PROPRIÉTS RÉSIDUELLES DANS LES GROUPES SUPERSIMPLES

FRANK WAGNER

Résumé. Si C est une pseudo-varioété, alors un groupe supersimple résiduellement $\mathcal{C}$ est nilpotent-par-poly-$\mathcal{C}$.

Dans un article récent [1], Abderezak Ould Houcine montre qu'un goupe superstable résiduellement $\mathcal{C}$ pour une pseudo-variété $\mathcal{C}$ permet une série normale $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n$ telle que $G_i/G_{i+1} \in \mathcal{C}$ pour $i < n$, et G_n est résoluble ; si G est ω-stable, on peut choisir G_n nilpotent. Nous étendons son résultat aux groupes supersimples, et montrons en même temps qu'on peut toujours prendre G_n nilpotent.

Rappelons qu'une classe de groupe est une pseudo-variété si elle st close par sous-groupes, quotients et produits finis ; un groupe est résiduellement $\mathcal{C}$ si pour tout $1 \neq g \in G$ il y a un sous-groupe normal $g \notin N \trianglelefteq G$ avec $G/N \in \mathcal{C}$.

Proposition 1. *Soit $SU(G) = \omega^\alpha \cdot n + \beta$ avec $\beta < \omega^\alpha$, et $k > 0$ minimal telle qu'il y ait un sous-groupe normal $N \trianglelefteq G$ avec $SU(N) = \omega^\alpha \cdot k$. Alors pour toute formule $\varphi(x, y)$ il y a une formule $\vartheta(y)$ telle que pour tout a le sous-groupe normal engendré par $\varphi(x, a)$ ait indice fini dans N si et seulement si $\models \vartheta(a)$; dans ce cas, le groupe engendré est définissable uniformément en a, et d'indice borné dans N.*

Proof: Nous pouvons supposer que $\vartheta(a)$ implique $X_a := \varphi(G, a) \subseteq N$, et que $\varphi(x, a)$ est normal, quitte à remplacer $\varphi(x, y)$ par $exists\, z \in G\ \varphi(x^z, y)$. Par [2, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.7] il existe $m < \omega$ tel que $(X_a^{\pm 1})$ contienne un sous-groupe normal N_0 avec $SU(X_a/N_0) < \omega^\alpha$; la preuve montre également qu'on puisse prendre $m < 2^k$ (en fait on voit aisement que $m \leq k$). Par [2, Theorem 5.5.4] N_0 est l'intersection de sous-groupes de G ; par compacité il existe un sous-groupe définissable $N \leq N_1 \subseteq (X_a^{\pm 1})^m$, et par [2, Proposition 4.2.7] on peut choisir un tel N_1 normal dans G et définissable sur a.

Si N_1 est d'indice fini dans N, alors un nombre fini de translatés de N_1, et donc de $(X_a^{\pm 1})^m$ recouvrent N. Par contre, si N_1 est d'indice

Date: 18 décembre 2006.
Key words and phrases. simple theory, pseudo-variety, nilpotent, residual.

infini dans N, alors un générique de N ne peut pas être contenu dans $\langle X_a \rangle$, puisque $SU(X_a/N_1) < \omega^\alpha$ et $SU(N) = \omega^\alpha \cdot k$, et il est impossible qu'un nombre fini de translatés de $(X_a^{\pm 1})^m$ recouvre N. Donc $(X_a^{\pm 1})^m$ est générique dans N si et seulement si un nombe fini de translatés recouvre N. Mais cet ensemble est également gnérique si et seulement s'il a même rangs locaux stratifiés ; cette condition est donc ouverte et fermée, ce qui signifie qu'elle est définissable par une formule $\vartheta(a)$, qui a les propriétés recherchées.

Pour $a \models \vartheta$ il en découle par compacité que le sous-groupe normal de N engndré par X_a est définissable uniformément en a, et son indice dans N est borné. $\square$

Nous pouvons maintenant suive le raisonnement d'Ould Houcine pour démontrer notre théorème.

Theorem 2. *Soit $\mathcal{C}$ une pseudo-variété et G un groupe supersimple résiduellment $\mathcal{C}$. Alors il y a une série normale définissable $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq_n$ telle que $G_i/G_{i+1} \in \mathcal{C}$ pour $i < n$, et G_n est nilpotent.*

Proof: Soient α, β, n, k, et N comme dans la proposition précédente, et pour $1 \neq g \in G$ soit $g \notin N_g \trianglelefteq G$ telle que $G/N_g \in \mathcal{C}$. Pour $\bar{g} \in G \setminus \{1\}$ soit $N_{\bar{g}} = \bigcap_{g \in \bar{g}} N_g$, avec $G/N_{\bar{g}} \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est uen pseudo-variété.. Nous considérons les sous-groupes normaux $[N, N_{\bar{g}}] \leq N \cap N_{\bar{g}}$ pour $g \in G$. Encore par [2, Theorem 5.4.5] il existe pour tout $g \in G$ des éléménts $n_1, \ldots, n_m \in N_{\bar{g}}$ telle que $(n_1^{-1} n_1^N)^{\pm 1} \cdots (n_m^{-1} n_m^N)^{\pm 1}$ contienne un sous-groupe type-définissable normal $K_{\bar{g}}$ avec $SU(n^{-1} n^N / K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha$ pour tout $n \in N_{\bar{g}}$.

Si on trouve $\bar{g} \in G \setminus \{1\}$ tel que $SU(K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha \dot{k}$, alors $SU(K_{\bar{g}}) < \omega^\alpha$ par minimalité de k, comme $K_{\bar{g}}$ est intersection de groupes normaux définissables. Donc $SU(n^{-1} n^H) < \omega^\alpha$ pour tout $n \in H_{\bar{g}}$, d'où $SU(N/C_N(n)) < \omega^\alpha$, et $C_N(n)$ est d'indice fini dans N pour tout $n \in N_{\bar{g}}$ par l'inégalité de Lascar. Alors

$$N_{\bar{g}} \leq \tilde{C}_G(N) = \{g \in G : [N : C_N(g)] < \omega\},$$

le centralisateur approximatif de N dans G, et $G/\tilde{C}_G(N) \in \mathcal{C}$. Notons que $\tilde{C}_G(N)$ est définissable, puisque l'indice de $C_N(g)$ dans N est borné par [2, Lemma 4.2.6].

Sinon, $K_{\bar{g}}$ est générique dans N pour tout $g \in G$, et $[N, N_{\bar{g}}]$ est générique dans N et uniformémént définissable par la proposition précédente. Mais si $[N, N_{\bar{g}}] \neq 1$, soit $1 \neq g \in [N, N_{\bar{g}}]$. Alors $[N, N_{g\bar{g}}]$ est un sous-groupe propre de $[N, N_{\bar{g}}]$; comme ces groupes sont uniformément définissables, on en obtient une chaîne infinie, ce qui contredit la simplicité.

Donc $G/\tilde{C}_G(N) \in \mathcal{C}$; si $SU(\tilde{C}_G(N)) < SU(G)$ je termine par récurrence sur $SU(G)$. Sinon je remplace G par $\tilde{C}_G(N)$ et N par $N \cap \tilde{C}_G(N)$, des sous-groupes d'indices finis. Soient $n \in N$ et $g \in G$ indépendants ; comme

$$[n, g] \in \mathrm{acl}(n) \cap \mathrm{acl}(g) = \mathrm{acl}(\emptyset)$$

et donné $g \in G$ un élémént $n \in N$ est toujours produit de deux éléments génériques sur g et réciproquement, le groupe $[N, G] \leq \mathrm{acl}(\emptyset)$. Donc $N_1 := C_N([N, G])$ est d'indice borné dans N et contenu dans $Z_2(G)$. Or, puisque $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$ est donné par un système d'équations (dans ce-modèle-ci !), je peux remplacer G par $G/Z(G)$, et donc aussi par $G/Z_2(G)$ par [1, Lemme 2.2(2)] et préserver la propriété d'être résiduellement $\mathcal{C}$; notons que ces quotients sont définissables à l'aide de quanteurs et donc supersimples. Finalement, comme $N_1 \leq Z_2(G)$ et $SU(N_1) = SU(N) \geq \omega^\alpha$, alors $SU(G/Z_2(G)) < SU(G)$ et je termine par récurrence. $\square$

Remark 3. *Notons que si N est normal dans G, alors par* [2, Proposition 4.2.7] *il existe un sous-groupe caractéristique N_0 de G qui est une extension finie d'une intersection finie de conjugués de N par des automorphismes. Comme $\mathcal{C}$ est une pseudo-variété on peut donc successivement prendre tous les G_i normal pas seulement dans leur prédecesseur, mais dans G.*

Références

[1] A. Ould Houcine. *On superstable groups with residual properties.* Math. Log. Quart. 53(1) :19–26, 2007.

[2] F. O. Wagner. *Simple Theories.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

Frank O Wagner, Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS UMR 5208 Institut Girard Desargues, 43 blvd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France

E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr