groupe engendré par Π . Les points de Π non-standards, c'est-à-dire d'ordre infini, se répartissent en une infinité de chaînes de type Z , où chaque point a pour puissance p-ème le précédent ; des points pris dans des chaînes différentes engendrent librement un groupe libre commutatif. Les points non-standards de Π sont de rang un, ceux qui sont dans la clôture divisible du groupe engendré par Π sont de rang fini, et les autres sont les points génériques, de rang ω . **Fin**

Une dernière remarque : si l'ensemble X est réunion, pour chaque n , d'un nombre fini de cossettes modulo P_n , la différence symétrique entre X et un quelconque de ses translatés est finie : nous qualifierons d'*immobile* un ensemble qui a cette propriété. Dans Z , il n'y a que quatre ensembles immobiles, à un ensemble fini près, tandis que dans P il y en a beaucoup.

Question 9. *Peut-on décrire les ensembles immobiles de* P *? Que peut-on dire des parties de* P *ou de* Z *dont la différence symétrique avec chacun de leurs translatés est cosupergénérique ?*

On peut aussi se poser, à propos des groupes de Prüfer, les mêmes questions que nous nous sommes posées à propos des entiers.

12. Deux mots sur les corps

Une action naturelle sur les parties d'un corps K est celle du groupe PSL2(K) de ses homographies $\alpha.x + \beta / \gamma.x + \delta$, $\alpha.\delta \neq \beta.\gamma$; à strictement parler, comme une homographie non affine a un pôle, nous devons considérer les parties de K comme définies à un ensemble fini près (ce qui n'affecte pas leurs propriétés de généricité), ou bien comme des sous-ensembles de la droite projective. C'est à cette action du groupe projectif que nous ferons allusion quand nous parlerons des parties génériques ou supergénériques de K .

Nous disposons également de deux notions plus fortes de généricité : une partie X de K est dite additivement générique s'il existe a_1 , ... a_n dans K tels que $K = a_1+X \cup \ldots \cup a_n+X$, et multiplicativement générique s'il existe a_1 , ... a_n dans K tels que $K^* \subseteq a_1.X \cup \ldots \cup a_n.X$.

Un corps infini stable K est connexe, aussi bien additivement que multiplicativement (POIZAT 1981, POIZAT 1987, Ch. 5), et ses parties définissables additivement génériques et multiplicativement génériques sont les mêmes. Ce sont aussi ses parties définissables (super)génériques pour l'action du groupe projectif PSL2(K) , puisque tout type générique pour cette action est laissé fixe par les translations $x + \beta$. Si donc K est plongé dans un corps stable, les traces sur K des parties définissables de ce dernier sont supergénériques et à la fois additivement et multiplicativement génériques, ou bien de complémentaire supergénérique.

Rappelons que si K est plongé dans un corps L de rang de Morley fini, une partie définissable A de L est générique dans L si et seulement si $A \cap K$ est générique dans K ; en effet, L est alors la clôture définissable de K (voir WAGNER 2003).

Un demi-plan complexe est générique multiplicativement mais pas additivement ; le complémentaire du disque unité est générique additivement, mais pas multiplicativement. Mais, comme d'habitude, les contre-exemples supergénériques ont l'air plus durs à trouver :

Question 10. *Une partie supergénérique d'un corps infini est-elle toujours additivement générique ? est-elle toujours multiplicativement générique ?*

13. Groupes libres

Comme les groupes libres ont beaucoup de sous-groupes, et beaucoup d'automorphismes, il semble difficile de décrire tous leurs sous-ensembles supergénériques ; pour cette raison nous nous limiterons à leurs parties *semi-invariantes* définies ci-dessous, dont les ensembles définissables sont un cas particulier (cela élimine les constructions trop faciles, comme celle des ensembles espacés) ; cela nous conduit à quelques observations préselayiennes, dans la ligne initiée par POIZAT 1993.

Nous dirons qu'une partie d'une puissance cartésienne G^n du groupe G est une relation n-aire *invariante* si elle est préservée par tout automorphisme du groupe G , et qu'elle est *semi-invariante* si elle est préservée par tous les automorphismes qui fixent les points d'un m-uplet fini $\underline{a}$ d'éléments de G . Nous remarquons qu'une relation n-aire semi-invariante est de la forme $r(\underline{a},\underline{x})$, où r est une relation $(m+n)$-aire invariante : prendre la réunion des orbites, sous l'action des automorphismes de G , des $(\underline{a},\underline{x})$ tels que $\underline{x}$ satisfasse cette relation.

Nous considérons maintenant un groupe libre L_κ engendré par un ensemble E libre de cardinal κ infini. Comme toute permutation de E induit un automorphisme du groupe, l'orbite d'un uplet d'éléments de L_κ , sous l'action des automorphismes de ce dernier, est déterminée par la façon dont il s'exprime en fonction d'un n-uplet d'éléments de E ; nous considérons en particulier l'orbite $I(x)$ des points de E , et $I_n(\underline{x})$ l'orbite des n-uplets formés de points distincts pris dans E . Les relations invariantes sont les réunions d'orbites.

Nous appellerons *bons plongements* de L_κ dans L_λ ceux qui sont induits par une injection d'un ensemble libre générateur du premier dans un ensemble libre générateur du second.

Théorème 25. *Si* L_κ *est bien plongé dans* L_λ *, la restriction à* L_κ *d'une relation invariante de* L_λ *est une relation invariante de* L_κ *; réciproquement, chaque relation invariante de* L_κ *s'étend de manière unique en une relation invariante de* L_λ *, et l'extension ainsi obtenue est élémentaire.*

Démonstration. Soit E un ensemble libre et générateur de L_κ ; par compacité, dans une certaine extension élémentaire de L_κ (pour le langage Λ de toutes les relations invariantes de L_κ), on trouve E' ayant le cardinal qu'il faut pour compléter κ en λ , tel que pour chaque entier n les n-uplets d'éléments distincts pris dans $F = E \cup E'$ satisfassent I_n . Cet ensemble F est libre, et engendre une copie de L_λ dans laquelle L_κ est bien plongé.

Comme le fait qu'un uplet de L_λ satisfasse une relation du langage Λ ne dépend que de de la façon dont il s'exprime à partir d'un n-uplet injectif de la suite génératrice F , on en déduit facilement par va-et-vient infini que L_λ est extension élémentaire de L_κ , et aussi que, s'il est possible d'étendre les relations invariantes de L_κ en des relations invariantes de L_λ , cette façon de faire est la seule.

Il faut donc montrer les deux choses suivantes : (i) chaque relation I_n est invariante par les automorphismes du groupe L_λ (ii) deux n-uplets satisfaisant I_n se correspondent par un automorphisme du groupe L_λ .

Pour le premier point, considérons un n-uplet injectif $\underline{a}$ pris dans F et un automorphisme σ de L_λ . En procédant par va-et-vient, on trouve deux parties respectivement de F et de $\sigma.F$, de cardinal κ , qui engendrent le même groupe ; ce groupe, dans le langage Λ , est isomorphe à L_κ , et comme la restriction de σ en est un automorphisme, $\sigma.\underline{a}$ satisfait bien I_n .

Pour le deuxième point, si le n-uplet $\underline{a}$ satisfait à I_n , on peut l'envoyer tout d'abord dans L_κ par un automorphisme induit par une permutation de F , puis sur les n premiers éléments de E par un automorphisme de L_κ , qui se prolonge en un automorphisme de L_λ valant l'identité sur E' . **Fin**

Corollaire 26. *Si, dans* L_κ *,* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont dans* I_n *, on peut trouver* c *tel que* $(\underline{a},c)$ *comme* $(\underline{b},c)$ *soient dans* I_{n+1} .

Démonstration. Cela est vrai dans l'extension élémentaire de L_κ , pour le langage Λ , obtenue en ajoutant un point à sa suite génératrice. **Fin**

Il est clair que la trace sur E d'un ensemble X semi-invariant est finie ou cofinie ; en effet, X est conservé par tous les automorphismes fixant un certain uplet $\underline{e}$ extrait de E , si bien que les points de E , exceptés ceux de $\underline{e}$, sont ou bien tous dans X , ou bien tous dans son complément. Dans le premier cas nous dirons que X est *gras,* et dans le second qu'il est *fluet* ; les gras sont donc les complémentaires des fluets, la réunion de deux fluets est fluette, et l'intersection de deux gras est grasse.

On pourrait penser que cette définition dépendît de l'ensemble libre et générateur considéré ; mais comme X est gras, relativement à E, si et seulement s'il contient tous les points x satisfaisant $I_{n+1}(\underline{e},x)$ pour tout uplet $\underline{e}$ assez long d'éléments de E, le Corollaire 26 montre qu'il n'en est rien

Comme les inverses des points de E forment aussi une suite libre et génératrice, l'obésité est préservée par inversion.

Par ailleurs, si a est un élément de L_κ qui appartient au groupe engendré par les n premiers éléments de E, la suite $e_0, \dots e_{n-1}, a.e_n, \dots a.e_{n+\mu}, \dots$ étant libre et génératrice de L_κ, est une image homomorphe E ; si donc X est un ensemble gras semi-invariant, on voit que son translaté $a.X$ est gras. De même tout translaté d'un ensemble fluet est fluet, si bien que d'une part L_κ n'a pas de sous-groupe propre semi-invariant d'indice fini, et d'autre part un ensemble fluet ne saurait être générique.

Par conséquent les ensembles semi-invariants génériques, et a fortiori supergénériques, sont à chercher parmi les gras. Comme, d'après SELA 2013, L_κ est stable, ses parties définissables, qui sont bien sûr presqu'invariantes, sont uniformément supergénériques dès qu'elles sont grasses.

Question 11. *Est-ce que, pour un ensemble semi-invariant, être générique à droite, ou à gauche, ou bilatéralement, sont des propriétés équivalentes ? Est-ce que tout ensemble semi-invariant générique est supergénérique ?*

Exemples d'ensembles génériques non supergénériques : l'ensemble des mots de longueur divisible par n, pour un certain entier $n > 1$, ou l'ensemble des mots qui commencent par la lettre e_0 (ce dernier n'est pas générique à droite) ; bien sûr, ils ne sont pas semi-invariants.

Les ensembles semi-invariants gras ne sont pas tous génériques :

Théorème 27. *L'ensemble* I *lui-même n'est pas générique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que son image dans l'abélianisé Z_κ de L_κ n'est pas générique ; nous notons additivement la loi de groupe de Z_κ ; considérons m points $\alpha_1, \dots \alpha_m$ dans Z_κ, s'exprimant en fonction de $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ pris dans l'image d'un système libre et générateur de L_κ ; nous notons α_{ij} leurs coordonnées (entières !) dans la base des ε_j. Nous voulons trouver x dans Z_κ tel qu'aucun des $\alpha_i + x$ ne soit dans I, et nous le cherchons de la forme $x = x_1.\varepsilon_1 + \dots + x_n.\varepsilon_n$; pour cela, il suffit que pour, chaque i, $\alpha_{i1} + x_1$ et ... et $\alpha_{in} + x_n$ aient un facteur p en commun, car alors $\alpha_i + x$ sera une puissance p-ème. Cette condition est facile à réaliser grâce au Théorème Chinois : en effet, si p_1, ... p_m sont des nombres premiers distincts, nous pouvons faire en sorte que, pour chaque couple (i,j), $x_j = -a_{ij}$ modulo p_i. **Fin**

Cette démonstration montre qu'en fait les translatés des I par les points d'un sous-groupe finiment engendré ne peuvent recouvrir L_κ . Dans l'autre sens on montre la chose suivante :

Théorème 28. *Si κ est non dénombrable, une partie semi-invariante de L_κ est grasse si et seulement si L_κ est recouvert par une famille dénombrable de ses translatés.*

Démonstration. Comme un ensemble fluet ne contient qu'un nombre fini de points d'une partie libre et génératrice E , une famille dénombrable de ses translatés ne peut recouvrir E . Réciproquement, si X est gras, comme il contient tous les points satisfaisant $I_{n+1}(\underline{e},x)$ pour un certain n-uplet $\underline{e}$ d'éléments de E , L_κ est la réunion des translatés de X par une famille dénombrable arbitraire d'éléments de E . **Fin**

Théorème 29. *La structure formée de L_κ (ou Z_κ) augmentée d'un prédicat pour I , est instable, avec propriété d'indépendance.*

Démonstration. Pour chaque a de L_κ , les points de E qui ne sont pas dans $a.I$ sont en nombre fini, mais ce nombre n'est pas bornable par un entier fixe n : sinon, comme $I = I^{-1}$, L_κ serait égal à $e_1.I \cup ... \cup e_n.I$. La suite totalement indiscernable E n'est donc pas uniformément insécable, et on en déduit facilement la propriété d'indépendance. **Fin**

On peut se demander si l'instabilité mise en évidence dans le dernier théorème ne provient que d'un emploi abusif de la négation : que se passe-t'il si nous adoptons le point-de-vue de la Logique Positive exposé dans BEN YAACOV & POIZAT 2007 ?

Considérons le groupe libre L_κ , équipé pour chaque n d'une relation n-aire interprétée par $I_n(x_1, ... x_n)$, ainsi que la théorie L composée des axiomes hom-inductifs qui sont vérifiés par L_κ (en fait, par tout L_λ) et qui ont l'une des formes suivantes :

(i) $\neg$ $(\exists\ x_1, ... x_n)$ $I_n(x_1, ... x_n) \wedge \varphi(\mu_1(\underline{x}), ... \mu_s(\underline{x}))$, où φ est une formule positive du langage considéré et les μ_j des mots en les x_i et leurs inverses ;

(ii) $(\forall\ x_1, ... x_n)$ $I_n(x_1, ... x_n) \Rightarrow \varphi(\mu_1(\underline{x}), ... \mu_s(\underline{x}))$, où φ est une formule positive du langage considéré et les μ_j des mots en les x_i et leurs inverses.

Ces axiomes garantissent par exemple qu'un n-uplet satisfaisant I_n engendre un groupe libre et s'étende en (n+1)-uplet dans I_{n+1} . Il y a d'autres axiomes hom-inductifs vrais dans les groupes libres qui ne sont pas conséquence de L , comme $(\exists\ x_1, ... x_n)$ $I_n(x_1, ... x_n)$ ou $(\forall\ z)$ $(\exists\ x, y)$ $I(x) \wedge I(y) \wedge z = x.y$.

Les groupes libres sont des modèles positivement existentiellement clos de la théorie L ; en effet, si le m-uplet $(y_1, ... y_m)$ extrait de L_κ ne satisfait pas une formule positive $\psi(\underline{y})$, c'est qu'il satisfait une autre formule positive, de la forme $(\exists\, x_1, \ldots x_n)\ \ I_n(x_1, \ldots x_n) \wedge y_1 = \mu_1(\underline{x}) \ldots \wedge y_m = \mu_m(\underline{x})$, qui l'en empêche ; or cette propriété caractérise les modèles existentiellement clos (BEN YAACOV & POIZAT 2007, Lemme 14).

Question 12. *Les groupes libres sont-ils les seuls modèles positivement existentiellement clos de leur propre théorie hom-inductive, dans le langage des* I_n *? Cette dernière théorie est-elle stable ? Qu'en est-il de son abélianisée ?*

Une réponse positive à cette question ne serait pas en conflit avec les Théorèmes 27 et 28. En effet, l'insécabilité de la suite de Morley (voir la démonstration du Lemme 13) signifie dans ce contexte que, pour toute paire de formules $\varphi(x,\underline{y})$ et $\psi(x,\underline{y})$ contradictoires, il y a un entier n qui limite le nombre de points de la suite qui satisfont $\varphi(x,\underline{a})$, ou bien le nombre de ceux qui satisfont $\psi(x,\underline{a})$; quand le langage est dénombrable, $\varphi(x,\underline{a})$ peut faire partie du type limite de la suite et n'être satisfaite par aucun de ses ω premiers points : a priori, il faut aller jusqu'à ω_1 pour faire le test, ce qui conduit à une révision drastique de la notion de généricité !

Afin d'énoncer un dernier résultat sur les produits cartésiens, nous distingons les relations n-aires semi-invariantes grasses de celles qui sont fluettes : les premières contiennent, pour chaque ensemble libre et générateur E , tous les n-uplets formés de n éléments distincts pris dans une partie cofinie de E ; les deuxièmes n'en contiennent aucun.

Théorème 30. *Une relation semi-invariante* $(m+n)$-*aire* $r(\underline{x},\underline{y})$ *est grasse si et seulement si les points* $\underline{a}$ *de coupe* $r(\underline{a},\underline{y})$ *grasse forment une relation* m-*aire grasse.*

Démonstration. Soit $\underline{e}$ un sous ensemble fini de E tel que $r(\underline{x},\underline{y})$ soit laissée invariante par tout automorphisme fixant $\underline{e}$; si r est grasse, elle est satisfaite par tous les uplets formés de $m+n$ points distincts pris dans $E - \{\underline{e}\}$; si elle est fluette, elle n'est satisfaite par aucun d'entre eux ; dans ces conditions, le résultat suit de ce que toutes les coupes, ainsi que l'ensemble des points de coupe grasse, sont semi-invariants. **Fin**

Références

BEN YAACOV & POIZAT 2007 Itaï Ben Yaacov et Bruno Poizat, Fondements de la Logique positive, *The Journal of Symbolic Logic,* 72, 1141-1162

GOODE 1997 John B. Goode, HLM (Hrushovski-Lang-Mordell), *Séminaire Bourbaki,* Astérisque 241, 179-194.

NEUMANN 1952 B.H. Neumann, A note on algebraically closed groups, *Journal of the London Mathematical Society, 27, 247-249*

NEWELSKI 1991 Ludomir Newelski, On type definable subgroups of a stable group, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol. 32, 173-187

POIZAT 1981 Bruno Poizat, Sous-groupes définissables d'un groupe stable, *The Journal of Symbolic Logic,* 46, 137-146

POIZAT 1981a Id., Théories instables, *The Journal of Symbolic Logic,* 46, 513-522

POIZAT 1985 Id., *Cours de Théorie des Modèles,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne

POIZAT 1987 Id., *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne

POIZAT 1993 Id., Le groupe libre est-il stable ? *Seminarberichte 93-1, Humboldt Universität zu Berlin,* 169-176

POIZAT 2013 Id., Groupes linéaires de rang de Morley fini, *Journal des Sciences Mathématiques du Québec*

SELA 2013 Zlil Sela, Diophantine geometry over groups VIII : Stability, *Annals of Mathematics,* 177, 787-868

WAGNER 1990 Frank O. Wagner, Subgroups of stable groups, *The Journal of Symbolic Logic,* 55, 151-156

WAGNER 2003 Id., Bad fields in positive characteristic, *Bulletin of the London Mathematical Society,* 35, 499-502