Groupes simples connexes minimaux algébriques de type impair

Adrien Deloro

13 février 2007

1 Introduction

1.1 Conjecture d'Algébricité

Une intuition directrice en algèbre modèle-théorique, et dont la *Conjecture d'Algébricité* infra offre un exemple, est que *les objets de complexité logique raisonnable sont déjà connus.*

Dans le cas particulier des groupes on peut réduire au minimum le bagage modèle-théorique nécessaire à une formalisation de ce principe d'abord énoncé pour les théories $\aleph_1$-catégoriques. En fait les axiomes de Borovik-Poizat pour les groupes de rang de Morley fini (cf. [BN94, chapitre 4]) tendent à faire oublier le contenu modèle-théorique du rang de Morley.

Conjecture d'Algébricité (Cherlin-Zilber)
Un groupe simple infini de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Pourtant l'existence de "mauvais corps" a été annoncée en 2006 (nous reviendrons sur cette notion après l'énoncé du Théorème 1.1 infra). Ceci incite à la prudence en matière de telles conjectures, et il ne serait pas trop surprenant qu'un contre-exemple à la Conjecture d'Algébricité soit un jour construit. Ainsi l'objet de l'étude des groupes de rang de Morley fini n'est pas tant de se prononcer sur cette conjecture, que d'offrir une sorte d'épure de la classification des groupes simples finis.

1.2 Involutions

A cette fin, la ligne d'attaque retenue pour la Conjecture de Cherlin-Zilber doit être compatible avec la démarche de classification des groupes simples finis. Le *programme de Borovik* distingue selon la structure du 2-sous-groupe de Sylow, noté classiquement S. En l'occurence, on définit quatre *types*, correspondant à la caractéristique attendue du corps sous-jacent (cf. Fait 2.12 infra) :

type pair : $S^\circ = U$, un groupe 2-unipotent non-trivial ;

type impair : $S^\circ = T$, un 2-tore non-trivial ;

type mixte : $S^\circ = T*U$, avec T un 2-tore non-trivial et U un groupe 2-unipotent non-trivial ;

type dégénéré : $S^\circ = 1$, i.e. S fini.

Nous nous plaçons ici en type impair, ce qui signifie que la composante connexe du 2-sous-groupe de Sylow est un 2-tore, c'est-à-dire un produit direct de groupes de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Le nombre de facteurs est fini et appelé le 2-*rang de Prüfer*, ou rang de Prüfer quand il n'y a pas d'ambiguïté avec d'autres nombres premiers. Le présent article concerne certains groupes de rang de Morley fini de type impair et de rang de Prüfer égal à 1, si bien que $S^\circ \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$.

On pressent une opposition entre les involutions du groupe ambiant qui appartiennent à un 2-tore, et celles qui sont en dehors de la composante connexe de tout 2-sous-groupe de Sylow. Les premières sont évidemment conjuguées entre elles dans le cas où $S^\circ \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ d'après le Fait 2.12 ci-dessous, on les appelle ici *toriques*. Une involution torique est a priori susceptible d'appartenir à la couche non-connexe d'un 2-groupe de Sylow, en revanche il y a *au moins* un tel groupe qui la contient dans sa composante connexe. Remarquons également que si le groupe ambiant G est de type impair et qu'une involution w est torique, alors $w \in C^\circ(w)$. Réciproquement, si $w \in C^\circ(w)$ résoluble (et quel que soit le type), il existe un 2-sous-groupe de Sylow S de G tel que $w \in S^\circ$ d'après le Fait 2.20 infra.

Précisons enfin que toute involution est en fait torique dans tout groupe connexe de rang de Morley fini de type impair. C'est l'objet du Fait 2.57 pris dans [BC06], mais nous n'utiliserons pas ce résultat et distinguerons soigneusement nos involutions.

1.3 Etat des lieux

Revenons à la Conjecture d'Algébricité. Au moment d'écrire cette introduction, on sait qu'il n'y a pas de groupe simple de rang de Morley fini de type mixte, et aussi que la Conjecture de Cherlin-Zilber est vérifiée pour le type pair. On renvoie à [ABC06]. Plus récemment, il a été montré dans [BBC06] qu'il n'y a pas vraiment de groupe de rang Morley fini connexe de type dégénéré, dans le sens où $S^\circ = 1$ implique pour un groupe connexe $S = 1$, i.e. l'absence d'involutions.

En ce qui concerne le type impair, on dispose d'une borne sur le rang de Prüfer d'un éventuel contre-exemple *minimal* à la Conjecture de Cherlin-Zilber, donnée dans [BCJ07]. L'enjeu du Théorème 1.1 infra est ainsi la vérification de la Conjecture d'Algébricité dans le cas "type impair, petit rang de Prüfer", jonction éventuelle avec les bornes [BCJ07]. Ainsi, en présence d'involutions, la situation serait plutôt maîtrisée. Reste le cas de groupes "$2^\perp$", i.e. sans involutions, et c'est une tout autre affaire.

Une autre notion nécessaire à la compréhension du théorème principal de cet article est celle de sous-groupe de Borel. Il s'agit par définition des sous-groupes définissables, connexes, résolubles, et maximaux pour ces propriétés. Un groupe de rang de Morley fini est *simple connexe minimal* s'il est simple, connexe, et infini, et si tous ses sous-groupes propres définissables et connexes sont résolubles. “Sous-groupe de Borel” s'y confond alors avec “sous-groupe définissable connexe propre maximal ”, c'est-à-dire que tous les sous-groupes propres connexes sont résolubles, par opposition au groupe ambiant supposé simple. Les groupes simples connexes minimaux sont un laboratoire important où expérimenter des techniques, même s'ils ne forment qu'un cas de la Conjecture d'Algébricité. Ils sont l'analogue des groupes simples minimaux finis de la classification de Thompson.

Nous prouvons ici le

Théorème 1.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

Ce théorème a déjà été prouvé dans [CJ04, Theorem 1.8, 1, a], dans le cas *ordinaire*, c'est-à-dire sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe ambiant n'interprète pas de *mauvais corps*. Il s'agit d'une structure $\langle K, 0, 1, +, ., T\rangle$ de corps où le prédicat T définit un sous-groupe infini propre de $K^\times$, *le tout étant de rang de Morley fini*. Récemment il a été annoncé que de tels objets existent, nous renvoyons à [BHMPW06]. Un tel sous-groupe T agit sur K_+. Ainsi les mauvais corps compliquent-ils considérablement les groupes connexes résolubles de rang de Morley fini. Mais cela n'invalide pas nécessairement la Conjecture d'Algébricité, qui ne porte que sur les groupes simples. Le Théorème 1.1 est une avancée importante en ce qu'il contribue à éliminer un peu plus la logique de l'étude des groupes $\aleph_1$-catégoriques. Il va de soi que les techniques de [CJ04], liées à l'ordinarité, sont à traduire, sinon à réinventer ici.

La preuve du Théorème 1.1 repose sur des calculs de rang avec les éléments fortement réels que permet l'hypothèse que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Ces calculs ont été utilisés pour la première fois dans le contexte de rang de Morley fini par Nesin pour les groupes de type pair dans [DN94], et pour les groupes de type impair par Jaligot dans le travail non publié [Jal00].

Le Théorème 1.1 permet de dégager une autre propriété de $\mathrm{PSL}_2(K)$.

Corollaire 1.2 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair, et w une involution torique de G. Alors :*

- *soit tout sous-groupe propre définissable, connexe, et w-invariant de G est inclus dans un sous-groupe de Borel w-invariant,*
- *soit G est isomorphe à $PSL_2(K)$, où K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

Les deux cas s'excluent l'un l'autre. En effet PSL_2 offre bien un contre-exemple à la première alternative, en prenant

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, t \in K^\times \right\}.$$

Nous allons privilégier les sous-groupes de Borel qui contiennent $C^\circ(i)$ pour une involution torique i, nous y penserons comme aux sous-groupes de Borel *standards*. On sait conjuguer les involutions toriques en rang de Prüfer 1, mais en l'absence de résultat général de conjugaison des sous-groupes de Borel, rien ne dit que *tous* les sous-groupes de Borel sont standards. En revanche, dans notre groupe-cible PSL_2, les sous-groupes de Borel sont conjugués et contiennent bien le centralisateur connexe de leurs involutions. Notre définition de sous-groupe de Borel standard diffère de celle de [BCJ07], qui est la suivante : un sous-groupe de Borel qui contient la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow. En 2-rang de Prüfer 1, cela équivaut à posséder une involution d'après le Fait 2.20 infra, mais c'est a priori plus faible que contenir le centralisateur connexe de cette involution.

1.4 Plan de l'article

§1. Cette introduction.

§2. Rappels généraux et présentation de l'unipotence de Burdges.

§3. Outils moins classiques. C'est dans cette section, avec le Lemme 3.3, qu'est formulé un analogue au "lemme de Jaligot" (Fait 2.27 infra). On présente également le principe d'extension qui aboutit au Corollaire 1.2.

§4. Analyse préliminaire. On prépare les calculs de rang. L'étude de groupe pour le Théorème 1.1 commence, et se scinde en deux cas.

§5. Cas consistant. Si l'involution de l'énoncé "agit vraiment" sur un sous-groupe "suffisamment unipotent" du sous-groupe de Borel standard, on identifie par le calcul de rang mentionné ci-dessus à PSL_2. Cela est fait dans le Théorème 5.1

§6. Cas inconsistant. On montre dans le Théorème 6.1 l'inconsistance de l'hypothèse contraire à celle de §5, ce qui achève la preuve du Théorème 1.1. Cette section fait un usage important de résultats de Burdges sur les "intersections maximales", terminologie sur laquelle nous reviendrons. La preuve s'achève par un argument de concentration contradictoire avec la simplicité (et non pas la minimale simplicité) du groupe, qui repose sur le Corollaire 2.4 plus bas. Le lecteur trouvera plus ample commentaire sur cette preuve au début de la Section 6.

1.5 Remarques sur le "lemme de Jaligot"

Ce qui empêche une traduction naïve du lemme de Jaligot (i.e. le Fait 2.27) en caractéristique nulle, est la possibilité pour le rang réduit de Burdges (appelé ici, suivant [FJ07], "degré d'unipotence") d'augmenter. Cela correspond au fait que la caractéristique nulle recouvre plusieurs comportements, et qu'il y a plusieurs façons pour un groupe sans torsion d'être unipotent. La première chose à faire est de limiter ce comportement de "fuite du degré d'unipotence". C'est ce que nous effectuerons en §3.2, généralisant ainsi le "lemme de Jaligot" (Fait 2.27), ou le résultat analogue dans le cas ordinaire [CJ04, Proposition 3.11]. A partir de là, une théorie de l'unipotence sans torsion peut se développer parallèlement à celle de la p-unipotence. Ainsi, sous des hypothèses assez naturelles, les deux théories sont-elles analogues.

La notation par *paramètres d'unipotence* a pour elle de marquer cette unité retrouvée. Quand bien même ce ne serait qu'un gadget, son utilisation permet souvent de n'écrire qu'une preuve au lieu de deux, c'est-à-dire qu'on ne distingue presque plus selon que le groupe additif du corps est un p-groupe abélien élémentaire ou un groupe abélien sans torsion.

Ainsi, grâce au Lemme 3.3, on traite indifféremment la caractéristique du corps sous-jacent. Il semblerait donc que la théorie de l'unipotence pour les corps de caractéristique nulle soit parfaitement équivalente à celle de la p-unipotence modulo quelques précautions et notations. Et pourtant le théorème de Wagner raccourcit considérablement l'étude de la configuration en caractéristique première dans §6. Cette plus grande rigidité de la caractéristique p n'a en fait pas d'analogue en caractéristique nulle.

Enfin, par souci de cohérence avec [FJ07], nous notons ∞ la caractéristique nulle.

2 Matériel requis

2.1 Nilpotence

Fait 2.1 (condition de normalisateur) *Soient G un groupe nilpotent et $H < G$ un sous-groupe strict. Alors $H < N_G(H)$.*

On note $F(G)$ le sous-groupe de Fitting d'un groupe de rang de Morley fini G. Ce sous-groupe est définissable et nilpotent ([BN94, Theorem 7.3]).

Fait 2.2 ([BN94, Theorem 9.21]) *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/F^\circ(G)$ est divisible et abélien.*

2.2 Arguments de généricité

Etant donnée une partie X d'un groupe G, on note $X^\#$ l'ensemble $X \setminus \{1\}$.

Fait 2.3 ([CJ04, Fact 2.36]) *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $x \in G^\#$. Alors* $\mathrm{rg}(x^G \cap M) < \mathrm{rg}(x^G)$.

Etant donnée une partie X d'un groupe G, on note X^G l'ensemble $\cup_{g\in G} X^g$.

Corollaire 2.4 *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $\{1\} \neq X \subseteq G$ un sous-ensemble définissable. Alors* $\mathrm{rg}(X^G \cap M) < \mathrm{rg}(X^G)$.

Preuve

L'ensemble X^G est infini, car sinon le groupe G qui est connexe et le normalise doit le centraliser, et donc $X \subseteq Z(G) = \{1\}$, contre l'hypothèse.

Si X est fini, écrivons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors $X^G = \cup_{i=1}^n x_i^G$, et $X^G \cap M = \cup_{i=1}^n x_i^G \cap M$ de même. Soit $x_i \in X$ tel que $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg}(x_i^G \cap M)$. Si $x_i = 1$, alors $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = 0 < \mathrm{rg}(X^G)$, et le résultat est prouvé. Si $x_i \neq 1$, on peut lui appliquer le Fait 2.3, et il vient $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg}(x_i^G \cap M) < \mathrm{rg}(x_i^G) \leq \mathrm{rg}(X^G)$, donc le résultat est encore prouvé. Nous supposons dorénavant que X est infini.

Notons $\sim$ la relation définissable de conjugaison dans G. Soit pour chaque $k \leq \mathrm{rg}(G)$ l'ensemble $X_k = \{x \in X, \mathrm{rg}(x^G \cap M) = k\}$. Ces ensembles en nombre fini sont définissables par définissabilité du rang et partitionnent X. L'un au moins est donc de même rang que X. Soit $k_0 \leq \mathrm{rg}(G)$ tel que $\mathrm{rg}(X_{k_0}) = \mathrm{rg}(X)$.

Soit pour chaque $\ell \leq \mathrm{rg}(G)$ l'ensemble $Y_\ell = \{x \in X_{k_0}, \mathrm{rg}(x^G) = \ell\}$. Les mêmes raisons que plus haut impliquent qu'il existe un $\ell_0 \leq \mathrm{rg}(G)$ tel que $\mathrm{rg}(Y_{\ell_0}) = \mathrm{rg}(X)$.

Notons que Y_{ℓ_0} est infini comme X, et en particulier $Y_{\ell_0}^{\#}$ n'est pas vide. Soit alors un élément x_0 de $Y_{\ell_0}^{\#}$. En appliquant le Fait 2.3 à x_0, il vient $k_0 < \ell_0$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg} \bigcup_{x \in X} \left(x^G \cap M\right) \leq \mathrm{rg}\,(X/\sim) + k_0 < \mathrm{rg}(X/\sim) + \ell_0 \leq \mathrm{rg}\, X,$$

ce qui prouve le corollaire. □

Fait 2.5 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair. Soient w une involution torique et B un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(w)$. Alors B^G est générique dans G.*

Preuve

C'est un corollaire très faible de [FJ07, Theorem 2.3] (voir aussi dans ce même article le Theorem 7.4). □

2.3 Identification

Le résultat d'identification que nous utiliserons dans §5 fait appel à la notion de groupe de Zassenhaus. Nous renvoyons à [BN94, §11.5] pour ce qui suit. Un *groupe de Zassenhaus* est un groupe 2-transitif tel que le stabilisateur de trois points distincts soit toujours trivial. Un groupe de Zassenhaus est *scindé* si le stabilisateur de deux points possède un complément normal dans le stabilisateur d'un point (i.e., s'il est complément semi-direct d'un sous-groupe normal dans le stabilisateur d'un point).

Voici le résultat général employé.

Fait 2.6 ([BN94, Theorem 11.89]) *Soit G un groupe de Zassenhaus scindé infini de rang de Morley fini. Si le stabilisateur de deux points contient une involution, alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

2.4 Corps

Les corps sont généralement présents dans le groupe ambiant et dans les preuves avant qu'on ne puisse invoquer le Fait 2.6. Ils proviendront plutôt du "Théorème du corps de Zilber", qui est un résultat beaucoup plus général.

On note classiquement K_+ le groupe additif d'un corps et $K^\times$ son groupe multiplicatif. Etant donnés deux sous-groupes A et B d'un groupe de rang de Morley fini G, A est *B-minimal* si :
- A est définissable infini,
- B normalise A, et
- A est minimal pour ces propriétés (i.e., il ne possède pas de sous-groupe propre définissable infini normalisé par B).

Fait 2.7 (Théorème du corps de Zilber, [BN94, Theorem 9.1]) *Soit $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini, où A et H sont des sous-groupes abéliens infinis définissables tels que A soit H-minimal et $C_H(A) = 1$. Alors G interprète un corps algébriquement clos.*

Plus précisément, A est isomorphe au groupe additif d'un corps algébriquement clos K sur lequel H agit par multiplication du corps :

$$A \simeq K_+, \qquad H \simeq T \leq K^\times,$$

où T est un sous-groupe définissable de $K^\times$.

Nous utiliserons également ces deux résultats complémentaires.

Fait 2.8 ([Poi87, Corollaire 3.3]) *Soit K un corps de rang de Morley fini* de caractéristique nulle. *Alors K_+ n'a pas de sous-groupe définissable non-trivial propre.*

Fait 2.9 ([Wag01, Corollary 9]) *Soit K un corps de rang Morley fini* de caractéristique $p > 0$. *Alors $K^\times$ n'a pas de section définissable sans torsion.*

Ce dernier résultat fera une apparition remarquable dans la Section 6. Il sert à limiter les pathologies si un mauvais corps se présente dans notre structure. En effet le sous-groupe T comme dans le Fait 2.7 possèdera nécessairement de la torsion.

2.5 Involutions

L'ensemble des involutions d'un groupe G sera noté $I(G)$.

Si σ est un automorphisme involutif et définissable d'un groupe de rang de Morley fini G, on note $G^{-\sigma}$ (ou simplement G^- quand le contexte est clair) l'ensemble définissable $\{g \in G, g^\sigma = g^{-1}\}$. En général il ne s'agit pas d'un groupe. Le cas le plus fréquent est celui de l'action d'une involution i de G par conjugaison, et l'on notera alors G^{-i} l'ensemble inversé.

Fait 2.10 ([BN94, Exercice 14 p.73]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans involutions. Soit σ un automorphisme involutif et définissable de G. Alors $G^{-\sigma}$ est 2-divisible, et l'on a la décomposition univoque $G = C_G(\sigma) \cdot G^{-\sigma}$.*

Parfois le groupe sur lequel une involution agit ne sera pas $2^{\perp}$. Nous aurons alors besoin du résultat suivant.

Fait 2.11 ([BN94, Exercice 10 p.98]) *Soient U un groupe de rang de Morley fini nilpotent et connexe, et φ un automorphisme définissable de U ne fixant qu'un nombre fini d'éléments. Alors $U = [U, \varphi]$.*

Fait 2.12 (Borovik-Poizat, [BN94, Lemma 10.8 et Theorem 10.11]) *Les 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués. En outre, de tels sous-groupes sont nilpotents-par-fini, et l'on peut décomposer leur composante connexe sous la forme*

$$S^{\circ} = T * U,$$

où T est un 2-tore, et U un 2-groupe définissable connexe nilpotent d'exposant borné.

Fait 2.13 ([CJ04, Lemma 2.34]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair et de rang de Prüfer 1. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et i l'unique involution de S°. Alors $C(S^{\circ}) \cap i^G = \{i\}$.*

Fait 2.14 (Théorème Z^*, [BBC06, Theorem 5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, S un 2-sous-groupe de Sylow de G, et i une involution de S. Alors l'un des deux cas suivant se produit :*

(a) i est conjuguée dans G à une autre involution de S.

(b) $C(i)$ est connexe.

Nous aurons également besoin de connaître les automorphismes involutifs du groupe de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$.

Fait 2.15 *Le seul automorphisme d'ordre 2 d'un groupe de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ est l'inversion.*

Preuve

Il est clair que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty})$ est isomorphe au groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_2$. Mais $\mathbb{Z}_2^* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, et le terme de droite est sans torsion car de caractéristique nulle. En particulier, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty})$ possède exactement un élément d'ordre fini. $\square$

Corollaire 2.16 *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair et de rang de Prüfer 1. Soient S° un 2-tore maximal de G et i l'unique involution de S°. Si une involution $w \in i^G \setminus \{i\}$ normalise S°, alors elle l'inverse. En particulier wi est S°-conjuguée à w, et G-conjuguée à i.*

Preuve

Si w n'inverse pas le 2-tore S°, elle le centralise d'après le Fait 2.15, ce qui contredit le Fait 2.13. Ainsi w inverse S°.

Maintenant si α est une racine carrée de i dans S°, $w^\alpha = [\alpha, w]w = \alpha^{-2}w = i^{-1}w = iw = wi$. □

2.6 Torsion

Soit p un nombre premier non nul.

Fait 2.17 ([BN94, Exercice 11 p.93]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et $H \lhd G$ un sous-groupe définissable. On suppose qu'il existe $x \in G$ tel que $\bar{x} \in G/H$ soit un p-élément. Alors xH contient un p-élément.*

Fait 2.18 (Rigidité des p-tores, [BN94, Theorem 6.16]) *Soit P un p-tore d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors $N_G^\circ(P) = C_G^\circ(P)$.*

Fait 2.19 ([BN94, Theorem 6.20]) *Soit P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors :*

1. *P° est nilpotent et $P^\circ = U * T$ est produit central d'un p-groupe nilpotent d'exposant borné U et d'un p-tore T.*
2. *$Z(P) \neq 1$ et P satisfait la condition de normalisateur.*
3. *Si P est infini d'exposant borné, alors $Z(P)$ possède une infinité d'éléments d'ordre p et P est nilpotent.*

Fait 2.20 ([FJ07, Theorem 1.8]) *Soit H un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors les p-sous-groupes de Sylow de H sont connexes.*

2.7 Sous-groupes de Carter

Un sous-groupe de *Carter* d'un groupe de rang de Morley fini est un sous-groupe définissable, connexe, nilpotent, et d'indice fini dans son normalisateur.

Fait 2.21 ([FJ07, Theorem 3.1]) *Tout groupe de rang de Morley fini possède des sous-groupes de Carter. En outre, tout sous-groupe abélien divisible de torsion est inclus dans un tel sous-groupe.*

Fait 2.22 ([FJ07, Theorem 3.9]) *Dans un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini, les sous-groupes de Carter sont conjugués et autonormalisants.*

Les Faits 2.20, 2.21 et 2.22 impliquent le

Corollaire 2.23 *Soit H un groupe de rang de Morley fini* de type impair, *connexe et résoluble. Alors chaque sous-groupe de Carter de H contient un* 2-*sous-groupe de Sylow.*

Corollaire 2.24 *Soit H un groupe de rang de Morley fini* de type impair, *résoluble, et connexe. On suppose que H contient un p-tore T. Alors T centralise un* 2-*tore maximal de H.*

2.8 $\tilde{p}$-unipotence et $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Les longs rappels qui suivent introduisent la notion d'unipotence due à Burdges et certaines de ses applications.

2.8.1 Rappels en caractéristique première

Commençons par évoquer la théorie de la p-unipotence. Un p-sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini est *p-unipotent*, ou encore un *U_p-groupe*, s'il est définissable, connexe, nilpotent, et d'exposant borné. (D'après le Fait 2.2, la résolubilité suffit d'ailleurs dans cette définition pour assurer la nilpotence.)

Fait 2.25 ([CJ04, Corollary 2.16]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors il existe un unique U_p-sous-groupe définissable* maximal *de H. Ce sous-groupe est contenu dans $F^\circ(H)$.*

Notation 2.26 *On note $U_p(H)$ ce sous-groupe.*

Fait 2.27 ([Bur07, Lemma 2.1]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Soit p un nombre premier. Si $F(B_1)\cap F(B_2) \neq 1$, alors $U_p(B_1) = 1$ ou $U_p(B_2) = 1$.*

En voici un corollaire utile.

Fait 2.28 ([Bur07, Corollary 2.2]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Alors $F(B_1) \cap F(B_2)$ est sans torsion.*

Beaucoup de nos raisonnements utiliseront le lemme suivant, valable en caractéristique première, et qui trouvera un analogue en caractéristique nulle dans le Lemme 3.3.

Lemme 2.29 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et B un sous-groupe de Borel de G. Soit $A \leq U_p(B)$ un sous-groupe infini (non nécessairement définissable). Alors B est l'unique sous-groupe de Borel de G contenant A.*

Preuve

Remarquons que $1 \neq d(A)^\circ \leq U_p(B)$ et que $d(A)^\circ$ est un U_p-sous-groupe de B. Soit B_1 un sous-groupe de Borel de G contenant A. Alors B_1 contient $d(A)^\circ$, et d'après le Fait 2.25, il vient $d(A)^\circ \leq U_p(B_1) \leq F^\circ(B_1)$. Le Fait 2.28 implique alors $B_1 = B$. $\square$

2.8.2 Unipotence en caractéristique nulle

Burdges a introduit dans [Bur04] une notion opérante d'unipotence *en caractéristique nulle*. Nous suivrons la terminologie et la notation de [FJ07] auquel les faits cités renvoient. Pour relier directement à [Bur04], il suffit de remplacer ∞ par 0 dans la notation de la caractéristique.

Un groupe de rang de Morley fini est *indécomposable* s'il est abélien et ne peut s'écrire comme somme (même non nécessairement directe) de deux sous-groupes définissables propres. Un groupe indécomposable est nécessairement connexe ([Bur04, Lemma 1.2]). Si A est indécomposable, alors il possède un unique sous-groupe définissable connexe propre et maximal, noté $\Phi(A)$ et appelé sous-groupe de Frattini *connexe* de A (ce n'est pas la composante connexe du sous-groupe de Frattini de A).

Pour G un groupe de rang de Morley fini et d un entier *non nul*, on définit

$$U_{(\infty,d)}(G) = \left\langle A \leq G \;\middle|\; \begin{array}{c} A \text{ est un sous-groupe définissable indécomposable} \\ \text{tel que } A/\Phi(A) \text{ soit sans torsion et de rang } d \end{array} \right\rangle.$$

Définition 2.30 *Soit G un groupe de rang de Morley fini. On note $d_\infty(G)$ et on appelle* degré d'unipotence sans torsion *de G le plus grand $d \geq 1$, s'il existe, tel que $U_{(\infty,d)}(G) \neq 1$. On pose sinon $d_\infty(G) = 0$.*

Nous verrons plus bas, avec le Fait 2.36, que l'absence d'unipotence n'est pas un obstacle à l'étude d'un groupe.

Notation 2.31 *Quand $d_\infty(G) > 0$, on note $U_\infty(G) = U_{(\infty,d_\infty(G))}(G)$.*

Cette notion a des propriétés similaires à l'unipotence en caractéristique première. Avant de les passer en revue nous unifions la notation.

2.8.3 Paramètres d'unipotence

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Par analogie avec le d_∞ de la Définition 2.30 ci-dessus, on introduit une notation-gadget.

Notation 2.32 *Soit p un nombre premier. On pose $d_p(H) = \infty$ si H possède un U_p-sous-groupe non-trivial. On pose $d_p(H) = 0$ sinon.*

Définition 2.33 *Un* paramètre d'unipotence *est un couple*

$$\tilde{p} = (\text{caractéristique } p, \text{ degré d'unipotence } d) \in (\{\infty\} \cup \mathcal{P}) \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$$

qui satisfait $p < \infty \Leftrightarrow d = \infty$.

Désormais la caractéristique p varie, sauf mention du contraire, dans $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$.

Si $\tilde{p}$ est de la forme (q, ∞), nous écrirons $U_{\tilde{p}}$ à la place de U_q. Nous avons ainsi défini, pour G un groupe de rang de Morley fini résoluble, $U_{\tilde{p}}(G)$ dans les cas

(q,∞) (cf. §2.8.1) et (∞, d) *avec* $d > 0$ (cf. §2.8.2). Pour terminer d'uniformiser nous définissons suivant [FJ07]

$$U_{(\infty,0)}(G) = \langle \text{sous-tores décents définissables de } G \rangle \,.$$

Rappelons au passage qu'un *tore décent* est un groupe abélien divisible de rang de Morley fini qui coïncide avec la clôture définissable de sa torsion.

Définition 2.34 *Soient H un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini et $\tilde{p} = (p, d)$ un paramètre d'unipotence.*

- H admet *le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$.*
- *Le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ est* maximal *dans H si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$ et $d_p(H) = d$.*

Remarque 2.35 *Un paramètre d'unipotence dont la caractéristique est première est toujours un paramètre d'unipotence maximal (puisque d_p n'admet que les deux valeurs "oui" ou "non"). Il n'en va pas de même si la caractéristique est nulle, car on a dans ce cas une notion graduée d'unipotence ("plus" ou "moins").*

Bien noter que plusieurs paramètres d'unipotence maximaux sont disponibles pour un même groupe (considérer par exemple $(\overline{\mathbb{F}_2}, +) \times (\overline{\mathbb{F}_3}, +)$). En revanche, une caractéristique fixée apparaît au plus une fois à l'état maximal*.*

On peut dire quelque chose des groupes sans unipotence. Rappelons d'abord qu'un *bon tore* est un groupe de rang de Morley fini abélien divisible et dont *chaque* sous-groupe définissable coïncide avec la clôture définissable de sa torsion.

Fait 2.36 ([FJ07, Theorem 2.11], voir aussi [Bur04, Theorem 2.19]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si $U_{(p,d)}(H) = 1$ pour chaque paramètre d'unipotence (p, d) tel que $0 < d \leq \infty$, alors H est un bon tore.*

2.8.4 $U_{\tilde{p}}$-groupes

Les faits qui suivent sont triviaux en caractéristique première, et le travail de Burdges dans [Bur04] porte évidemment sur la caractéristique nulle. Nous invoquons dans la suite deux références : [FJ07] et [Bur07]. La première fournit la notation, et la seconde contient les formulations originelles, souvent différentes.

La définition suivante *ne suppose pas* la nilpotence et recoupe bien la définition en caractéristique première *dans le cas résoluble*, cas dont nous ne sortirons pas.

Définition 2.37 *Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence. Un groupe de rang de Morley fini G est un $U_{\tilde{p}}$-*groupe *si $G = U_{\tilde{p}}(G)$.*

Remarque 2.38 *Un sous-groupe définissable et connexe d'un $U_{\tilde{p}}$-groupe résoluble, où $\tilde{p} = (p, d)$ et $d < \infty$, n'est pas nécessairement un $U_{\tilde{p}}$-groupe. La notion d'homogénéité (Définition 2.46 infra) a été introduite pour y remédier.*

Fait 2.39 ([FJ07, Lemma 2.13], [Bur04, Lemma 2.12] quand $0 < d < \infty$) *Soit $f : G \to H$ un morphisme définissable entre groupes de rang de Morley fini. Alors*

1. *(push-forward) $f(U_{\tilde{p}}(G)) \leq U_{\tilde{p}}(H)$ est un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*
2. *(pull-back) On suppose que $\tilde{p}$ n'est pas de la forme (p, ∞) ou que G est résoluble. Si $U_{\tilde{p}}(H) \leq f(G)$, alors $f(U_{\tilde{p}}(G)) = U_{\tilde{p}}(H)$.*

On peut voir le théorème de structure suivant comme une généralisation, d'une part de la décomposition due à Nesin des groupes nilpotents de rang de Morley fini ([BN94, Theorem 6.8]), d'autre part du fait qu'un groupe nilpotent d'exposant fini est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

Fait 2.40 ([FJ07, Theorem 2.7], [Bur04, Theorem 2.31]) *Soit G un groupe nilpotent connexe de rang de Morley fini. Alors*

$$G = [d(S) * U_{(\infty,1)}(G) * \cdots * U_{(\infty,d_\infty(G))}(G)] * [U_2(G) \times \cdots \times U_{q_{max}}(G)],$$

où S est le sous-groupe de torsion divisible de G, $d(S)$ sa clôture définissable, et q_{max} désigne le plus grand nombre premier q tel que $U_q(G)$ soit non trivial.

La notion de $U_{\tilde{p}}$-groupe est ainsi particulièrement utile dans le contexte nilpotent.

Définition 2.41 *Un $\tilde{p}$-groupe, $\tilde{p} \neq (\infty, 0)$, est un $U_{\tilde{p}}$-groupe de rang de Morley fini* nilpotent. *Un $(\infty, 0)$-groupe est, toujours par définition, un tore décent.*

La plupart de nos arguments vont reposer sur le fait suivant.

Fait 2.42 ([FJ07, Lemma 2.9], [Bur04, Lemma 2.26]) *Soit G un $\tilde{p}$-groupe non-trivial de rang de Morley fini. Alors $U_{\tilde{p}}(Z(G)) \neq 1$.*

Preuve

Ce fait n'apparaissant qu'implicitement dans [FJ07], prouvons-le brièvement. Si G est abélien, c'est évident. Sinon $[Z_2(G), G] \neq 1$, et ce sous-groupe définissable et connexe est central dans G. C'est un $U_{\tilde{p}}$-groupe d'après [FJ07, Lemma 2.9]. □

Fait 2.43 ([Bur04, Lemma 3.18]) *Soient G et H deux groupes de rang de Morley fini, H agissant définissablement sur G. On suppose que G est un $\tilde{p}$-groupe définissable sans q-torsion (q est un nombre premier), et que H est un q-groupe d'exposant borné formé d'automorphismes définissables de G. Alors $C_G(H)$ est encore un $\tilde{p}$-groupe.*

Enfin nous introduisons une dernière notation.

Notation 2.44 *Pour $\tilde{p} = (\infty, d)$, on note $F_d(H) = U_{\tilde{p}}(F^\circ(H))$.*

Fait 2.45 ([Bur04, Theorem 2.21]) *Soient H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, et $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(H))$. Si $d_\infty(H) > 0$, alors $U_{\tilde{p}}(H) \leq F^\circ(H)$. (Ce qu'on peut écrire $U_{\tilde{p}}(H) = F_{d_\infty(H)}(H)$.)*

Ainsi ce qui était vrai en caractéristique première, i.e. le fait de "tomber" dans le sous-groupe de Fitting, ne l'est en caractéristique nulle que pour le sous-groupe "le plus unipotent", i.e. de degré maximal.

2.8.5 Homogénéité de Frécon

La notion suivante, introduite par Frécon, est d'une grande importance. Nous renvoyons à [FJ07, §2.8].

Définition 2.46 *Un $U_{\tilde{p}}$-groupe G de rang de Morley fini est* $\tilde{p}$-homogène *si chaque sous-groupe définissable connexe nilpotent de G est encore un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*

Nous dirons qu'un groupe est *homogène* si pour un certain paramètre d'unipotence $\tilde{p}$, c'est un $U_{\tilde{p}}$-groupe $\tilde{p}$-homogène. Il est clair que si un groupe G non-trivial est à la fois $\tilde{p}$-homogène et $\tilde{q}$-homogène, on a $\tilde{p} = \tilde{q}$, et le paramètre d'unipotence, bien que sous-entendu, est uniquement déterminé. Ce n'est pas le cas pour le groupe trivial $\{1\}$, qui est néanmoins homogène.

Remarque 2.47 *La $\tilde{p}$-homogénéité d'un groupe non-trivial de rang de Morley fini G signifie que $\tilde{p}$ est* le seul *paramètre d'unipotence $\tilde{q}$ pour lequel $U_{\tilde{q}}(G) \neq 1$.*

Si $\tilde{p}$ est de la forme (p, ∞), tout $U_{\tilde{p}}$-groupe est $\tilde{p}$-homogène (et d'ailleurs la notion classique de U_p-groupe suppose la nilpotence, rappelons que ce n'est pas le cas de la notion d'unipotence sans torsion). En caractéristique nulle nous aurons besoin du résultat suivant dû à Frécon.

Fait 2.48 ([FJ07, Theorem 2.18], comparer avec [Bur04, Lemma 2.32]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini (non nécessairement résoluble). On suppose que G agit définissablement sur un $\tilde{p}$-groupe définissable H. Alors $[G, H]$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe $\tilde{p}$-homogène de H.*

2.8.6 $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Burdges définit les "$U_{\tilde{p}}$-sous-groupes de Sylow" comme les $U_{\tilde{p}}$-sous-groupes définissables *nilpotents et maximaux* ([Bur04, §4.4]). Par souci de cohérence avec [FJ07] et la Définition 2.41, nous les appelons ici *$\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow*.

Nous formulons comme suit l'important analogue de la condition de normalisateur.

Fait 2.49 ([FJ07, Proposition 2.8], [Bur04, Lemma 2.28]) *Soient G un $\tilde{p}$-groupe de rang de Morley fini et $H < G$ un sous-groupe définissable. Si S_1 est le $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H et S_2 celui de $N_G(H)$, alors $S_1 < S_2$.*

Fait 2.50 ([FJ07, Theorem 5.7], [Bur04, Theorem 4.16]) *Les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini sont conjugués.*

Il en résulte un argument de Frattini portant sur les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow.

Corollaire 2.51 ([Bur04, Corollary 4.17]) *Soient H un groupe résoluble de rang de Morley fini, $K \trianglelefteq H$ un sous-groupe définissable connexe, et S un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de K. Alors $H = N_H(S) \cdot K$.*

Par ailleurs on sait préciser la structure des $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini connexe résoluble comme suit.

Fait 2.52 ([FJ07, Corollary 5.11], [Bur04, Lemma 4.19]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow de H sont les sous-groupes de la forme $U_{\tilde{p}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$, où Q est un sous-groupe de Carter de H.*

2.9 Intersections de paires maximales

Une application de l'unipotence ce Burdges est l'étude de certaines "intersections maximales" de sous-groupes de Borel dans [Bur07] (cf. aussi [Bur04]).

Précisons la terminologie. La maximalité est au sens *de l'inclusion des composantes connexes* et non du rang. Par définition, deux sous-groupes de Borel B_1 et B_2 distincts forment une *paire maximale* si l'on ne peut pas trouver deux autres sous-groupes de Borel B_3 et B_4 tels que $(B_1 \cap B_2)^\circ < (B_3 \cap B_4)^\circ$.

Il n'est pas a priori évident que chaque sous-groupe de Borel appartient à au moins une paire maximale. Le fait suivant l'implique (entre autres choses) dans le cas où l'on dispose déjà d'une intersection non-abélienne.

Fait 2.53 ([Bur07, Theorem 4.3]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Alors les faits suivants sont équivalents :*

1. *B_1 et B_2 sont les seuls sous-groupes de Borel contenant H.*
2. *La paire (B_1, B_2) est maximale.*
3. *H est maximal parmi les groupes de la forme $(B_1 \cap B_3)^\circ$, avec B_3 un sous-groupe de Borel distinct de B_1.*
4. *$d_\infty(B_1) \neq d_\infty(B_2)$.*

Fait 2.54 ([Bur07, Theorem 4.1, 1.]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Soit $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$. Alors H' est homogène (éventuellement trivial).*

Fait 2.55 ([Bur07, Theorem 4.5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et (B_1, B_2) une paire maximale avec $d_\infty(B_1) \geq d_\infty(B_2)$. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ est non abélien et l'on note $r' = d_\infty(H')$. Alors :*

1. $d_\infty(B_1) > d_\infty(H) = d_\infty(B_2)$ *et* $N^\circ(H) = H$.
2. *Tout sous-groupe définissable connexe nilpotent de* H *est abélien.*
3. $F_{r'}(H) = U_{(\infty,r')}(H)$ *est l'unique* (∞, r')*-sous-groupe de Sylow de* H*. Il est inclus dans* $F(B_2)$ *et la composante connexe de son normalisateur est incluse dans* B_2*.*
4. $F_\ell(B_2) \leq Z(H)$ *pour chaque* $\ell \neq r'$*, et* $F_{r'}(B_2)$ *est non abélien. (En particulier* $F_\ell(B_2)$ *est non abélien si et seulement si* $\ell = r'$*.)*
5. *Les sous-groupes de Carter de* H *sont des sous-groupes de Carter de* B_1*, et la composante connexe de leur normalisateur est incluse dans* B_2*.*
6. $F_{r'}(B_1) = F(B_1) \cap F(B_2)$ *est* (∞, r')*-homogène, et* B_1 *est l'unique sous-groupe de Borel contenant* $C^\circ(F_{r'}(B_1))$*.*

On remarquera que ce fait implique entre autres le

Corollaire 2.56 *Soit* G *un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit* K *un sous-groupe définissable, connexe, et nilpotent* non abélien. *Alors* K *est inclus dans un* unique *sous-groupe de Borel de* G*.*

2.10 Matériel superflu

Le résultat qui suit n'était pas disponible au moment d'entreprendre ce travail. Il permettrait certaines simplifications non essentielles dans nos preuves, mais nous croyons que les techniques employées valent d'être exposées sans en faire usage.

Fait 2.57 ([BC06, Theorem 3]) *Soit* G *un groupe de rang de Morley fini connexe et sans* p*-unipotence. Alors la* p*-torsion de* G *est torique.*

Une conséquence immédiate dans le cas des groupes connexes de type impair est que toute involution appartient à la composante connexe de son centralisateur. En particulier, le Théorème 1.1 et le Corollaire 1.2 valent sans l'hypothèse de toricité de l'involution.

3 Lemmes et principes généraux

3.1 Automorphismes involutifs

Nous commençons par un résultat purement groupe-théorique et évident, mais très utile.

Lemme 3.1 *Soient* G *un groupe,* $H \leq G$ *et* $K \leq N(H)$ *deux sous-groupes. On suppose que* K *est 2-divisible, et qu'il existe une involution* $i \in G$ *telle que*
- i *centralise ou inverse* H*, et*
- i *inverse* K*.*
Alors $[H, K] = 1$*.*

Preuve

Considérons le cas où i centralise H (l'autre cas est similaire, extrait de [BCJ07, Lemma 7.7]). Soit $(h,k) \in H \times K$. On a $h^k = (h^k)^i = (h^i)^{(k^i)} = h^{k^{-1}}$, d'où $[h,k^2] = 1$, et la conclusion en découle car K est 2-divisible. $\square$

Le lemme suivant relie involutions et $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow.

Lemme 3.2 *Soient H un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini* de type impair *et i une involution de H. Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence. On suppose que i centralise $U_{\tilde{p}}(H')$. Alors i centralise un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H.*

Preuve

Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de H contenant i. D'après les Faits 2.20 et 2.21, S est inclus dans un sous-groupe de Carter Q de H. Alors i est centrale dans Q. En particulier l'involution i centralise $U_{\tilde{p}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$, qui est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H d'après le Fait 2.52. $\square$

3.2 Groupes simples connexes minimaux et unipotence

On prouve ici une version affaiblie mais encore puissante du Lemme 2.29 pour la caractéristique nulle. Remarquons que la conclusion du lemme cité peut se paraphraser en : "$U_p(B)$ est l'unique U_p-sous-groupe maximal contenant A".

Lemme 3.3 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit B un sous-groupe de Borel de G, de paramètre d'unipotence* maximal $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(B))$ avec $d_\infty(B) > 0$. *Soit U un $\tilde{p}$-sous-groupe définissable de B contenant un sous-groupe $A \neq 1$ tel que $d_\infty(C^\circ(A)) \leq d_\infty(B)$.*

Alors $U_{\tilde{p}}(B) = F_{d_\infty(B)}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant U. En particulier, B est l'unique sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ *contenant U.*

Remarque 3.4 *D'un point de vue formel, l'hypothèse faite sur A est toujours satisfaite en caractéristique première. L'énoncé suggéré est donc naturel. Noter aussi que A n'est pas nécessairement un $U_{\tilde{p}}$-groupe lui-même, ni même définissable !*

Preuve

Remarquons que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \neq 1$ implique $d_\infty(C^\circ(A)) \geq d_\infty(B)$. On a donc égalité. D'autre part on garde à l'esprit que comme les $U_{\tilde{p}}$-groupes sont par définition connexes, toute inclusion stricte sera d'indice infini.

Soit U_1 un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G *distinct de* $U_{\tilde{p}}(B)$, contenant U, et maximisant le rang de $X = U_{\tilde{p}}(U_1 \cap U_{\tilde{p}}(B)) \geq U$.

On a $X < U_1$, car sinon $U_1 = X \leq U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_1 = U_{\tilde{p}}(B)$ par maximalité de U_1, contre la définition de U_1.

Nous montrons maintenant que $X < U_{\tilde{p}}(B)$. Sinon $X = U_{\tilde{p}}(B)$, et donc $U_{\tilde{p}}(B) \leq U_1$. Si cette dernière inclusion est stricte, la condition de normalisateur

2.49 dans U_1 implique $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) > U_{\tilde{p}}(B)$. Mais comme $N^\circ(U_{\tilde{p}}(B)) = B$, on a $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) \leq B$, et donc $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, ce qui est une contradiction. On a ainsi $U_{\tilde{p}}(B) = U_1$, contre la définition de U_1. Nous avons bien prouvé que $X < U_{\tilde{p}}(B)$.

Soit $N = N^\circ(X)$. Comme $X \leq N$, on a $d_\infty(N) \geq d_\infty(X) = d_\infty(B)$. Nous montrons l'égalité $d_\infty(N) = d_\infty(B)$. Sinon $d_\infty(N) > d_\infty(B)$, et alors X et $U_\infty(N)$ sont de degrés d'unipotence distincts. Comme ils se normalisent l'un l'autre, leur produit est nilpotent. La décomposition centrale du Fait 2.40 implique alors $[X, U_\infty(N)] = 1$. En particulier $U_\infty(N) \leq C^\circ(X) \leq C^\circ(A)$ dont le degré d'unipotence n'excède pas $d_\infty(B)$ par hypothèse, une contradiction. Ainsi $d_\infty(B) = d_\infty(N)$.

$U_{\tilde{p}}(N) \leq F^\circ(N)$ est donc un $\tilde{p}$-groupe d'après le Fait 2.45. Nous montrons qu'il n'est pas inclus dans $U_{\tilde{p}}(B)$. Comme $X < U_1$, la condition de normalisateur 2.49 dans U_1 implique $X < U_{\tilde{p}}(N_{U_1}(X)) \leq U_{\tilde{p}}(U_1 \cap U_{\tilde{p}}(N))$. En particulier, la définition de X implique que $U_{\tilde{p}}(N)$ n'est pas inclus dans $U_{\tilde{p}}(B)$.

Soit U_2 un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. La condition de normalisateur 2.49 appliquée à $X < U_{\tilde{p}}(B)$ impose maintenant $X < U_{\tilde{p}}(N_{U_{\tilde{p}}(B)}(X)) \leq U_{\tilde{p}}(U_{\tilde{p}}(N) \cap U_{\tilde{p}}(B)) \leq U_{\tilde{p}}(U_2 \cap U_{\tilde{p}}(B))$, une contradiction à la maximalité de X qui définit U_1. Notre première affirmation est prouvée.

Il reste à prouver la deuxième affirmation. Si B_1 est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ et qui contient U, alors d'après le Fait 2.45, $U \leq U_{\tilde{p}}(B_1)$ qui est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G (Faits 2.49, 2.45, et $N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_1)) = B_1$). Il vient alors $U_{\tilde{p}}(B_1) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, et la maximalité implique l'égalité. Enfin $B = N^\circ(U_{\tilde{p}}(B)) = N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_1)) = B_1$. □

Remarque 3.5 *Dans la preuve ci-dessus, on considère le sous-groupe* $U_{\tilde{p}}(U_{\tilde{p}}(N) \cap U_{\tilde{p}}(B))$ *faute d'homogénéité a priori de* $U_{\tilde{p}}(B)$ *(cf. Définition 2.46).*

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses du Lemme 3.3, on a* $N(U) \leq N(B)$.

Preuve

$N(U) \leq N(U_{\tilde{p}}(B)) \leq N(N^\circ(U_{\tilde{p}}(B))) = N(B)$. □

Remarque 3.7 *Le Lemme 3.3 et son Corollaire 3.6 seront souvent employés avec* $A \trianglelefteq B$, *et plus particulièrement avec* $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.

En effet si $A \trianglelefteq B$ (et bien sûr toujours avec l'hypothèse que $1 < A \leq U_{\tilde{p}}(B)$), on a $C^\circ(A) \leq B$, et donc $d_\infty(C^\circ(A)) \leq d_\infty(B)$. Nous sommes alors bien sous les hypothèses du Lemme 3.3.

3.3 Groupes simples connexes minimaux et intersections de paires maximales

Revenons aux intersections de paires maximales (cf. §2.9). Commençons par un résultat d'homogénéité.

Lemme 3.8 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et $B \neq B^g$ deux conjugués distincts d'un sous-groupe de Borel B. On suppose que $F(B) \cap F(B^g)$ n'est pas homogène. Alors $F^\circ(B)$ est abélien.*

Preuve

D'après le Fait 2.28 $F(B) \cap F(B^g)$ est sans torsion. En particulier il est connexe, ainsi que tous ses sous-groupes définissables. Notamment $F(B) \cap F(B^g) = F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g) = (F(B) \cap F(B^g))^\circ \neq 1$ (rappelons que le groupe trivial est homogène).

On a $U_p(B) = 1$ pour chaque nombre premier p. En effet si cela est faux pour un p, le Fait 2.27 implique alors que $F(B) \cap F(B^g) = 1$, une contradiction.

D'après le Fait 2.40 et avec la Notation 2.44, $F^\circ(B)$ est alors le produit central des $F_d(B)$ avec $d \geq 1$, et du sous-groupe abélien $d(S)$, clôture définissable du sous-groupe de torsion divisible de $F^\circ(B)$.

L'hypothèse que $F(B) \cap F(B^g)$ n'est pas homogène intervient maintenant. Il existe deux paramètres d'unipotence *distincts* $\tilde{p} = (\infty, d_1)$ et $\tilde{q} = (\infty, d_2)$ apparaissant dans $F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g)$. Soit alors U_1 (resp. U_2) un (∞, d_1)-sous-groupe de Sylow (resp. (∞, d_2)-sous-groupe de Sylow) non trivial de $F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g)$.

Soit L un sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(U_1)$. Alors, toujours d'après la décomposition centrale du Fait 2.40, $F_\ell(B) \leq L$ pour chaque $\ell \neq d_1$. Si $L \neq B$, alors le Corollaire 2.56 implique que les $F_\ell(B)$ sont abéliens pour $\ell \neq d_1$. Si $L = B$, alors $L \neq B^g$, et l'on trouve de même que les $F_\ell(B^g)$ sont abéliens. Ainsi tous les sous-groupes de la forme $F_\ell(B)$ avec $\ell \neq d_1$ sont abéliens.

On recommence l'argument précédent avec un sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(U_2)$, et cela prouve que tous les sous-groupes de la forme $F_\ell(B)$ avec $\ell \neq d_2$ sont abéliens. Ainsi tous les sous-groupes $F_\ell(B)$ avec $\ell \geq 1$ sont abéliens. C'est aussi le cas de $d(S)$. Comme les produits dans la décomposition du Fait 2.40 sont centraux, le groupe $F^\circ(B)$ est abélien. □

Lemme 3.9 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que (B_1, B_2) est une paire maximale, et que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Soient $r' = d_\infty(H')$ et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors $Q_{r'} := U_{(\infty,r')}(Q)$ n'est pas trivial, il est central dans H, et des trois cas suivants un et un seul se présente.*
- $N_G^\circ(Q_{r'}) = H$.
- $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) > H$, en outre $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) = H$, et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.
- $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) > H$, en outre $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) = H$, et B_2 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.

Preuve

La non trivialité de $Q_{r'}$ est dans [Bur07, Lemma 3.23], où il est aussi prouvé que $Q_{r'} = U_{(\infty,r')}(Z(H))$. On a donc $H \leq N^\circ(Q_{r'})$. La trichotomie résulte alors du fait que B_1 et B_2 sont les seuls sous-groupes de Borel contenant H d'après le Fait 2.53. La maximalité de H fait tout le reste. □

Bien remarquer que cet énoncé est symétrique, en ce qu'il ne suppose pas "de quel côté penche l'unipotence" (avec une inégalité comme $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$). C'est ce qui le distingue par exemple du Fait 2.55 (5), qui suppose $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$.

Le lemme suivant est une élaboration importante sur le Fait 2.55 qui n'est pas explicite dans [Bur07].

Lemme 3.10 *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 3.9. On suppose que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Alors tout (∞, r')-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{(\infty,r')}(H)$ est inclus dans B_2.*

Preuve
Soit V un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{(\infty,r')}(H)$. On peut supposer $U_{(\infty,r')}(H) < V$, si bien que $U_{(\infty,r')}(H) < U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H)))$ d'après le Fait 2.49.

Si $U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H)))$ est abélien, alors il centralise $U_{(\infty,r')}(H)$. D'après le Fait 2.55 (6), il vient alors $U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H))) \leq B_1$. Mais d'autre part $N^\circ(U_{(\infty,r')}(H)) \leq B_2$ d'après le Fait 2.55 (3). On en déduit que $U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H))) \leq H$. Ainsi $U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H))) \leq U_{(\infty,r')}(H)$, une contradiction.

Donc le groupe $U_{(\infty,r')}(N_V^\circ(U_{(\infty,r')}(H)))$ n'est pas abélien, et il est inclus dans un *unique* sous-groupe de Borel L d'après le Corollaire 2.56. Nous avons déjà dit que $N^\circ(U_{(\infty,r')}(H)) \leq B_2$ d'après le Fait 2.55 (3). En particulier $L = B_2$, et donc $V \leq B_2$. □

Le lemme suivant est remarqué à la fin de [Bur07, §3.3].

Lemme 3.11 *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 3.9. On suppose que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Si Q est un sous-groupe de Carter de B_1 et de B_2, alors $U_{(\infty,r')}(B_2) = F_{r'}(B_2)$ est l'unique (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2.*

Preuve
D'après les Faits 2.2 et 2.55 (3), le (∞, r')-groupe $U_{(\infty,r')}(B_2') \cdot U_{(\infty,r')}(Q)$ est inclus dans $F_{r'}(B_2)$. Mais d'après le Fait 2.52, $U_{(\infty,r')}(Q) \cdot U_{(\infty,r')}(B_2')$ est un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2. On a donc l'égalité, et $F_{r'}(B_2)$ est un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2.

Maintenant la conjugaison de tels sous-groupes, Fait 2.50, et $F_{r'}(B_2) \trianglelefteq B_2$ impliquent que $F_{r'}(B_2)$ est l'*unique* (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2. En particulier $U_{(\infty,r')}(B_2) = F_{r'}(B_2)$. □

3.4 w-invariance : en bas

Dans cette sous-section nous établissons des résultats de normalisation de sous-groupes remarquables. La question typique est la suivante : si une involution w normalise un groupe H, va-t-elle normaliser des sous-groupes "intéressants" de celui-ci ? De façon équivalente, une conjuguée de w va-t-elle normaliser un sous-groupe remarquable donné ? "Intéressant" ou "remarquable" ici signifie de l'un des types suivants : 2-sous-groupe de Sylow, sous-groupe de Carter, $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow.

3.4.1 2-sous-groupes de Sylow

Fait 3.12 *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient w une involution de G agissant sur un sous-groupe définissable H, et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. Alors une H-conjuguée de w normalise S.*

Preuve

On inclut S dans un 2-sous-groupe de Sylow $\hat{S}$ de $\hat{H} = H \cdot \langle w \rangle$. Alors $S = \hat{S} \cap H \trianglelefteq \hat{S}$. Maintenant d'après la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow dans $\hat{H}$ donnée par le Fait 2.12, il existe une conjuguée w_1 de w dans $\hat{S}$. Cette involution normalise $\hat{S}$, de plus c'est une $\hat{H} = H \cdot \langle w \rangle$-conjuguée de w, donc une H-conjuguée de w. □

3.4.2 Sous-groupes de Carter

Le Fait 3.12 possède un analogue pour les sous-groupes de Carter.

Lemme 3.13 *Soit G un groupe de rang de Morley fini* de type dégénéré. *Soient w une involution agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors une H-conjuguée de w normalise Q.*

Preuve

On remarque que H est $2^\perp$ d'après le Fait 2.20. En particulier, les 2-sous-groupes de Sylow de $\hat{H} = H \rtimes \langle w \rangle$ sont cycliques d'ordre 2. Les involutions de $\hat{H}$ sont donc toutes conjuguées. Il suffit ainsi de montrer que $N_{\hat{H}}(Q)$ contient une involution.

Dans la projection modulo H, l'image de $N_{\hat{H}}(Q)$ est $N_{\hat{H}}(Q)/N_H(Q) \hookrightarrow \langle w \rangle$. Or l'argument de Frattini implique que ce quotient ne peut pas être trivial. En particulier, $[N_{\hat{H}}(Q) : N_H(Q)] = 2$. Maintenant d'après le Fait 2.17, $N_{\hat{H}}(Q)$ possède un 2-élément x. Si x n'est pas une involution, alors x^2 est un 2-élément non-trivial de H, une contradiction. Donc x est bien une involution, et le résultat est prouvé. □

Le corollaire suivant sera la version utilisée.

Corollaire 3.14 *Soit G un groupe de rang de Morley fini* de type impair ou dégénéré. *Soient w une involution agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors une H-conjuguée de w normalise Q.*

Preuve

Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de H. D'après le Fait 3.12, on peut supposer à conjugaison près que w normalise S. D'après le Fait 2.21, il existe un sous-groupe de Carter Q de H contenant S. Ainsi $S \leq Q \leq C_H^\circ(S)$, et w normalise $C_H^\circ(S)$.

On peut donc, quitte à remplacer H par $C^\circ_H(S)$, supposer que $S \leq Z(H)$, et la clôture définissable $d(S)$ est encore dans $Z(H)$. Nous passons alors au quotient. Le groupe $Q \cdot d(S)/d(S)$ est un sous-groupe de Carter de $H/d(S)$. Ce dernier n'a pas d'involution, et d'après le Lemme 3.13 on peut supposer que w normalise Q modulo $d(S)$. Ainsi w normalise $Q \cdot d(S)$. Mais $d(S) \leq Z(H) \leq N(Q) = Q$ d'après le Fait 2.22, et donc w normalise Q. □

3.4.3 $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Voici maintenant l'énoncé correspondant pour les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow.

Corollaire 3.15 *Soit G un groupe de rang de Morley fini* de type impair ou dégénéré*. Soient w une involution agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et U un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H. Alors une H-conjuguée de w normalise U.*

Preuve
D'après le Fait 2.52 qui décrit la structure des $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe connexe résoluble, il existe un sous-groupe de Carter Q de H tel que $U = U_{\tilde{p}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$. Le Corollaire 3.14 implique qu'il existe une H-conjuguée de w, disons w_1, qui normalise Q, et donc $U_{\tilde{p}}(Q)$. D'autre part w_1 normalise H, donc elle normalise $U_{\tilde{p}}(H')$. L'involution w_1 normalise alors U. □

3.5 w-invariance : en haut

Nous établissons maintenant un résultat complémentaire à ceux de la sous-section précédente, à savoir une propriété d'*extension*. On s'interroge sur l'existence, pour un sous-groupe invariant par une involution w, d'un sous-groupe de Borel w-invariant le contenant.

Soient dans toute cette sous-section un groupe de rang de Morley fini G *simple connexe minimal*, et w une involution de G. Pour un sous-groupe $1 < H < G$ (non-trivial propre) définissable, connexe, et w-invariant, on s'intéresse à la propriété

$$(*) : H \text{ est inclus dans un sous-groupe de Borel } w\text{-invariant.}$$

Nous limitons fortement la structure des contre-exemples, et allons finalement tous les déterminer.

3.5.1 Généralités dans le cadre simple minimal

Lemme 3.16 *Un contre-exemple* maximal *à $(*)$ est maximal parmi les sous-groupes propres définissables connexes w-invariants.*

Preuve
Soit T un contre-exemple maximal à $(*)$. Soit $H \geq T$ un sous-groupe propre définissable, connexe, w-invariant et maximal pour ces propriétés. Si H est inclus

dans un sous-groupe de Borel w-invariant, alors T n'est pas un contre-exemple à $(*)$, une contradiction. Donc H lui-même est un contre-exemple à $(*)$, et la maximalité de T implique $H = T$. □

Corollaire 3.17 *Soit T un contre-exemple* maximal *à $(*)$. Si $1 \neq K \trianglelefteq T$ est un sous-groupe définissable, normal dans T, et w-invariant, alors $T = N^\circ(K)$.*

Lemme 3.18 *Un contre-exemple à $(*)$ est abélien.*

Preuve

Soit T un contre-exemple non-abélien à $(*)$. On peut supposer que T est un contre-exemple *maximal* à $(*)$ (il reste non-abélien). Notamment $T = N^\circ(T')$ d'après le Corollaire 3.17.

Soit $B \geq T$ un sous-groupe de Borel quelconque. B n'est pas abélien, donc pas un bon tore. En particulier d'après le Fait 2.36, il existe un paramètre d'unipotence "non trivial" pour B, c'est-à-dire un $\tilde{p} \neq (\infty, 0)$ tel que $U_{\tilde{p}}(B) \neq 1$. Nous supposons que ce paramètre d'unipotence est *maximal* pour B, de sorte que $U_{\tilde{p}}(B) \leq F^\circ(B)$ d'après le Fait 2.45.

On a $T' \leq F^\circ(B)$, donc $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(T') \leq N^\circ(T') = T$. Ainsi T admet le même paramètre d'unipotence *maximal* $\tilde{p}$ que B et $1 \neq U_{\tilde{p}}(T) \leq U_{\tilde{p}}(B)$. Si l'inclusion est stricte, la condition de normalisateur donne une contradiction au Corollaire 3.17. Ainsi $U_{\tilde{p}}(T) = U_{\tilde{p}}(B)$ et $B = N^\circ(U_{\tilde{p}}(T)) \leq T$. Donc T est lui-même un sous-groupe de Borel w-invariant, une contradiction. □

Remarque 3.19 [BCJ07, Lemma 6.7] *offre une autre preuve.*

Corollaire 3.20 *Soit T un contre-exemple* maximal *à $(*)$. Si $1 \neq K \leq T$ est un sous-groupe définissable w-invariant, alors $T = N^\circ(K)$.*

Corollaire 3.21 *Un contre-exemple* maximal *à $(*)$ est abélien et d'indice fini dans son normalisateur. Si K est un contre-exemple à $(*)$ (non nécessairement maximal), alors $N^\circ(K)$ est un contre-exemple maximal à $(*)$.*

3.5.2 Le cas $w \in C^\circ(w)$

Lemme 3.22 *Si $w \in C^\circ(w)$, alors un contre-exemple à $(*)$ est inversé par w.*

Preuve

Soit T un contre-exemple à $(*)$, que l'on peut supposer maximal. Soit $K = (T \cap C^\circ(w))^\circ$. Ce groupe est w-invariant.

Si $K \neq 1$, alors d'après le Corollaire 3.17, $T = N^\circ(K)$. Dans ce cas, $N^\circ_{C^\circ(w)}(K) = K$, et K est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(w)$. Mais alors K est autonormalisant dans $C^\circ(w)$ selon le Fait 2.22. Ainsi $Z(C^\circ(w)) \leq N_{C^\circ(w)}(K) = K$. En particulier, comme $w \in Z(C^\circ(w))$, il vient $w \in K \leq T$. Un sous-groupe de Borel contenant T est alors w-invariant, une contradiction. Ainsi $K = 1$. En particulier $C_T(w)$ est fini.

D'après le Fait 2.11, $T = [T, w] = \{[t, w],\ t \in T\}$ car T est abélien. Maintenant tout élément de T de la forme $[t, w]$ est inversé par w, et donc w inverse T. □

Corollaire 3.23 *On suppose $w \in C^\circ(w)$. Soit T un contre-exemple* maximal *à $(*)$. Si $1 \neq K \leq T$ est un sous-groupe définissable, alors $T = N^\circ(K)$.*

3.5.3 Involutions toriques en type impair

Une involution torique est comme on l'a dit une involution qui appartient à un 2-tore. D'après le Fait 2.57, l'hypothèse supplémentaire de toricité de l'involution que nous ferons dans la suite est toujours vérifiée, même si ce fait ne sera jamais invoqué.

Lemme 3.24 *On suppose G de type impair et w torique. Alors un contre-exemple* maximal *à $(*)$ contient la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow de G.*

Preuve

Soit T un contre-exemple maximal à $(*)$. Pour $g \notin N(T)$, on forme $K_g = T \cap T^g$. Si $K_g \neq 1$, alors le Corollaire 3.23 implique $N^\circ(K_g) = T$, et $N^\circ(K_g) = T^g$ de même, une contradiction. Ainsi les conjugués de T sont deux-à-deux disjoints. Comme $N^\circ(T) = T$, il vient que T^G est générique dans G d'après un simple calcul de rang.

Fixons maintenant un sous-groupe de Borel B_w contenant $C^\circ(w)$. Le Fait 2.5 donne la généricité de B_w^G. Il existe donc $g \in G$ tel que $T \cap B_w^g \neq 1$. Nous montrons que cette intersection est infinie. Soit $x \in (T \cap B_w^g)^\#$. D'une part $T \leq C^\circ(x)$, d'autre part $C^\circ(x)$ est un sous-groupe propre définissable, connexe et w-invariant de G. Par maximalité de T, il vient $T = C^\circ(x)$. Maintenant comme B_w^g est résoluble, $C^\circ_{B_w^g}(x)$ est infini, et ce dernier sous-groupe est égal à $(T \cap B_w^g)^\circ$. On en déduit que $K = (T \cap B_w^g)^\circ$ est non-trivial.

D'après le Corollaire 3.23, il vient $T = N^\circ(K)$. En particulier $N^\circ_{B_w^g}(K) = K$, et K est donc un sous-groupe de Carter de B_w^g. D'après le Corollaire 2.23, K contient un 2-sous-groupe de Sylow de B_w^g. Donc T aussi contient un 2-sous-groupe de Sylow de B_w^g. Maintenant l'hypothèse sur w implique que B_w a même rang de Prüfer que G, et T contient donc bien un 2-tore maximal de G, c'est-à-dire la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow de G. □

En résumé

Proposition 3.25 *On suppose G de type impair et w torique. Alors un contre-exemple à $(*)$ est abélien et inversé par w, en outre un contre-exemple* maximal *à $(*)$ est d'indice fini dans son normalisateur et contient la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow de G.*

Enfin, puisqu'il est l'objet du présent article, nous mentionnons $\mathrm{PSL}_2(K)$.

3.5.4 Propriété $(*)$ et PSL_2

Théorème 3.26 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair. On suppose qu'une involution torique w de G possède un contre-exemple à $(*)$. Alors*

G est de rang de Prüfer 1, et le centralisateur de w n'est pas un sous-groupe de Borel de G.

Preuve
On part d'un contre-exemple maximal à $(*)$, disons T. D'après la Proposition 3.25, T contient la composante connexe S_1° d'un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de G.

Soit B un sous-groupe de Borel contenant T. Soit A un sous-groupe B-minimal de B. Si A est central dans B, alors $A \leq C^\circ(T) = T$, et dans ce cas d'après le Corollaire 3.23 il vient $T = N^\circ(A) = B$, une contradiction.

Ainsi A n'est pas central dans B, et $B/C_B(A)$ est infini. Il est connu que $A \leq Z(F^\circ(B))$, et que le groupe $A \rtimes B/C_B(A)$ satisfait les hypothèses du théorème du corps de Zilber (Fait 2.7). Soit K le corps impliqué.

Nous prouvons $C_T(A) = 1$. Sinon, soit $t \in C_T(A)^\#$. Notant $d(t)$ la clôture définissable de t, il vient d'après le Corollaire 3.23 que $A \leq N^\circ(d(t)) = T$, et $B = N^\circ(A) = T$, une contradiction.

Ainsi $C_T(A) = 1$, et $T \hookrightarrow B/C_B(A)$, lequel se plonge dans $K^\times$. Ceci prouve que le rang de Prüfer de G est au plus 1, et comme il n'est pas nul par hypothèse, c'est exactement 1.

Soit j l'unique involution, torique, de S_1°. La conjugaison des involutions toriques dans un groupe de rang de Prüfer 1 est conséquence immédiate du Fait 2.12. Ainsi w et j sont conjuguées dans G. Maintenant comme $T = C^\circ(j)$ d'après le Corollaire 3.23, et que T n'est pas un sous-groupe de Borel, $C^\circ(w)$ n'est pas non plus un sous-groupe de Borel. $\square$

Ceci jumelé avec le Théorème 1.1 impliquera l'unicité de la situation.

Lemme 3.27 *Les Théorèmes 1.1 et 3.26 impliquent le Corollaire 1.2.*

Preuve
Soient G et w comme dans l'énoncé du Corollaire 1.2. On suppose qu'il existe un sous-groupe propre définissable, connexe, et w-invariant H de G qui n'est inclus dans aucun sous-groupe de Borel w-invariant. On peut supposer que H est maximal pour ces propriétés. En particulier $H > 1$, car sinon $C^\circ(w) = 1$ par maximalité, une contradiction.

Le Théorème 3.26 implique alors que G est de rang de Prüfer 1, et que $C^\circ(w)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. D'après le Théorème 1.1, G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2. $\square$

4 Analyse préliminaire

Nous commençons à présent la preuve de notre théorème principal, dont nous rappelons l'énoncé.

Théorème 1.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de*

G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

L'étude de la configuration du Théorème 1.1 commence maintenant, et pour celle-ci nous fixons des notations.

Notation 4.1 *G est un groupe simple connexe minimal de type impair et de 2-rang de Prüfer 1.*

S est un 2-sous-groupe de Sylow de G et i est l'unique involution de S°.

On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G.

B est un sous-groupe de Borel de G contenant strictement $C^\circ(i)$.

4.1 Involutions de B

Lemme 4.2 *$F^\circ(B)$ est sans involution.*

Preuve
Soit sinon j une involution de $F^\circ(B)$. D'après le Fait 2.20, j est dans un 2-tore T de $F^\circ(B)$ que l'on peut supposer être son 2-tore maximal. En particulier $C_B^\circ(j) \geq C_B^\circ(T) \geq B$ d'après le Fait 2.18. Ainsi $i = j$ est centrale dans B, contre l'hypothèse que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. □

Lemme 4.3 *$C_B(i)$ est connexe, B s'écrit sous la forme $B = C_G^\circ(i)\cdot(F^\circ(B))^{-i}$, et cette décomposition est univoque.*

Preuve
Nous passons modulo $F^\circ(B)$. D'après le Fait 2.2, le quotient $B/F^\circ(B)$ est abélien, donc l'action de i y est triviale.

En particulier pour tout $b \in B$, il existe un $f \in F^\circ(B)$ tel que $b^i = bf$. Conjuguant à nouveau par i, on trouve $f^i = f^{-1}$, i.e. $f \in (F^\circ(B))^{-i}$. D'après le Lemme 4.2 et le Fait 2.10, on peut écrire $f = g^2$, où g est encore dans $(F^\circ(B))^{-i}$. Il vient alors $b = (bg)g^{-1}$, avec $(bg)^i = (bf)g^{-1} = bg \in C_B(i)$ et $g^{-1} \in (F^\circ(B))^{-i}$.

Nous avons prouvé $B = C_B(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$. Mais B étant connexe, on a $B = C_B^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i} = C_G^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$.

Montrons enfin l'unicité de la décomposition : si $c_1 f_1 = c_2 f_2$ avec des notations naturelles, il vient $f_2 f_1^{-1} \in C(i)$, donc $f_1^2 = f_2^2$, ce qui dans $F^\circ(B)$ qui est sans 2-torsion implique $f_1 = f_2$. Le lemme est prouvé. □

Corollaire 4.4 $I(B) = i^{F^\circ(B)}$.

Preuve
En effet les involutions de B sont conjuguées dans B d'après les Faits 2.20 et 2.12 en rang de Prüfer 1, et le Lemme 4.3 implique alors $I(B) = i^{F^\circ(B)}$. □

4.2 Involutions toriques et unipotence

L'involution i n'étant pas centrale dans B, B n'est pas abélien. En particulier, on sait d'après le Fait 2.36 que B admet un paramètre d'unipotence *maximal* distinct de $(\infty, 0)$, que nous fixons *pour tout le reste de cet article.*

Notation 4.5 *Soit $\tilde{p} = (p, d)$ un paramètre d'unipotence* maximal *de B. (On vient de remarquer $d > 0$.)*

Remarque 4.6 *La caractéristique p est première ou ∞, mais l'hypothèse sur le type de G implique que ce n'est pas 2. Rappelons également que plusieurs paramètres maximaux pourraient a priori être disponibles, nous en fixons un pour tout l'article. Remarquons aussi qu'on maximise $\tilde{p}$ seulement à B fixé, et non pas en le faisant varier parmi tous les sous-groupes de Borel de G contenant $C^\circ(i)$. Enfin, p sera bien la caractéristique du corps intervenant dans la conclusion du Théorème 1.1.*

Lemme 4.7 *$d_p(C^\circ(i)) \leq d$.*

Preuve
$C^\circ(i) \leq B$. □

Le lemme et le corollaire qui suivent (Lemme 4.8 et Corollaire 4.9) concernent le seul cas où $p = \infty$. Si la caractéristique est première, l'hypothèse du Lemme 4.8 n'est jamais vérifiée, et la conclusion du Corollaire 4.9 l'est toujours.

Lemme 4.8 *On suppose $p = \infty$. Soit j une involution conjuguée à i qui normalise un sous-groupe $H < G$ définissable, connexe, et admettant le paramètre d'unipotence* maximal *(∞, ℓ), avec $\ell > d$. Alors j inverse $U_\infty(H)$.*

Preuve
Comme on l'a remarqué, nécessairement $p = \infty$ puisque $\ell > d$. L'unipotence considérée ici est celle de caractéristique nulle.

$U_\infty(H) = U_{(\infty,\ell)}(H)$ est sans involution. Sinon, comme il est connexe, il contient tout un 2-tore T conjugué dans G à S°, car G est de rang de Prüfer 1. Le 2-tore T est central dans $U_\infty(H)$, car ce dernier est nilpotent. En particulier, $U_\infty(H)$ centralise son involution, qui est une G-conjuguée de i, contre le Lemme 4.7.

Le Fait 2.43 implique alors que $C^\circ_{U_\infty(H)}(j)$ est un (∞, ℓ)-sous-groupe. S'il est non-trivial, c'est encore une contradiction au Lemme 4.7. Ainsi $C^\circ_{U_\infty(H)}(j) = 1$, et cela prouve que j inverse $U_\infty(H)$. □

Corollaire 4.9 *On suppose $p = \infty$. Soient j et k deux conjuguées distinctes de i normalisant un sous-groupe $1 \neq H < G$ définissable et connexe. Si $[j, k] = 1$, alors $d_\infty(H) \leq d$.*

Preuve
Comme on l'a remarqué avant d'énoncer le Lemme 4.8, la conclusion est triviale si p n'est pas ∞, puisqu'alors $d = \infty$.

L'élément jk est une troisième involution normalisant H, et encore conjuguée à i d'après le Corollaire 2.16. Si $d_\infty(H) > d$, alors d'après le Lemme 4.8, chacune de ces trois involutions inverse $U_\infty(H)$, ce qui force $U_\infty(H) = 1$. Pourtant on a supposé $d_\infty(H) > d > 0$, et donc $U_\infty(H) \neq 1$, une contradiction. □

4.3 Involutions toriques de $N(B)$

Théorème 4.10 *Avec la Notation 4.1, $i^G \cap N(B) \subseteq B$.*

Cette sous-section est consacrée à la preuve du Théorème 4.10. Supposons le contraire et

fixons une involution k de $i^G \cap (N(B) \setminus B)$.

A conjugaison près on peut supposer que k normalise S° d'après le Fait 3.12. Notamment, k inverse S° d'après le Corollaire 2.16.

Lemme 4.11 $C^\circ_{F^\circ(B)}(k) \neq 1$.

Preuve
Sinon, k inverse $F^\circ(B)$ d'après le Fait 2.10. Comme d'autre part k inverse S°, il vient $[S^\circ, F^\circ(B)] = 1$ avec le Lemme 3.1. Alors $F^\circ(B) \cdot S^\circ$ est un sous-groupe nilpotent et normal de B d'après le Fait 2.2, et donc inclus dans $F^\circ(B)$. En particulier $i \in S^\circ \leq F^\circ(B)$, une contradiction au Lemme 4.2. □

Notation 4.12 *Soit B_k un conjugué de B contenant $C^\circ(k)$. (Nécessairement $B_k \neq B$, car sinon $k \in B$).*

Remarque 4.13 *Par conjugaison, le paramètre d'unipotence $\tilde{p} = (p, d)$ est* maximal *pour B_k.*

Lemme 4.14 *Soit X un sous-groupe définissable connexe de B (resp. B_k) invariant par i et k, et admettant $\tilde{p}$ comme paramètre d'unipotence. Alors B (resp. B_k) est le seul sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence* maximal *$\tilde{p}$ contenant X.*

Preuve
Nous faisons la preuve pour B, celle pour B_k étant similaire. On peut supposer que $X = U_{\tilde{p}}(X) \neq 1$, et donc que X est un $U_{\tilde{p}}$-groupe. Soit B_1 un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ et contenant X.

Comme X est de degré d'unipotence maximal dans B_1, on a $X \leq U_{\tilde{p}}(B_1)$, et ainsi $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_1))) \leq C^\circ(X)$. Mais ce dernier sous-groupe est invariant par i et par k, donc le Corollaire 4.9 s'applique. Ainsi le degré d'unipotence de $C^\circ(X)$

est $\leq d$, et donc $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_1))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$. De même $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$.

Si $p \neq \infty$, le Lemme 2.29 avec $A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(X)$. Le même argument vaut pour B_1, et donc $B_1 = B$.

Si $p = \infty$, le Lemme 3.3 avec $U = A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A, et donc que c'est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$. Le même argument vaut pour B_1, et donc $B_1 = B$. □

Corollaire 4.15 *L'involution k inverse $U_{\tilde{p}}(B)$.*

Preuve

$U_{\tilde{p}}(B) \leq F^\circ(B)$ d'après le Fait 2.25 en caractéristique p ou le Fait 2.45 en caractéristique ∞. Comme $F^\circ(B)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 4.2, $U_{\tilde{p}}(B)$ est sans involution.

Supposons que k n'inverse pas $U_{\tilde{p}}(B)$. Alors $X = C^\circ_{U_{\tilde{p}}(B)}(k) \neq 1$ d'après le Fait 2.10. Or X est un $U_{\tilde{p}}$-groupe, ce qui est évident si $p \neq \infty$, et provient du Fait 2.43 sinon. Par construction, $X \leq B \cap B_k$.

Le Lemme 4.14, avec X dans B *et* dans B_k, donne $B = B_k$, une contradiction à la Notation 4.12. □

Corollaire 4.16 *$U_{\tilde{p}}(B)$ est abélien, inversé par k et ik, et centralisé par i.*

Preuve

En effet, tout ce que nous venons de voir pour k vaut encore pour ik d'après le Corollaire 2.16, et donc ik inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ d'après le Corollaire 4.15. En particulier le produit $i = ikk$ centralise $U_{\tilde{p}}(B)$. □

Corollaire 4.17 *B est l'unique sous-groupe de Borel de paramètre* maximal *$\tilde{p}$ contenant $C^\circ(i)$. En particulier la configuration est symétrique dans le sens suivant. L'involution i normalise B_k mais n'est pas dans B_k, les involutions i et ki inversent $U_{\tilde{p}}(B_k)$, et k le centralise.*

Preuve

Le Lemme 3.3 impose l'unicité de B parmi les sous-groupes de Borel de paramètre maximal $\tilde{p}$ contenant $U_{\tilde{p}}(B)$, et nous venons de prouver que $U_{\tilde{p}}(B) \leq C^\circ(i)$. Ceci démontre le premier point.

B_k est alors l'unique conjugué de B contenant $C^\circ(k)$. Comme i normalise $C^\circ(k)$, i normalise également B_k, et c'est aussi vrai de ik. Si $i \in B_k$, alors elle y est conjuguée à k d'après la conjugaison et la connexité des 2-sous-groupes de Sylow de B_k dont le rang de Prüfer est 1. Il vient alors $C^\circ(i) \leq B_k$, et donc $B_k = B$, une contradiction. Donc $i \notin B_k$. Le Corollaire 4.16 s'applique alors, mutatis mutandis, à l'action de $\langle i, k \rangle$ sur B_k, ce qui achève la démonstration. □

Notation 4.18 *Soit $H = (B \cap B_k)^\circ$.*

Remarque 4.19 *H est k-invariant. Par symétrie, il est également i-invariant. D'autre part $H \neq 1$ d'après le Lemme 4.11.*

Lemme 4.20 *H est sans involution, abélien et centralisé par k.*

Preuve

Nous montrons que H est sans involution. Sinon d'après le Fait 2.20, H qui est connexe contient un 2-tore T, que l'on peut supposer k-invariant grâce au Fait 3.12. Le groupe $T \rtimes \langle k \rangle$ est alors un 2-sous-groupe de B_k, donc d'après le Fait 2.20, et l'hypothèse que le rang de Prüfer du groupe ambiant est 1, il vient $k \in T \leq B$, une contradiction.

Nous montrons que H est abélien. Sinon, $H' \neq 1$. Soit $K = C^\circ(H')$. Alors K est $\langle i, k \rangle$-invariant. D'après le Corollaire 4.9 si $p = \infty$ ou de façon évidente sinon, $d_p(K) \leq d$. Mais d'autre part, K contient tant $U_{\tilde{p}}(Z^\circ(F(B))) = U_{\tilde{p}}(B)$ que $U_{\tilde{p}}(B_k)$. Avec le Fait 2.25 ou le Fait 2.45 suivant la valeur de p, il vient que $U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_{\tilde{p}}(B_k)$ sont inclus dans $F^\circ(K)$. Si $p \neq \infty$, le Lemme 2.29 implique $B = B_k$, une contradiction à la Notation 4.12. Si $p = \infty$, d'après le Lemme 3.3, $U_{\tilde{p}}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G. Il vient alors $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, d'où l'égalité par conjugaison des $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow de K. Puis passant aux normalisateurs, $B = B_k$, encore une contradiction à la Notation 4.12.

Nous montrons que k centralise H. Sinon H^{-k}, un groupe abélien connexe d'après l'abélianité de H et le Fait 2.10, est non-trivial. Soit $K = C^\circ(H^{-k})$. D'une part k inverse $U_{\tilde{p}}(B)$. Le groupe H^{-k} le normalise, donc d'après le Lemme 3.1, on a $U_{\tilde{p}}(B) \leq K$. D'autre part k centralise $U_{\tilde{p}}(B_k)$. Le groupe H^{-k} le normalise, donc toujours d'après le Lemme 3.1, on a $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq K$. Or H^{-k}, et donc K, est $\langle i, k \rangle$-invariant. En particulier, avec le Corollaire 4.9, $d_p(K) \leq d$, et K admet $\tilde{p}$ comme paramètre d'unipotence *maximal.* Il contient pourtant $U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_{\tilde{p}}(B_k)$, et l'on obtient une contradiction comme au point précédent. □

Lemme 4.21 *$C_B^\circ(H) = H$.*

Preuve

Une inclusion est simplement l'abélianité de H. Nous prouvons à présent que $C_B^\circ(H) \leq H$. Soit $Y = C^\circ_{F^\circ(B_k)}(i) \leq H$. Alors $Y \neq 1$ d'après le Lemme 4.11 et la symétrie de la configuration, décrite par le Corollaire 4.17. En outre i et k normalisent Y. Donc $K = C^\circ(Y)$ est également $\langle i, k \rangle$-invariant. D'après le Corollaire 4.9, $d_p(K) \leq d$.

$U_{\tilde{p}}(B_k)$ est abélien, donc d'après le Fait 2.40, il centralise Y. Ainsi $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq K$, et donc $d_p(K) = d$. Si $p \neq \infty$, alors le Lemme 2.29 donne $K \leq B_k$. Si $p = \infty$, d'après le Lemme 3.3, $U_{\tilde{p}}(B_k)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G, et donc $U_{\tilde{p}}(K) \geq U_{\tilde{p}}(B_k)$ est une égalité. On a encore $K \leq N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_k)) = B_k$.

Enfin $C_B^\circ(H) \leq C_B^\circ(Y) \leq (B \cap B_k)^\circ = H$, ce qui prouve la seconde inclusion. □

Notation 4.22 *Soit $N = N_B^\circ(H)$.*

Lemme 4.23 *N est sans involution.*

Preuve
Sinon il contient un 2-tore T que l'on peut supposer k-invariant d'après le Fait 3.12. En particulier, k inverse T d'après le Corollaire 2.16. Comme k centralise H, le Lemme 3.1 implique $[T, H] = 1$, et donc $T \leq C_B^\circ(H) = H$, qui est pourtant sans involution d'après le Lemme 4.20. $\square$

Lemme 4.24 *$N = H$.*

Preuve
Ecrivons en effet $N = C_N(k) \cdot N^{-k}$ avec le Fait 2.10. La décomposition étant univoque, chacun de ces ensembles est de degré 1. En particulier $C_N(k) = C_N^\circ(k) \leq H$.

N^{-k} est un ensemble 2-divisible de degré 1 qui normalise H. En particulier, pour chaque $n \in N^{-k}$, la clôture définissable $d(n)$ est un groupe 2-divisible encore inversé par k. Le Lemme 3.1 implique alors $[d(n), H] = 1$, et cela est vrai pour tout $n \in N^{-k}$. Ainsi $[N^{-k}, H] = 1$, et donc $N^{-k} \subseteq C(H)$.

En conclusion, $N \leq C(H)$ et $N \leq C_B^\circ(H) = H$ d'après le Lemme 4.21. $\square$

Nous dérivons maintenant la contradiction finale de cette sous-section. H est abélien et d'indice fini dans $N_B^\circ(H)$, donc c'est un sous-groupe de Carter de B. En particulier, H contient un 2-tore d'après le Corollaire 2.23, une contradiction avec le Lemme 4.20 qui achève la preuve du Théorème 4.10. $\square$

4.4 Produits d'involutions toriques et ensembles $T[w]$

Commençons par remarquer que $i^G \setminus N(B)$ (cet ensemble coïncide avec $i^G \setminus B$ d'après le Théorème 4.10) est générique dans i^G d'après le Fait 2.3. Nous nous concentrerons donc sur les conjuguées de i qui ne normalisent pas B et étudierons la façon dont elles se répartissent dans les cosets de B.

Notation 4.25 *Soit pour $w \in i^G \setminus N(B)$ l'ensemble définissable*

$$T[w] = \{b \in B,\, b^w = b^{-1}\}.$$

Remarque 4.26 *On a les équivalences : $T[w]$ est un groupe $\Leftrightarrow$ $T[w] = d(T[w])$ est un groupe définissable $\Leftrightarrow$ les éléments de $T[w]$ commutent deux-à-deux.*

On remarque avec le Lemme 4.3 et l'égalité $C^\circ(i) = C_B^\circ(i)$ que

$$\mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(C^\circ(i)) = \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right).$$

Notation 4.27 *Soit l'ensemble définissable*

$$I_0 = \{w \in i^G \setminus N(B),\ \mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)\}.$$

Lemme 4.28 *I_0 est générique dans i^G.*

Preuve

Considérons $i^G \backslash N(B)$ muni de la relation d'équivalence définissable $\sim$ définie par

$$w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 w_2 \in B,$$

et la projection canonique

$$p : i^G \setminus N(B) \to (i^G \setminus N(B))/\sim .$$

Pour k variant de 0 à $\mathrm{rg}(G)$, les ensembles

$$X_k = \{w \in i^G \setminus N(B),\ \mathrm{rg}\left(p^{-1}(p(w))\right) = k\}$$

sont définissables par définissabilité du rang. De plus ils sont deux-à-deux disjoints, et recouvrent $i^G \setminus N(B)$. Or l'ensemble $i^G \setminus N(B)$ est de degré 1. Il existe donc un unique entier k_0 tel que X_{k_0} soit générique dans $i^G \setminus N(B)$. Ce k_0 doit vérifier

$$\mathrm{rg}\left(i^G \setminus N(B)\right) = \mathrm{rg}\left(X_{k_0}\right) = k_0 + \mathrm{rg}\left(p(X_{k_0})\right).$$

Comme $p(X_{k_0})$ s'injecte dans G/B, on a $\mathrm{rg}(p(X_{k_0})) \leq \mathrm{rg}(G/B)$, et donc

$$k_0 \geq \mathrm{rg}\left(i^G \setminus N(B)\right) - \mathrm{rg}\left(G/B\right) = \mathrm{rg}\left(i^G\right) - \mathrm{rg}\left(G/B\right) = \mathrm{rg}\left(B\right) - \mathrm{rg}\left(C^\circ(i)\right),$$

c'est-à-dire $k_0 \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)$.

Or pour tout $w_1 \in i^G \setminus N(B)$, la fibre au-dessus de $p(w_1)$ est $p^{-1}\left(p(w_1)\right) = \{w_2 \in i^G \setminus N(B), w_1 w_2 \in B\} \subseteq w_1 T[w_1]$. Ainsi, pour $w_1 \in X_{k_0}$, $\mathrm{rg}(T[w_1]) \geq k_0 \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)$, et donc $w_1 \in I_0$. D'où $X_{k_0} \subseteq I_0$. L'ensemble I_0 est donc bien générique dans $i^G \setminus N(B)$, et dans i^G. $\square$

5 Cas I : $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i)$

Dans cette partie nous prouvons le Théorème 1.1 sous l'hypothèse supplémentaire que "i inverse de l'unipotence" dans B. Dans PSL_2, une involution inverse le sous-groupe unipotent d'un sous-groupe de Borel contenant la composante connexe de son centralisateur ce qui est notre notion de sous-groupe de Borel "standard". L'hypothèse que nous introduisons est une approximation très faible et néanmoins suffisante de ce fait, et sera établie seulement par la suite (§6 ci-dessous). Ainsi nous montrons dans cette section le

Théorème 5.1 *Soient G un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution de G. On suppose qu'il existe un sous-groupe de Borel B de G contenant $C^\circ(i)$ et tel que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i)$, où $\tilde{p} = (p, d)$ est un paramètre d'unipotence* maximal *de B.*

Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique p.

Nous travaillons donc dans tout cette section sous l'hypothèse

$$(\mathrm{I}) : U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i).$$

Remarquons que l'inclusion $C^\circ(i) < B$ est nécessairement stricte sous cette hypothèse. Les notations et résultats préliminaires de §4 valent donc encore dans cette section, c'est-à-dire que B est un sous-groupe de Borel de G contenant strictement $C^\circ(i)$ selon la Notation 4.1, et que $\tilde{p} = (p, d)$ en est un paramètre d'unipotence *maximal* comme dans la Notation 4.5. Parmi les résultats préliminaires de §4, rappelons que d'après le Théorème 4.10,

$$i^G \cap N(B) \subseteq B.$$

5.1 Un sous-groupe B-minimal

Comme dans §4, I_0 désigne l'ensemble des involutions w de $i^G \setminus N(B)$ qui satisfont

$$\mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(C_B^\circ(i)) = \mathrm{rg}\left((F^\circ(B)^{-i}\right).$$

Rappelons que cet ensemble est générique dans i^G d'après le Lemme 4.28.

Notation 5.2 *Soit* $U = (U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))))^{-i}$.

Lemme 5.3 *U est un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe $\tilde{p}$-homogène de $U_{\tilde{p}}(B)$, non-trivial, et normal dans B.*

Preuve
U est bien un groupe car $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ est abélien. La non-trivialité de U est l'hypothèse (I) de la présente section. Le fait que U soit normal dans B est évident, puisque $B = (F^\circ(B))^{-i} \cdot C^\circ(i)$ d'après le Lemme 4.3.

D'après le Fait 2.10 et le Lemme 4.2, $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ est produit direct de $C_{U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))}(i)$ et de U. Ce dernier est donc définissablement isomorphe à un quotient de $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, et donc d'après le "push-forward" du Fait 2.39, U est un $\tilde{p}$-groupe. Selon le Fait 2.48, $[U, B]$ est $\tilde{p}$-homogène au sens de la Définition 2.46. Or $U = [U, i] \leq [U, B] \leq U$, et donc $U = [U, B]$ est $\tilde{p}$-homogène. □

Notation 5.4 *Soit A un sous-groupe B-minimal de U.*

Lemme 5.5 *A est un $\tilde{p}$-groupe.*

Preuve
U est un $\tilde{p}$-groupe $\tilde{p}$-homogène. □

Remarque 5.6 *Le groupe U et sa $\tilde{p}$-homogénéité ne servent qu'à obtenir A. Sans homogénéité, on ne pourrait pas en général affirmer l'existence d'un $\tilde{p}$-sous-groupe B-minimal.*

Lemme 5.7 *$U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A.*

Preuve

Si $p \neq \infty$, c'est le Lemme 2.29 appliqué avec A. Dans le cas $p = \infty$, c'est le Lemme 3.3, où A joue les deux rôles. $\square$

Remarque 5.8 *Puisque* $I(B) = i^{F^\circ(B)}$ *et* $A \leq Z(F^\circ(B))$*, chaque involution de* B *inverse* A*.*

Lemme 5.9 *Soit* N *un sous-groupe propre définissable connexe et contenant* A*. Si* $w \in i^G$ *normalise* N*, alors* $w \in B$*.*

Preuve

Grâce au Théorème 4.10, il suffit de prouver que $w \in N(B)$. Supposons $w \notin N(B)$. Alors $w \notin N(A)$, car sinon w normalise $N^\circ(A) = B$, une contradiction à la définition de w. Ainsi $A^w \neq A$, et ces deux groupes sont inclus dans N. En particulier $d_p(N) \geq d$.

Nous montrons que $p = \infty$ et $d_p(N) > d$. Si $p \neq \infty$, l'inclusion de A et de A^w dans N donne immédiatement une contradiction au Lemme 2.29. Ainsi $p = \infty$. Supposons $d_\infty(N) \leq d$. Comme $A \leq N$, on a $d_\infty(N) = d$, et $A \leq U_{\tilde{p}}(N)$. D'après le Lemme 5.7, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A, et donc c'est aussi l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Mais les mêmes arguments impliquent aussi que $U_{\tilde{p}}(B^w)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Il vient donc $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^w)$, et en prenant les normalisateurs connexes, on obtient $B = B^w$, une contradiction. Ainsi $d_p(N) > d$.

Comme A est un $\tilde{p}$-sous-groupe définissable, on peut l'inclure dans un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow V de N. D'après le Corollaire 3.15, il existe une involution w_1, conjuguée à w sous N, qui normalise V. Selon le Lemme 3.3 où A joue les deux rôles, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A. En particulier $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant V. Comme ce dernier est w_1-invariant, $U_{\tilde{p}}(B)$ aussi est w_1-invariant. Donc $w_1 \in N(U_{\tilde{p}}(B)) \leq N(B)$, et le Théorème 4.10 implique que $w_1 \in B$.

D'après la Remarque 5.8, w_1 inverse A. Mais d'après le Lemme 4.8, elle inverse également $U_\infty(N)$, dont le degré d'unipotence est $> d$. Maintenant le Lemme 3.1 implique $[A, U_\infty(N)] = 1$, donc $U_\infty(N) \leq C^\circ(A) \leq N^\circ(A) = B$, une contradiction car B admet le paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ alors que $d_\infty(N) > d$. $\square$

5.2 Le corps

Les groupes A et $B/C_B(A)$ sont définissables abéliens infinis. C'est clair pour A. Maintenant d'une part $A \leq Z(F^\circ(B))$ donc $F^\circ(B) \leq C^\circ(A)$, et ainsi $B/C_B(A)$ est abélien d'après le Fait 2.2, d'autre part A qui est inversé par i n'est pas central dans B, donc $B/C_B(A)$ n'est pas trivial. Comme ce dernier groupe est connexe, il est bien infini. De plus A est $B/C_B(A)$-minimal car B-minimal, et l'action de $B/C_B(A)$ sur A est définissable et sans noyau.

On applique le théorème du corps de Zilber, Fait 2.7, à $A \rtimes B/C_B(A)$. Alors il existe un corps algébriquement clos K tel que

$$A \simeq K_+ \qquad \text{et} \qquad B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times,$$

où l'action de $B/C_B(A)$ sur A correspond à la multiplication du corps.

Si $p \neq \infty$, alors A est d'exposant p, et clairement K est de caractéristique p. Si $p = \infty$, alors A possède au moins une section définissable sans torsion, et donc K est, dans ce cas aussi, de caractéristique p.

Lemme 5.10 *Pour w dans $i^G \setminus N(B)$, $T[w] \cap C_B(A) = 1$.*

Preuve
Si $T[w] \cap C_B(A)$ contient un élément $t \neq 1$, alors le Lemme 5.9 appliqué au groupe $N = C^\circ(t)$ donne $w \in B$. □

Lemme 5.11 *Pour w dans $i^G \setminus N(B)$, $T[w]$ est un groupe définissable et abélien.*

Preuve
Si $X = F^\circ(B) \cap (F^\circ(B))^w \neq 1$, on peut appliquer le Lemme 5.9 au groupe $N = N^\circ(X)$, obtenant une contradiction. Donc $(B \cap B^w)' \leq F^\circ(B) \cap (F^\circ(B))^w = 1$, et $B \cap B^w$ est abélien. En particulier les éléments de $T[w]$ commutent deux-à-deux, et l'on peut appliquer la Remarque 4.26. □

Les involutions w varieront désormais dans I_0. Rappelons que cet ensemble est non-vide d'après le Lemme 4.28. Le lemme suivant donne une image très précise des sous-groupes étudiés, qui ressemblent de plus en plus à ceux de PSL_2.

Lemme 5.12 *Pour w dans I_0, $(F^\circ(B))^{-i} = A \simeq K_+$ et $T[w] \simeq K^\times$, les deux isomorphismes étant définissables.*

Preuve
Les Lemmes 5.10 et 5.11 prouvent que $T[w]$ s'injecte dans $B/C_B(A)$ qui lui-même se plonge dans $K^\times$, tout ceci définissablement. Comme $A \subseteq (F^\circ(B))^{-i}$ et $w \in I_0$, on a

$$\mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right) \leq \mathrm{rg}(T[w]) \leq \mathrm{rg}(K^\times),$$

et comme $\mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(K^\times)$, ces inégalités sont toutes des égalités.

En particulier, A est générique dans $(F^\circ(B))^{-i}$. Or $B = C^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$ où la décomposition est univoque d'après le Lemme 4.3. Le groupe $A \rtimes C^\circ(i)$ est alors générique dans B. Comme B est connexe, $B = A \rtimes C^\circ(i)$. Nous montrons que $A = (F^\circ(B))^{-i}$. Soit $f \in (F^\circ(B))^{-i}$. Il existe $a \in A$ et $c \in C^\circ(i)$ tels que $f = ac$. Alors $f^2 = ff^{-i} = (ac)(c^{-i}a^{-i}) = acc^{-1}a = a^2 \in A$, et comme $F^\circ(B)$ est sans 2-torsion d'après le Lemme 4.2, $f \in A$. Ainsi $(F^\circ(B))^{-i} = A$.

Enfin, par connexité de $K^\times$, l'égalité de rangs vue plus haut implique aussi que $T[w]$ s'injecte surjectivement dans $K^\times$. □

Corollaire 5.13 *Pour w dans I_0, $T[w]$ contient un unique 2-tore maximal de B.*

Lemme 5.14 *Si $w \in i^G \setminus N(B)$ inverse S°, alors w inverse $C^\circ(i)$.*

Preuve

Nous prouvons que $C^\circ(i)$ est abélien. Sinon, nous posons $C' = (C^\circ(i))' \neq 1$ et $N = N^\circ(C')$. Alors C' est inclus dans $F^\circ(B)$ et w le normalise, donc le Lemme 5.9 s'applique à N, une contradiction qui prouve bien $C' = 1$.

Soit maintenant $X = C^\circ(i, w)$. Si $X \neq 1$, alors $N = N^\circ(X)$ contient S° par commutativité de $C^\circ(i)$. Mais comme $C^\circ(w)$ aussi est abélien, $C^\circ(w) \leq N$, et $w \in C^\circ(w) \leq N$. Ainsi $S^\circ \cdot \langle w \rangle$ est inclus dans un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de N. D'après le Fait 2.20, S_1 est connexe, et comme le rang de Prüfer est 1, il vient $S_1 = S^\circ$ et $w \in S^\circ$, une contradiction.

Ainsi $C^\circ(i, w) = 1$, donc dans son action sur $C^\circ(i)$, l'involution w n'a qu'un nombre fini de points fixes. D'après le Fait 2.11, $C^\circ(i) = [C^\circ(i), w] = \{[c, w],\ c \in C^\circ(i)\}$ car $C^\circ(i)$ est abélien. Maintenant tout élément de $C^\circ(i)$ de la forme $[c, w]$ est inversé par w, et donc w inverse $C^\circ(i)$. □

Notation 5.15 *Pour w dans I_0, on note j_w l'unique involution de $T[w]$, donnée par le Corollaire 5.13.*

Corollaire 5.16 *Pour w dans I_0, $T[w] = C^\circ(j_w)$ est un conjugué de $C^\circ(i)$.*

Preuve

D'après le Corollaire 5.13, $T[w]$ contient un unique 2-tore maximal de B noté T. L'unique involution de T est notée j_w conformément à la Notation 5.15. Comme $T[w]$ est connexe et abélien, $T[w] \leq C^\circ(j_w)$.

Par conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow, $S^\circ = T^b$ pour un $b \in B$, et $C^\circ(i) = C^\circ(j_w)^b$. L'involution w^b est dans $i^G \setminus N(B)$ et inverse $T^b = S^\circ$, donc d'après le Lemme 5.14, w^b inverse $C^\circ(i) = C^\circ(j_w)^b$. Donc w inverse $C^\circ(j_w)$, et $C^\circ(j_w) \leq T[w]$. □

Corollaire 5.17 *$B = A \rtimes C^\circ(i) \simeq K_+ \rtimes K^\times$.*

Preuve

On a $B = (F^\circ(B))^{-i} \cdot C^\circ(i)$ de façon bijective d'après le Lemme 4.3. Alors selon le Lemme 5.12, $B = A \cdot C^\circ(i) = A \rtimes C^\circ(i)$. Maintenant, à conjugaison près on peut supposer que $C^\circ(i) = T[w]$, qui agit sur A comme $K^\times$ sur K_+. □

Lemme 5.18 *Pour $g \notin N(B)$, on a $A^g \cap N(B) = 1$.*

Preuve

Rappelons que $A \simeq K_+$. Nous distinguons deux cas, selon que la caractéristique de K est finie ou ∞.

On suppose $p = \infty$. Si $g \notin N(B)$ contredit l'affirmation, on a d'après le Fait 2.8 que $A^g \leq N(B)$, donc $A^g \leq N^\circ(B) = B$. Mais comme A^g est un $\tilde{p}$-groupe d'après le Lemme 5.5, il vient $A^g \leq U_{\tilde{p}}(B)$. Or si l'on applique le Lemme 3.3 avec A^g dans les deux rôles, on trouve $U_{\tilde{p}}(B) \leq U_{\tilde{p}}(B^g)$, d'où $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^g)$, ce qui force $g \in N(B)$, une contradiction.

On suppose maintenant p premier. Soit $x \in (A^g \cap N(B))^\#$, pour un $g \notin N(B)$. Alors x est d'ordre p. L'élément x normalise B, donc agit sur A qui est infini d'exposant p. Le groupe $A \cdot \langle x \rangle$ est un p-groupe infini d'exposant fini. Comme x est d'ordre p et que A est localement fini, $A \cdot \langle x \rangle$ est localement fini. D'après le Fait 2.19 (3), son centre est infini. En particulier $C_A^\circ(x) \neq 1$. D'autre part, le Lemme 2.29 implique que B^g est l'unique sous-groupe de Borel contenant A^g. Comme $A^g \leq C^\circ(x)$, il vient $C^\circ(x) \leq B^g$. Ainsi $A \cap B^g$ est infini, une contradiction au Lemme 2.29. □

Lemme 5.19 $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(A)$.

Preuve

Le Lemme 5.18 prouve une inégalité, en considérant un produit $A \cdot B^g$, pour un $g \notin N(B)$. Nous prouvons l'autre inégalité. Soit l'application définissable qui à $w \in I_0$ associe l'involution j_w comme dans la Notation 5.15. On rappelle que w centralise j_w. La fibre au-dessus de j_w est donc formée d'involutions w_1 qui appartiennent à $C(j_w)$. D'après le Corollaire 5.16, un majorant du rang de la fibre est ainsi $\mathrm{rg}(C(j_w)) = \mathrm{rg}(T[w]) = \mathrm{rg}(K^\times) = \mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(A)$ grâce au Lemme 5.12. Maintenant, comme l'ensemble d'arrivée est inclus dans $I(B) = i^B$, on a $\mathrm{rg}(I_0) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(i^B)$, ce qui se réécrit $\mathrm{rg}(G) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$. □

5.3 Preuve du Théorème 5.1

Dans cette sous-section nous achevons la preuve du Théorème 5.1.

Soit w dans I_0, qui n'est pas vide d'après le Lemme 4.28. Après conjugaison dans B, on peut supposer que $j_w = i$. On prouve sans peine les points suivants.

Lemme 5.20 $N(B) = B$.

Preuve

L'application μ de $A \times N(B) \to G$ qui à (a, n) associe awn est injective. En effet si $awn = a'wn'$ avec des notations naturelles, il vient $(a'^{-1}a)^w = n'n^{-1} \in A^w \cap N(B)$, qui d'après le Lemme 5.18 est trivial. L'image de μ est alors générique d'après le Lemme 5.19, et $N(B)$ est donc de degré 1 par connexité de G. □

Lemme 5.21 $G = B \sqcup AwB$.

Preuve

Soit $g \notin B$. On construit la même application que dans la preuve du Lemme 5.20, en remplaçant w par g. Alors AgB est encore un sous-ensemble générique de G, donc il rencontre AwB. Ainsi $g \in AwB$. □

Lemme 5.22 $B \cap B^w = C^\circ(i) = T[w]$.

Preuve

L'inclusion $C^\circ(i) \le B \cap B^w$ est claire, puisqu'on a supposé $i = j_w \in C(w)$. D'autre part, les Lemmes 5.18 et 5.20 impliquent que $A \cap B^w = 1$. Alors d'après le Corollaire 5.17, $B \cap B^w \le C^\circ(i)$, prouvant la première égalité. La deuxième est dans le Corollaire 5.16. □

Preuve du Théorème 5.1
On considère désormais l'action de G sur l'espace G/B des cosets à gauche de B par multiplication à gauche.

Cette action est doublement transitive. Il n'y a en effet que deux formes de cosets, à savoir B d'une part, et ceux du type awB pour $a \in A$, d'après le Lemme 5.21. En outre il est clair que $B = G_B$ agit transitivement sur les cosets de la forme awB.

G est un groupe de Zassenhaus (cf. §2.3). En effet soit un élément $g \in G$ stabilisant à la fois B, wB, et un troisième coset awB avec $a \in A^\#$. Alors $g \in B \cap B^w = C^\circ(i)$ d'après le Lemme 5.22, mais aussi $g \in B \cap B^{wa^{-1}} = (B \cap B^w)^{a^{-1}} = C^\circ(i)^{a^{-1}}$. Or $C^\circ(i) \cap (C^\circ(i))^{a^{-1}} = 1$ d'après le Corollaire 5.17, car nous avons pris $a \in A^\#$. Ainsi $g = 1$.

Ce groupe de Zassenhaus est scindé. En effet A est un complément normal de $T[w] = G_{B,wB}$ dans $B = G_B$.

Le stabilisateur de deux éléments contient une involution. Il suffit par double transitivité de le vérifier pour B et wB. Mais on a prouvé que $G_{B,wB} = T[w]$, lequel contient i.

Le résultat d'identification (Fait 2.6) permet alors de conclure que

$$G \simeq \mathrm{PSL}_2(L),$$

où L est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

Dans $G \simeq \mathrm{PSL}_2(L)$, tous les sous-groupes de Borel sont isomorphes à $L_+ \rtimes L^\times$. C'est donc le cas du sous-groupe B. On en déduit que L et K sont (définissablement) isomorphes en tant que corps. Or nous avons remarqué au début de §5.2 que car(K) = p. Ceci achève la preuve du Théorème 5.1. □

6 Cas II : ¬ Cas I

Pour montrer le Théorème 1.1 il reste à prouver que l'hypothèse (I) du Théorème 5.1 est toujours vérifiée. C'est ce que nous faisons ici avec le théorème suivant.

Théorème 6.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Soit B un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$. Si B admet $\tilde{p}$ pour paramètre d'unipotence maximal, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\le C^\circ(i)$.*

Rappelons que si $C^\circ(i) < B$, alors B n'est pas abélien. En particulier ce n'est pas un bon tore, et d'après le Fait 2.36 il admet un paramètre $\tilde{p} = (p, d)$ avec $d > 0$, que nous supposons maximal comme dans la Notation 4.5.

D'autre part le Théorème 6.1 employé avec le Théorème 5.1 implique bien le résultat 1.1. Nous nous attachons donc désormais, et jusqu'à la fin de cet article, à prouver le Théorème 6.1.

On suppose en vue d'une contradiction que la conclusion du Théorème 6.1, ou de manière équivalente l'hypothèse (I) de la section précédente, est fausse, c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse

$$\text{(II)} : U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(i).$$

La contradiction achevant cette longue section reposera sur un argument de "concentration" incompatible avec la simplicité du groupe ambiant. L'honnêteté exige de dire que si l'énoncé du Théorème 6.1 était prévu, cet argument qui le prouve est apparu en *deus ex machina*, et a permis presque miraculeusement de résoudre une configuration fort contournée. Jusqu'à §6.5 on utilise les techniques attendues (essentiellement l'unipotence de Burdges, sous toutes ses applications) de manière conforme à l'intuition, ensuite les phénomènes se compliquent.

Plus précisément, les ensembles $T[w]$ seront peu-à-peu dessinés. En §6.1, on explicitera leur comportement vis-à-vis des involutions. Dans §6.2 et §6.3, on établira que ce sont des groupes abéliens. Après un détour par la théorie des intersections maximales en §6.4, on montrera en §6.5 qu'il s'agit de groupes tous de même rang qu'un sous-groupe K tel que $B = K \rtimes C^\circ(i)$. La Sous-section 6.6 est consacrée à prouver que ce sont des sous-groupes tous conjugués à K. On déduira enfin que les conjugués de K se trouvent génériquement dans B, ce qui est une contradiction à la simplicité de G. Quelques mots sont ajoutés en §6.5 pour justifier un argument improbable, en tout cas inhabituel.

De manière remarquable, la preuve s'interrompra dès §6.2 si $0 < p < \infty$ grâce au théorème de Wagner. Il n'y a pas de conclusion modèle-théorique aussi soudaine en caractéristique ∞, et l'étude se poursuit donc. Par ailleurs il faut noter que notre preuve pourrait fonctionner à l'identique si $0 < p < \infty$.

6.1 Retour sur l'involution de B

Nous suivons les notations et résultats de §4, avec désormais l'hypothèse supplémentaire (II).

Remarque 6.2 *Le Corollaire 4.4 et l'hypothèse (II) impliquent que chaque involution de B centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Lemme 6.3 $C(i) \leq N(B)$ *(noter l'absence de "$\circ$").*

Preuve
$U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))$ selon l'hypothèse (II). Si $p < \infty$, alors d'après le Lemme 2.29, B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$. En particulier

$C(i) \leq N(B)$. D'autre part si $p = \infty$, alors d'après le Corollaire 3.6 appliqué avec $A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U = U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))$, il vient $N(U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))) \leq N(B)$. Or il est clair que $C(i) \leq N(U_{\tilde{p}}(C^\circ(i)))$, ce qui achève dans ce cas aussi la preuve. $\square$

On peut alors restreindre la structure du 2-sous-groupe de Sylow S, défini dans la Notation 4.1, comme suit.

Corollaire 6.4 $S \cap i^G = \{i\}$.

Preuve
Immédiat d'après le Lemme 6.3, le Théorème 4.10, et le fait que les 2-sous-groupes de Sylow de B ne possèdent qu'une involution. $\square$

Corollaire 6.5

1. *$C(i)$ est connexe et inclus dans B.*
2. *$S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ est connexe.*
3. *Toutes les involutions de G sont conjuguées.*
4. *$N(B) = B$.*

Preuve
Le premier point vient du Corollaire 6.4 et du "Théorème Z^*", Fait 2.14. Alors $S \leq C(i) = C^\circ(i)$ résoluble, et S est donc connexe grâce au Fait 2.20. Il est maintenant évident que les involutions de G sont toutes conjuguées d'après le Fait 2.12. Le dernier point découle du premier par un argument de Frattini dans $N(B)$. $\square$

Le Corollaire 6.5 n'est pas nécessaire à notre preuve du Théorème 6.1. Nous travaillerons essentiellement avec les involutions toriques, c'est-à-dire les conjuguées de i. A chaque fois que nous montrerons qu'un sous-groupe est sans involution, ce sera un sous-groupe *connexe*, ce qui nous ramène bien aux conjuguée de i.

En conclusion, le Corollaire 6.5 donne une idée nette des involutions, mais en faisant intervenir un outil sans rapport avec l'idée directrice. Pour en faire l'économie, comme c'était le cas dans les premières versions de ce travail, il suffirait de choisir systématiquement les involutions de i^G dès le corollaire suivant.

Corollaire 6.6 *Si $x \in G^\#$ est centralisé par une involution j et inversé par une autre involution k, alors x est une involution.*

Preuve
L'involution k normalise $C(x)$ qui contient j. D'après le Fait 3.12, k et une $C(x)$-conjuguée j' de j sont dans un même 2-sous-groupe de Sylow de G. Le Corollaire 6.5 impose alors $j' = k$, et donc $x = x^j = x^{j'} = x^k = x^{-1}$. $\square$

Lemme 6.7 *Pour tout $g \in G \setminus N(B)$, $B \cap B^g$ est sans involution.*

Preuve
Si $j \in I(B \cap B^g)$, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et son conjugué par g sont inclus dans $U_{\tilde{p}}(C^\circ(j))$ d'après la Remarque 6.2. Si $p < \infty$, on a immédiatement $g \in N(B)$ grâce au Lemme 2.29. Maintenant si $p = \infty$, le Lemme 3.3 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(C^\circ(j))$. Le même argument impose $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^g$, et donc $g \in N(B)$. □

Le Lemme 6.7, avec l'égalité $N(B) = B$ du Corollaire 6.5, est la propriété pour B d'être *fortement inclus* dans G. Dans [BCJ07] il est montré qu'un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini et de type impair possédant un sous-groupe fortement inclus est de 2-rang de Prüfer 1. Pour nous cette conclusion est une hypothèse.

6.2 Etude de $T[w]$

L'ensemble I_0 de la Notation 4.27 est non-vide d'après le Lemme 4.28. Nous fixons une involution $w \in I_0$. Le Corollaire 6.6 a une conséquence importante sur l'ensemble $T[w]$ de la Notation 4.25.

Corollaire 6.8 $T[w] \cap (C(i))^G = 1$.

Preuve
$T[w]$ est inversé par w et inclus dans $B \cap B^w$ qui est sans involution. D'après le Corollaire 6.6, $T[w]$ est alors disjoint des $C(i^g)$ pour tout $g \in G$. □

Lemme 6.9 *Pour tout $t \in T[w]^\#$, la clôture définissable $d(t)$ est sans torsion.*

Preuve
Soit sinon t d'ordre premier q dans $T[w]$. D'après le Corollaire 6.8, $q > 2$.

B est sans q-unipotence. En effet si $U_q(B) \neq 1$, le sous-groupe $U_q(B) \cdot \langle t \rangle$ est un q-groupe nilpotent-par-fini *infini*. Selon le Fait 2.19, $C^\circ_{U_q(B)}(t)$ est non-trivial, or il est contenu dans $U_q(C^\circ(t))$. De même, $1 \neq C^\circ_{U_q(B^w)}(t) \leq U_q(C^\circ(t))$. Avec le Lemme 2.29, il vient alors $U_q(C^\circ(t)) \leq B \cap B^w$, et donc $B = B^w$, une contradiction. B est bien sans q-unipotence.

L'élément t est inclus dans un q-sous-groupe de Sylow de B, disons Q. Le Fait 2.19, en l'absence de q-unipotence, implique alors que Q est un q-tore, qui centralise un 2-tore de B selon le Corollaire 2.24. En particulier l'élément t centralise une involution torique, une contradiction au Corollaire 6.8. □

Lemme 6.10 $p = \infty$.

Preuve

Supposons $p \neq \infty$. Soit A un sous-groupe B-minimal de $U_p(Z(F^\circ(B)))$. Sous notre hypothèse, A est un p-groupe abélien élémentaire.

Nous considérons alors l'action de $B/C_B(A)$ sur A. Le quotient est infini. En effet sinon, A est central dans B, et $A \leq C^\circ(T[w])$. Ce dernier sous-groupe est w-invariant, donc A et A^w sont inclus dans un même sous-groupe définissable strict de G. Grâce au Lemme 2.29, on a la contradiction habituelle $B = B^w$. Ainsi le quotient $B/C_B(A)$ est-il infini.

Comme en §5.2, le "théorème du corps", Fait 2.7, s'applique. La vérification des hypothèses est immédiate comme en §5.2. Il existe donc un corps algébriquement clos K tel que

$$A \simeq K_+ \qquad \text{et} \qquad B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times,$$

où les morphismes sont définissables. La caractéristique de K est le nombre premier p.

D'autre part, d'après le Fait 2.27, $B \cap B^w$ est abélien. En particulier $T[w] = d(T[w])$ est un groupe abélien définissable d'après la Remarque 4.26.

Nous prouvons que $T[w]$ se plonge définissablement dans $K^\times$. Pour cela nous montrons $T[w] \cap C_B(A) = 1$. Soit en effet $t \in C_{T[w]}(A)$. Si $t \neq 1$, alors $A, A^w \leq C^\circ(t)$, et l'on arrive grâce au Lemme 2.29 à $B = B^w$, une contradiction. Ainsi $T[w] \cap C(A) = 1$, et donc $T[w] \hookrightarrow B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times$, où les injections sont définissables.

Pourtant si $t \in T[w]^\#$, le théorème de Wagner, Fait 2.9, impose que la clôture définissable $d(t) \leq T[w]$ ne peut pas être sans torsion, une contradiction avec le Lemme 6.9. $\square$

Le Lemme 6.10 précise de manière un peu inattendue la caractéristique, et introduit une rupture remarquable de la symétrie entre les configurations $p < \infty$ et $p = \infty$. Le lecteur soucieux de préserver ce parallélisme, ou désirant faire l'économie d'un résultat de théorie des modèles, peut cependant poursuivre comme si de rien n'était cet article, en envisageant l'éventualité $p < \infty$ jusqu'à après la Proposition 6.25. La théorie des intersections maximales de Burdges impliquerait alors que B est sans q-unipotence pour chaque nombre premier q, et en particulier que $p = \infty$. Il suffit pour arriver jusque là sans le Lemme 6.10 de faire les ajustements nécessaires au cas $p < \infty$, c'est-à-dire essentiellement utiliser le Lemme 2.29 partout où apparaît le Lemme 3.3 ou le Corollaire 3.6.

En caractéristique ∞, la preuve continue sans pouvoir recourir à un résultat aussi modèle-théorique. Le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ défini dans la Notation 4.5 est de la forme (∞, d), avec $d > 0$.

Fermant cette parenthèse, on revient au Lemme 6.9, et l'on en déduit avec le Fait 2.17 que la clôture définissable $d(T[w])$ est telle que

$$T[w] \subseteq d(T[w])^\circ \text{ et } d(T[w]) \text{ est un groupe connexe.}$$

On va maintenant "éloigner autant que possible" $T[w]$ de $F^\circ(B)$. Commençons par un argument où l'hypothèse $w \in I_0$, à savoir $\mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i})$, est cruciale.

Lemme 6.11 *Soit $w \in I_0$. Alors aucune involution de B n'inverse $T[w]$.*

Preuve
Soit j une involution de B inversant $T[w]$. Si $t \in T[w]^{\#}$, alors j inverse la clôture définissable $d(t)$. Avec le Fait 2.2 et les Lemmes 4.3 et 6.9, il vient $d(t) \subseteq (F^\circ(B))^{-j}$. Ceci prouve que l'ensemble $T[w]$ est inclus dans $(F^\circ(B))^{-j}$. En particulier, $d(T[w])$ est inclus dans $F^\circ(B)$, et donc il est nilpotent. C'est ainsi un sous-groupe définissable connexe nilpotent inclus dans les deux sous-groupe de Borel distincts B et B^w. En particulier, d'après le Corollaire 2.56, $d(T[w])$ est abélien. Alors grâce à la Remarque 4.26, $T[w] = d(T[w])$ est un groupe abélien définissable.

D'autre part, d'après la définition de I_0 auquel w appartient, $T[w]$ est un sous-groupe définissable générique de l'ensemble définissable $(F^\circ(B))^{-j}$. Comme ce dernier est de degré 1, $T[w]$ est nécessairement *l'unique* sous-groupe définissable générique de $(F^\circ(B))^{-j}$. En particulier, $C^\circ(j)$ le normalise.

Mais alors le groupe $T[w] \rtimes C^\circ(j)$ est générique dans B, et donc $B = T[w] \rtimes C^\circ(j)$. En particulier $B = N^\circ(T[w])$ et w normalise B, une contradiction. □

Corollaire 6.12 *Soit $w \in I_0$. Alors $T[w] \not\subseteq F^\circ(B)$.*

Preuve
Supposons que $T[w] \subseteq F^\circ(B)$. Alors $X = C^\circ(T[w])$ contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, qui est inclus dans un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow V de X. D'après le Corollaire 3.15, une involution w_1 conjuguée sous X à w normalise V. Maintenant le Lemme 3.3 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant V. Ce dernier étant w_1-invariant, il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^{w_1}$. Passant aux normalisateurs connexes et grâce au Théorème 4.10, on a $w_1 \in B$. Or w_1, tout comme w, inverse $T[w]$. Ceci contredit le lemme 6.11. □

On renforce ce dernier résultat.

Lemme 6.13 *Soit $w \in I_0$. Alors il existe t dans $T[w]^{\#}$ dont la clôture définissable $d(t)$ ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Preuve
Supposons au contraire que $d(t)$ centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ pour tout $t \in T[w]^{\#}$. Alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(d(t))$. Soit V un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(d(t))$ contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Comme $C^\circ(d(t))$ est w-invariant, d'après le Corollaire 3.15 il existe une involution w_1 conjuguée sous $C^\circ(d(t))$ à w et qui normalise V. Nous argumentons alors comme dans la preuve du Corollaire 6.12. Le Lemme 3.3 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant V. Ce dernier étant w_1-invariant, il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^{w_1}$. Passant aux normalisateurs connexes et grâce au Théorème 4.10, on a $w_1 \in B$.

Tout comme w, l'involution w_1 de B inverse $d(t)$. Donc $d(t) \leq F^\circ(B)$ grâce au Fait 2.2 et au Lemme 6.9. Cela étant vrai pour tout $t \in T[w]^{\#}$, nous avons montré $T[w] \subseteq F^\circ(B)$, une contradiction avec le Corollaire 6.12. □

Corollaire 6.14 *Soit $w \in I_0$. Alors il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(T[w])$ qui est inclus dans $T[w]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Preuve
La clôture définissable $d(t)$ du Lemme 6.13 est un groupe définissable abélien non-trivial et sans torsion d'après le Lemme 6.9. D'après le Fait 2.17 et par choix de t, il en va de même du quotient $\overline{d(t)}$ dans la projection modulo $C_{d(t)}(U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))))$. Selon le Fait 2.36, $\overline{d(t)}$ admet un paramètre d'unipotence qui est nécessairement de la forme (∞, s) avec $s \geq 1$. Maintenant le Fait 2.39 (2) implique qu'il existe un (∞, s)-sous-groupe définissable de $d(t)$ qui n'est pas nul dans la projection, c'est-à-dire qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Ce sous-groupe convient. $\square$

Notation 6.15 *Soient, comme dans le Corollaire 6.14, s un entier ≥ 1 et T_s un (∞, s)-groupe abélien inclus dans $T[w]$. (Ainsi a-t-on $T_s \not\leq C^\circ(U_{\tilde{p}}(Z(F(B)))))$.*

Faisons aussitôt trois remarques à garder à l'esprit.

Remarque 6.16

1. *$T_s \not\leq F^\circ(B)$, par définition.*
2. *$1 \leq s < d_\infty(B)$, car sinon $T_s \leq F^\circ(B)$ avec le Fait 2.45.*
3. *Aucune involution de B n'inverse T_s (procéder comme au début de la preuve du Lemme 6.11).*

6.3 Commutativité de $B \cap B^w$

Un grand pas vers la compréhension de $T[w]$ se fait dans la proposition suivante.

Proposition 6.17 *Soit $w \in I_0$. Alors $B \cap B^w$ est abélien.*

Avant la preuve de cette importante proposition, en voici un corollaire très instructif sur $T[w]$, qui était jusqu'ici bien mystérieux.

Corollaire 6.18 *Soit $w \in I_0$. Alors $T[w]$ est un groupe abélien définissable et connexe.*

Preuve
Une fois établi dans la Proposition 6.17 que $B \cap B^w$ est abélien, il suffit d'appliquer la Remarque 4.26 et le point mentionné au-dessus du Lemme 6.11. $\square$

Nous prouvons désormais la Proposition 6.17. Soit $w \in I_0$ et supposons $(B \cap B^w)' \neq 1$. Soient $X = F^\circ(B) \cap F^\circ(B^w) \neq 1$ et $N = N^\circ(X)$.

Lemme 6.19 $d_\infty(N) > d$ *(cf. Notation 4.5).*

Preuve

$U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq N$. Si l'on a l'égalité $d_\infty(N) = d$, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(N) \leq F^\circ(N)$ d'après le Fait 2.45. Pourtant d'après le Lemme 3.3, où $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ joue les deux rôles, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. En particulier $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Comme ce dernier est w-invariant, $U_{\tilde{p}}(B)$ et B le sont aussi, et le Théorème 4.10 implique $w \in B$, une contradiction. $\square$

Corollaire 6.20 *$Z(F^\circ(B)) \leq C(i)$.*

Preuve

Sinon le groupe $Y = (Z(F^\circ(B)))^{-i} \neq 1$ est normal dans B et inversé par chaque involution de B d'après le Lemme 4.3.

Soit maintenant V un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de N contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Comme w normalise N, d'après le Corollaire 3.15, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous N et qui normalise V. Mais le Lemme 3.3 où $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ joue les deux rôles, implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G qui contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, et en particulier l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G qui contient V. Comme ce dernier est w_1-invariant, il vient $w_1 \in N(U_{\tilde{p}}(B)) = N(B)$, et le Théorème 4.10 implique $w_1 \in B$.

D'après les Lemmes 4.8 et 6.19, l'involution w_1 inverse $U_\infty(N)$. Mais elle inverse aussi $Y \leq N$. Avec le Lemme 3.1, il vient $U_\infty(N) \leq C^\circ(Y) \leq B$, une contradiction au Lemme 6.19. $\square$

Lemme 6.21 *X est $\tilde{p}$-homogène.*

Preuve

D'après le Corollaire 6.20 et le Lemme 4.3, $F^\circ(B)$ n'est pas abélien. Selon le Fait 2.28, $F(B) \cap F(B^w)$ est sans torsion. En particulier $X = F(B) \cap F(B^w) = (F(B) \cap F(B^w))^\circ$ est sans torsion. Il est $\tilde{q}$-homogène pour un certain paramètre d'unipotence $\tilde{q}$ selon le Lemme 3.8.

Une conséquence du Lemme 6.19 est que $N \not\leq B$. En particulier, $(N \cap B)^\circ = N_B^\circ(X)$ est inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts. D'après le Fait 2.54, son dérivé $Y = (N_B^\circ(X))'$ est homogène. Y n'est pas trivial car $Y \geq (B \cap B^w)' \neq 1$. Soit $\tilde{r} = (\infty, \ell)$ l'unique paramètre d'unipotence de Y.

Maintenant $K = [T_s, U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))]$ est un $\tilde{p}$-groupe $\tilde{p}$-homogène d'après le Fait 2.48, et non-trivial par choix de T_s, Notation 6.15. Comme $T_s \leq B \cap B^w \leq B \cap N$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C_B(X) \leq B \cap N$, on a $K \leq (N_B^\circ(X))' = Y$. En particulier $\tilde{p} = \tilde{r}$ et Y est $\tilde{p}$-homogène.

Comme X est sans torsion, $(B \cap B^w)'$ supposé non-trivial est un groupe connexe. Il est inclus dans X et dans Y qui sont chacun homogène, et donc il vient $\tilde{q} = \tilde{r} = \tilde{p}$. Ainsi X est $\tilde{p}$-homogène. $\square$

Preuve de la Proposition 6.17

D'après le Lemme 6.21 et la décomposition centrale du Fait 2.40, $F_s(B) \leq C^\circ(X) \leq N$. Comme $N \not\leq B$ d'après le Lemme 6.19, le Corollaire 2.56 implique

que $F_s(B)$ est abélien, et donc central dans $F^\circ(B)$ toujours d'après le Fait 2.40. Le Corollaire 6.20 implique alors que i centralise $F_s(B)$, lequel contient $U_{(\infty,s)}(B')$.

Selon le Lemme 3.2, i centralise alors un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B. Comme ces sous-groupes sont conjugués dans B et que T_s est inclus dans l'un d'eux, il vient qu'une B-conjuguée de i centralise T_s, ce qui contredit le Corollaire 6.8. $\square$

Le Corollaire 6.18 est maintenant lui aussi démontré.

6.4 Une intersection non abélienne de paire maximale

Nous allons à présent utiliser la théorie des intersections de paires maximales de sous-groupes de Borel dans les groupes simples connexes minimaux. L'introduction d'une telle paire maximale dans ce type de configuration a été pour la première fois effectuée dans [BCJ07] sous l'impulsion de Gregory Cherlin.

La première étape consiste à nous ramener au cas des intersections *non-abéliennes*, ce que nous faisons ici, pour utiliser l'artillerie des §2.9 et 3.3. Ceci nous permettra de progresser dans l'étude de B, ce que nous ferons en §6.5.

Depuis le Lemme 6.10, nous savons que $p = \infty$. Rappelons de la Proposition 6.17 et du Corollaire 6.18 que si $w \in I_0$, alors $B \cap B^w$ est abélien, et $T[w]$ en est un sous-groupe définissable connexe. Fixons comme dans la Notation 6.15 un (∞, s)-sous-groupe T_s de $T[w]$ qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Ces rappels énoncés, nous reprenons.

Lemme 6.22 *Il existe un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $C^\circ(T_s)$.*

Preuve
$C^\circ(T_s)$ est inclus dans un sous-groupe de Borel. Si c'est B, on conjugue par w, et $B^w \neq B$ convient. $\square$

Notation 6.23 *Soit $B_1 \neq B$ un sous-groupe de Borel contenant $C_B^\circ(T_s)$, et maximisant $H = (B \cap B_1)^\circ$ parmi de telles intersections.*

Ecrivons pour fixer les idées que

$$T_s \leq T[w] \leq (B \cap B^w)^\circ \leq C_B^\circ(T_s) \leq H.$$

Nous montrerons que la paire (B, B_1) est maximale, à l'aide du Fait 2.53. Pour ce faire, nous allons prouver la non-abélianité de H, ce qui est notre première grande étape, dans la Proposition 6.25 infra.

Lemme 6.24 *Soit B_1 comme dans la Notation 6.23. Alors $F^\circ(B_1)$ est sans involution.*

Preuve
Si $F^\circ(B_1)$ possède une involution k, alors k est torique dans $F^\circ(B_1)$ et centrale dans B_1. En particulier le centralisateur de $k \in i^G$ est un sous-groupe de Borel, une contradiction. $\square$

Proposition 6.25 *H n'est pas abélien.*

Preuve
Supposons H abélien. Il vient $H = C_B^\circ(T_s)$. Comme H est inclus dans $C^\circ(T_s)$, il est $2^\perp$. Selon le Fait 2.23, H n'est pas un sous-groupe de Carter de B, et $H < N_B^\circ(H)$. Si B_2 est un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $N^\circ(H)$, alors $C_B^\circ(T_s) = H < N_B^\circ(H) \leq (B \cap B_2)^\circ$, une contradiction à la maximalité de H. Ainsi B est l'*unique* sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$. En particulier $N^\circ_{C^\circ(T_s)}(H) \leq C_B^\circ(T_s) = H$, et H est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(T_s)$, lequel est w-invariant.

D'après le Corollaire 3.14, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous $C^\circ(T_s)$ et qui normalise H. Puisque B est le seul sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$, il vient $w_1 \in N(B)$, et donc $w_1 \in B$ d'après le Théorème 4.10. L'involution w_1, tout comme w, inverse T_s, une contradiction à la Remarque 6.16 (3). $\square$

La paire de sous-groupes de Borel (B, B_1) est maximale. En effet soit B_2 un sous-groupe de Borel distinct de B, et tel que $(B \cap B_2) \geq H$. Alors $B_2 \geq H \geq C_B^\circ(T_s)$, donc B_2 est comme dans la Notation 6.23. D'après la maximalité de H *au sens de la Notation 6.23*, on a $(B \cap B_2)^\circ = H$. Ainsi H est maximal *au sens du Fait 2.53 (3)*, ce qui implique que la paire (B, B_1) est maximale au sens de §2.9.

Nous voici donc sous les hypothèses typiques des §2.9 et 3.3. Sans perdre de vue que notre but principal est l'étude du sous-groupe de Borel B, commençons par déterminer $d_\infty(H')$, degré d'unipotence du dérivé de l'intersection H.

Lemme 6.26 *$d_\infty(H') = s$.*

Preuve
Sinon, d'après le Fait 2.54, $U_{(\infty,s)}(H') = 1$. En particulier, le Fait 2.52 impose que les (∞, s)-sous-groupes de Sylow de H sont de la forme $U_{(\infty,s)}(Q)$, pour Q un sous-groupe de Carter de H. Ainsi T_s est inclus dans un sous-groupe de Carter Q de H.

Par ailleurs Q n'est pas sous-groupe de Carter de B. En effet s'il l'est, il contient un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de B d'après le Corollaire 2.23. Ce 2-sous-groupe de Sylow est connexe d'après le Fait 2.20, et torique en l'absence de 2-unipotence. Mais comme Q est nilpotent, le 2-tore S_1 est central dans Q. En particulier T_s commute à S_1, une contradiction au Corollaire 6.8. Donc Q n'est pas un sous-groupe de Carter de B. En particulier, $N_B^\circ(Q) > Q$.

Comme dans le Lemme 3.9, on note $r' = d_\infty(H)$ et $Q_{r'} = U_{(\infty,r')}(Q)$. Ce sous-groupe est non-trivial et central dans H d'après le Lemme 3.9. Si

$N^\circ_B(Q_{r'}) = H$, alors comme $N^\circ(Q) \leq N^\circ(Q_{r'})$, il vient $N^\circ_B(Q) \leq H$. Or $N^\circ_H(Q) = Q$, donc Q est un sous-groupe de Carter de B, une contradiction. Ainsi $N^\circ_B(Q_{r'}) > H$. L'examen de la trichotomie du Lemme 3.9 ne laisse alors subsister que le cas où B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(Q_{r'})$. En particulier $N(Q) \leq N(B)$.

Il vient $N^\circ_{C(T_s)}(Q) \leq C^\circ_B(T_s) \leq H$ par choix de H, donc Q est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(T_s)$. D'après le Corollaire 3.14, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous $C^\circ(T_s)$ et qui normalise Q. Alors $w_1 \in N(Q) \leq N(B)$, donc $w_1 \in B$ d'après le Théorème 4.10. L'involution w_1, conjuguée à w par $C^\circ(T_s)$, inverse T_s, une contradiction à la Remarque 6.16 (3). □

La théorie générale de §2.9 nous apprend l'"asymétrie" de la configuration, à savoir l'inégalité $d_\infty(B) \neq d_\infty(B_1)$. Nous précisons par le lemme suivant.

Lemme 6.27 $d > d_\infty(B_1)$ *(cf. Notation 4.5).*

Preuve

Supposons au contraire $d_\infty(B_1) > d_\infty(B)$. Alors pour chaque $\ell \neq d_\infty(H')$, on a $F_\ell(B) \leq Z(H)$ d'après le Fait 2.55 (4). Mais grâce au Lemme 6.26 et à la Remarque 6.16 (2), il vient $d_\infty(H') = s < d_\infty(B) = d$. Ainsi $U_{\tilde{p}}(B) = F_d(B) \leq Z(H) \leq C(T_s)$, contre la Notation 6.15. □

Terminons l'étude de la configuration décrite dans le Fait 2.55 par celle des sous-groupes de Carter. Soit Q un sous-groupe de Carter de H. D'après le Fait 2.55 (5) et au vu du Lemme 6.27, Q est un sous-groupe de Carter de B. Mais un sous-groupe de Carter de B en contient un 2-sous-groupe de Sylow d'après le Corollaire 2.23. A B-conjugaison près, on peut donc supposer que $S^\circ \leq Q \leq H$.

Notation 6.28 *Soit Q un sous-groupe de Carter de H contenant S°.*

Lemme 6.29 *Q est un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve

$\{i\} = I(Q)$ est caractéristique dans Q, donc $N^\circ_G(Q) \leq C^\circ(i) \leq B$. Ainsi $N^\circ_G(Q) \leq N^\circ_B(Q) = Q$. □

6.5 Conséquences dans B

Nous tirons maintenant parti de l'étude menée en §6.4 de la paire maximale d'intersection non-abélienne (B, B_1) pour préciser finement la structure de B. Commençons par donner un résumé des informations les plus pertinentes que nous venons d'obtenir.

B_1 est un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $C^\circ_B(T_s)$.

$H = (B \cap B_1)^\circ$ est l'intersection d'une paire maximale.

H n'est pas abélien d'après la Proposition 6.25.

$d_\infty(H') = s$ d'après le Lemme 6.26.

$d_\infty(B) > d_\infty(B_1)$ d'après le Lemme 6.27.

$i \in S^\circ \leq H$ d'après la Notation 6.28.

Lemme 6.30 *B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(F_s(B))$.*

Preuve

C'est le Fait 2.55 (6). □

Notation 6.31 *On note $V = F_s(H) = U_{(\infty,s)}(H)$. (cf. Fait 2.55 (3).)*

Lemme 6.32 *V est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow abélien de B. Il est sans involution. En outre $T[w] \leq V \leq F^\circ(B_1)$ et $N^\circ(V) \leq B_1$.*

Preuve

Le Fait 2.55 (3) implique $N^\circ(V) \leq B_1$. En particulier, si W est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B contenant V, alors $N^\circ_W(V) \leq H$, et $U_{(\infty,s)}(N^\circ_W(V)) = V$. Au vu de la condition de normalisateur 2.49, cela impose que $V = W$, et V est donc un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B.

Le groupe V est définissable, connexe, nilpotent, et inclus dans les deux sous-groupes de Borel distincts B et B_1. Le Corollaire 2.56 implique alors qu'il est abélien. $V \leq F^\circ(B_1)$ d'après le Fait 2.55 (3). Cela implique au vu du Lemme 6.24 que V est sans involution.

Nous montrons à présent que $T[w]$ est un (∞, s)-sous-groupe de H. Pour cela, nous montrons même que $T[w]$ est (∞, s)-homogène. Ceci achèvera la preuve, puisqu'il en découlera $T[w] \leq V$ par définition de V. Supposons que $U_{(\infty,\ell)}(T[w]) \neq 1$ pour un $\ell \neq s$. Alors les Faits 2.54 et 2.52 font que $U_{(\infty,\ell)}(T[w])$ est inclus dans un sous-groupe de Carter de H. Or chaque sous-groupe de Carter de H, comme Q défini dans la Notation 6.28, contient dans son centre un 2-sous-groupe de Sylow de B. Un élément non trivial de $T[w]$ commute donc avec une involution torique, ce qui contredit le Corollaire 6.8. Ainsi $U_{(\infty,\ell)}(T[w]) = 1$ pour chaque $\ell \neq s$. Comme en outre $T[w]$ est sans torsion d'après le Lemme 6.9 et le Corollaire 6.18, on en déduit que $T[w]$ est un (∞, s)-groupe (∞, s)-homogène. Ceci termine la preuve du lemme. □

Notation 6.33 *Soit $K = V^{-i}$.*

Bien noter qu'a priori, cette définition dépend de w, de B_1, et de i dans H. Le groupe K permet enfin de scinder B.

Lemme 6.34 *$K = (F^\circ(B))^{-i}$ ne dépend que de B, et $B = K \rtimes C^\circ(i)$. En outre, $\mathrm{rg}(K) = \mathrm{rg}(T[w])$ et K est un (∞, s)-groupe. Enfin, B est l'unique sous-groupe de Borel de G contenant $C^\circ(K)$.*

Preuve

L'inclusion $K \subseteq (F^\circ(B))^{-i}$ est claire avec le Fait 2.2, puisque $K \leq V$ qui est sans involution d'après le Lemme 6.32.

Maintenant V étant $2^\perp$, on a $V = C_V(i) \times K$. Or $C_V(i) \cap T[w] = 1$ d'après le Corollaire 6.8. D'autre part $C_V(i)$ et $T[w]$ sont des sous-groupes définissables de V. Il vient $\mathrm{rg}(T[w]) \leq \mathrm{rg}(V) - \mathrm{rg}(C_V(i)) = \mathrm{rg}(K) \leq \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i}) \leq \mathrm{rg}(T[w])$, la dernière inégalité provenant de l'hypothèse $w \in I_0$. Ainsi $\mathrm{rg}(K) = \mathrm{rg}(T[w]) = \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i})$.

A présent nous employons le même argument que pour prouver le Lemme 6.11. Le groupe K est l'unique sous-groupe définissable générique de l'ensemble $(F^\circ(B))^{-i}$ qui est de degré 1. En particulier, K est normalisé par $C^\circ(i)$, et donc $K \rtimes C^\circ(i)$ est un sous-groupe générique de B qui est connexe. On a ainsi $B = K \rtimes C^\circ(i)$. Comme $F^\circ(B)$ est $2^\perp$, on raisonne comme dans le Lemme 5.12 pour prouver que $K = (F^\circ(B))^{-i}$. Mais cela prouve aussi que K ne dépend que de B.

Pour conclure, $K = [V, i] \leq H'$ est un (∞, s)-sous-groupe de V au vu du Fait 2.54. En outre $K \leq H' \leq F(B) \cap F(B_1) = F_s(B)$ d'après le Fait 2.55 (6). En particulier, $C^\circ(F_s(B)) \leq C^\circ(K)$. Le Lemme 6.30 implique alors que B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K)$. Tous les points sont prouvés. $\square$

Remarque 6.35 *K et $T[w]$ partagent ainsi certaines propriétés. On va montrer dans le Lemme 6.39 ci-dessous qu'ils sont en fait conjugués dans G.*

Corollaire 6.36 *B_1 est sans q-unipotence pour chaque nombre premier q.*

Preuve
$K \leq V \leq F^\circ(B_1)$ d'après le Lemme 6.32. Si $U_q(B_1) \neq 1$, alors $U_q(B_1) \leq C^\circ(K) \leq B$ d'après le Lemme 6.34. En particulier, $U_q(B_1) \leq B \cap B_1$, et le Lemme 2.29 impose $B = B_1$, une contradiction.

Lemme 6.37 *$V = C^\circ_{F_s(B_1)}(T[w])$.*

Preuve
Puisque $T[w] \leq V \leq F_s(B_1)$ et que V est abélien, l'inclusion $V \leq C^\circ_{F_s(B_1)}(T[w])$ est claire.

Supposons-la stricte. Soit alors $z \in C^\circ_{F_s(B_1)}(T[w]) \setminus V$. Comme $i \in B_1$ normalise $F_s(B_1)$ et que $F_s(B_1)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 6.24, le Fait 2.10 donne une décomposition univoque $F_s(B_1) = C_{F_s(B_1)}(i) \cdot (F_s(B_1))^{-i}$, chaque ensemble dans ce produit étant de degré 1 par connexité de $F_s(B_1)$. Ainsi $C_{F_s(B_1)}(i) = C^\circ_{F_s(B_1)}(i) \leq C^\circ(i) < B$, donc $C_{F_s(B_1)}(i) \leq (B \cap B_1)^\circ = H$. Mais d'après le Fait 2.43, $C_{F_s(B_1)}(i)$ est un (∞, s)-groupe, donc $C_{F_s(B_1)}(i) \leq U_{(\infty,s)}(H) = V$ selon la Notation 6.31. Ainsi peut-on même supposer que $z \in (F_s(B_1))^{-i}$, de sorte que $z^i = z^{-1}$.

Alors pour $t \in (T[w])^\#$, on a $[z, t] = 1$, donc $[z^i, t] = 1$, et $[z, t^i] = 1$. En particulier, z commute à $[t, i] \in [T[w], i] \leq [V, i] \leq K$. Or $[t, i] \neq 1$ d'après le Corollaire 6.8. Mais B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K)$ d'après le Lemme 6.34, et donc à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ([t, i])$. Comme ce dernier est normalisé par z, il vient $z \in N(B)$.

Soit n l'ordre de $N(B)/B$, de sorte que $z^n \in B$. D'après le Corollaire 6.36, la torsion de $F^\circ(B_1)$ est torique, et donc centrale dans B_1. En particulier elle est centralisée par $i \in H \leq B_1$. Comme $F^\circ(B_1)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 6.24, le seul élément d'ordre fini de $F^\circ(B_1)$ inversé par i est 1. La clôture définissable $d(z)$, inversée par i et incluse dans $F^\circ(B_1)$, est donc sans torsion. En particulier $z^n \in B \Rightarrow z \in B$ d'après le Fait 2.17. La décomposition donnée dans le Lemme 6.34 implique une écriture $z = kc$ pour un $k \in K$ et un $c \in C^\circ(i)$. Il vient $k^{-1}z = c = c^i = (k^{-1}z)^i = k^{-i}z^i = kz^{-1}$, d'où $z^2 = k^2 \in K$. Ainsi l'image de z dans $d(z)/(d(z) \cap K)$ est d'ordre ≤ 2. Comme $d(z)$ est sans torsion, le Fait 2.17 implique $z \in K$. Or avec la Notation 6.31 et le Lemme 6.34, $K \leq U_{(\infty,s)}(H) = V$, donc $z \in V$, une contradiction. □

Proposition 6.38 *V est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$.*

Preuve

Rappelons que $d_\infty(H') = s$ d'après le Lemme 6.26. Soit U un (∞, s)-sous-groupe de $C^\circ(T[w])$ contenant $V = U_{(\infty,d_\infty(H'))}(H)$. D'après le Lemme 3.10, on a $U \leq B_1$.

Selon le Lemme 6.29, un sous-groupe de Carter de H est un sous-groupe de Carter de G. On peut alors appliquer le Lemme 3.11, et $F_s(B_1)$ est donc l'unique (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B_1. En particulier $U \leq F_s(B_1)$.

Ainsi il vient $V \leq U \leq C^\circ_{F_s(B_1)}(T[w]) = V$ avec le Lemme 6.37, et V est donc un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$. □

6.6 Retour à $T[w]$ et contradiction finale

Dans cette sous-section nous conjuguons les sous-groupes $T[w]$ au sous-groupe K, ce qui permet de prouver que les G-conjugués de K se concentrent génériquement dans B.

Le premier point est pour le moins inattendu car l'analyse précédente a montré que si les sous-groupes T[w] peuvent être vus habituellement comme des sous-groupes “semisimples”, le sous-groupe K de B en est moralement un sous-groupe “unipotent”. Ce qui permet la conjugaison est outre la présence d'involutions, la rigidité particulière imposée par la presence d'une paire maximale ; plus particulièrement le Lemme 6.37 menant à la Proposition 6.38.

Le second point, à savoir la concentration générique, est alors un simple calcul de rang réminiscent du fait que, dans PSL_2, l'ensemble des éléments semisimples d'un sous-groupe de Borel fixé a même rang que l'ensemble des éléments unipotents du groupe entier.

Lemme 6.39 *Soit w dans I_0. Alors il existe $g \in G$ tel que $T[w] = K^g$.*

Preuve

D'après la Proposition 6.38, V est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$. D'après le Corollaire 3.15, il existe une involution w_1 conjuguée à w par $C^\circ(T[w])$ et qui normalise V. Mais alors w_1 inverse $T[w]$. D'autre part $w_1 \notin N(B)$. En effet, sinon w_1 est d'après le Théorème 4.10 une involution de B inversant $T[w]$, une contradiction à la Remarque 6.16 (3). On a $\mathrm{rg}(T[w_1]) \geq \mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B))^{-i}$ puisque $w \in I_0$. Ainsi $w_1 \in I_0$.

Toute l'analyse précédente pour w vaut encore pour w_1. En particulier $T[w_1]$ est un groupe abélien, définissable et connexe d'après le Corollaire 6.18. Son rang est exactement celui de K d'après le Lemme 6.34. L'inclusion $T[w] \subseteq T[w_1]$ se transforme ainsi en égalité de groupes.

Maintenant i et w_1 normalisent V. Comme elles sont toutes deux toriques, le Corollaire 6.4 impose que i et w_1 sont conjuguées dans $N(V)$. Ainsi existe-t-il $g \in N(V)$ tel que $w_1 = i^g$. En particulier

$$T[w] = T[w_1] \leq V^{-w_1} = (V^{-i})^g = K^g$$

par définition de K, et l'égalité de rangs dans le Lemme 6.34 implique l'égalité de ces sous-groupes. □

Lemme 6.40 *Soit $g \in G$. Alors $K \cap K^g \neq 1$ si et seulement si $g \in N(B)$. De plus $i^G \cap N(K^g) = (iK)^g$, toutes ces involutions étant K^g-conjuguées.*

Preuve

Si $g \in N(B) = N(K)$ d'après le Lemme 6.34, on a $K = K^g$, donc un sens est trivial. Soit pour la réciproque $g \in G$ tel que $K \cap K^g \neq 1$. L'involution i normalise $K \cap K^g$ et $N = N^\circ(K \cap K^g)$. On sait depuis le Lemme 6.10 que $p = \infty$. Il est clair que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B^g)))$ sont inclus dans N, de sorte que $d_\infty(N) \geq d_\infty(B)$. Nous disons que $d_\infty(N) = d_\infty(B)$. En effet si $d_\infty(N) > d_\infty(B)$, alors i inverse $U_\infty(N)$ d'après le Lemme 4.8. Il vient $[K \cap K^g, U_\infty(N)] = 1$ grâce au Lemme 3.1. En particulier $U_\infty(N) \leq C^\circ(K \cap K^g) \leq B$ avec le Lemme 6.34, une contradiction. Ainsi $d_\infty(N) = d_\infty(B)$, et $U_{\tilde{p}}(N)$ est un $\tilde{p}$-groupe. Alors le Lemme 3.3 appliqué avec $U = A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ donne que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Mais le même argument donne aussi que $U_{\tilde{p}}(B^g)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^g)$ et $g \in N(B)$.

Enfin $I(N(K^g)) = I(N(K))^g = I(N(B))^g$. Or d'après le Théorème 4.10, les involutions toriques de $N(B)$ sont dans B. Ainsi $i^G \cap N(K^g) = I(B^g) = (iK)^g$ avec le Lemme 4.3. □

Après cette analyse poussée des sous-groupes en présence, nous concluons par deux simples calculs de rang qui produisent la contradiction finale. Commençons par une conséquence du Lemme 6.40 précisant le Lemme 6.39.

Corollaire 6.41 *Soient w_1 et w_2 dans I_0. Alors $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$ si et seulement si $T[w_1] = T[w_2]$ si et seulement si w_1 et w_2 sont conjuguées par $T[w_1]$.*

Preuve

D'après le Lemme 6.39, $T[w_1] = K^{g_1}$ et $T[w_2] = K^{g_2}$ pour des éléments g_1 et g_2 de G. Si $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$, on a d'après le Lemme 6.40 $g_2 g_1^{-1} \in N(K)$, d'où $T[w_1] = K^{g_1} = K^{g_2} = T[w_2]$. Le Lemme 6.40 implique alors aussi que w_1 et w_2

sont conjuguées par $K^{g_1} = T[w_1]$. Enfin si $w_1 = w_2^t$ pour un $t \in T[w_1]^\#$, alors $t^{w_2} = w_2 t w_2 = w_1^{t^{-1}} t w_1^{t^{-1}} = t w_1 t^{-1} t t w_1 t^{-1} = t w_1 t w_1 t^{-1} = t t^{-1} t^{-1} = t^{-1}$. Ainsi t est inversé par w_1 et par w_2, et donc $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$. $\square$

Corollaire 6.42 $\operatorname{rg}\left(\bigcup_{w \in I_0} T[w]\right) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(C(i))$.

Preuve
Selon le Corollaire 6.41,

$$\bigcup_{w \in I_0} T[w] = \coprod_{w \in I_0 \text{ modulo } T[w_1] = T[w_2]} T[w],$$

l'union disjointe étant indexée par un ensemble de rang $\operatorname{rg}(I_0) - \operatorname{rg}(T[w]) = \operatorname{rg}(i^G) - \operatorname{rg}(K)$ et chaque terme étant de rang $\operatorname{rg}(K)$ d'après le Lemme 6.34 ou le Lemme 6.39. Le rang calculé est donc $\operatorname{rg}(i^G) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(C(i))$. $\square$

D'autre part le Lemme 6.40 permet aussi de calculer $\operatorname{rg}(K^G)$.

Corollaire 6.43 $\operatorname{rg}\left(K^G\right) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(C(i))$.

Preuve
D'après le Lemme 6.34, $\operatorname{rg}(N(K)) = \operatorname{rg}(B)$. Ainsi avec le Lemme 6.40, il vient $\operatorname{rg}\left(K^G\right) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(K) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(B/K)$, et la factorisation du Lemme 6.34 permet de conclure. $\square$

Le Lemme 6.39 et les Corollaires 6.42 et 6.43 prouvent comme suit que les conjugués de K se retrouvent majoritairement dans B.

Corollaire 6.44 $\bigcup_{w \in I_0} T[w]$ *est un sous-ensemble générique de* K^G. *En particulier* $B \cap (K^G)$ *est générique dans* K^G.

Preuve du Théorème 6.1
Les Corollaires 2.4 et 6.44 contredisent la simplicité de G, et cette contradiction achève la preuve du Théorème 6.1. $\square$

Pour ne pas finir sur une note aussi aride, nous recollons brièvement les morceaux. Les Théorèmes 6.1 et 5.1 produisent ensemble le Théorème 1.1.

Mais une fois le Théorème 1.1 prouvé, le Corollaire 1.2 général sur la w-invariance est aussi prouvé grâce au Lemme 3.27.

Références

[ABC06] Tuna Altınel, Alexandre Borovik, and Gregory Cherlin. *Simple groups of finite Morley Rank.* 2006. Livre à paraître.

[BBC06] Alexandre Borovik, Jeffrey Burdges, and Gregory Cherlin. Involutions in groups of finite Morley rank. 2006. Soumis.

[BC06] Jeffrey Burdges and Gregory Cherlin. On semisimple torsion in groups of finite Morley rank. 2006. Preprint.

[BCJ07] Jeffrey Burdges, Gregory Cherlin, and Eric Jaligot. Minimal connected simple groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups. *J. Algebra*, 2007. A paraître.

[BHMPW06] Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martin-Pizarro, and Frank O. Wagner. Die böse Farbe. 2006. Preprint. URL http ://math.univ-lyon1.fr/∼wagner/publ.html.

[BN94] Alexandre Borovik and Ali Nesin. *Groups of finite Morley rank*, volume 26 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

[Bur04] Jeffrey Burdges. *Simple Groups of Finite Morley Rank of Odd and Degenerate Type*. PhD thesis, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, 2004.

[Bur07] Jeffrey Burdges. The Bender method in groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 2007. A paraître.

[CJ04] Gregory Cherlin and Eric Jaligot. Tame minimal simple groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 276(1) :13–79, 2004.

[DN94] Mark DeBonis and Ali Nesin. On CN-groups of finite Morley rank. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 50(3) :532–546, 1994.

[FJ07] Olivier Frécon and Eric Jaligot. Conjugacy in groups of finite Morley rank. *Cambridge University Press - Newton Institute*, 2007. A paraître.

[Jal00] Eric Jaligot. FT-Groupes. *Prépublications de l'institut Girard Desargues*, (33), Janvier 2000. UPRESA 5028.

[Poi87] Bruno Poizat. *Groupes stables.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[Wag01] Frank Wagner. Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 66(2) :703–706, 2001.