Bréviaire du symétron

Bruno Poizat[1]

Commencé le 13 mars 2023, le jour où j'ai cessé de lire Tintin.
Révision du 3 mai 2024

Y además, un poquito de francés !
Enrique Rodriguez, La Colegiala

Mots-clefs : involutions, espaces de symétries, groupes de rang de Morley fini, Z*-Theorem de Glauberman

Classification des sujets selon la Société Américaine de Mathématiques : 03C45, 03C60, 20N05

Abstract. This survey gathers everything that I presently know on the symmetric structure of groups without involutions from a model theoretic perspective, principally in a finite Morley rank context. It summarizes and extends the content of several papers by Samuel Zamour and by myself, provides new results, and asks many questions. The point of departure of the whole affair is the observation that the proof, by Olivier Frécon, of the inexistence of a simple group of Morley rank three without involutions rests in an essential manner on the behaviour of the symmetries of the group.

This is the reason why I undertook a systematic study of the symmetric spaces where any two points a and b are exchanged by a unique symmetry, whose center is called the *middle* of a and b, as is the space of symmetries of a group which is uniquely divisible by 2. I called these symmetric spaces *symmetrons,* not knowing the various denominations under which they were previously considered in the litterature.

I realized then that many now classical results (initially proved by Boris Zil'ber) concerning groups of finite Morley rank could be adapted to symmetrons, and for me the main interest of the symmetrons lies in their ability to devellop a zil'berian problematic in a context different from groups.

In their case there is a difficulty which is not met with groups : as it is well known, a group-congruence corresponds to a quotient by a normal subgroup, while the description of symmetron-congruences is more involved ; therefore, it is more difficult to obtain in their case the parallel of the famous theorem by Zil'ber on the definability of the normal closure of a connected definable subgroup, in a group of finite Morley. In his doctoral dissertation,

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard (Lyon 1), 21 avenue du 8 mai 1945, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

Zamour was able to obtain it only under an additionnal hypothesis ; it is proved in its full generality in Section 12 of the present paper.

In a preliminary Section 1, I recall a fundamental definability result for groups of finite Morley rank, Zil'ber's Theorem of Indecomposable Sets, and its less-known but more handy version, the Theorem without Indecomposable Sets.

Section 2 contains the definition of symmetric spaces – in particular of the symmetric space attached to a group – and symmetrons ; Lemma 2.1 states that the group generated by a definable subspace, containing the unity, of a group of finite Morley rank is definable.

In his dissertation, Zamour uses a known syntactic equivalence between symmetrons and some kind of loops ; therefore two languages are avaible for the study of symmetrons, the symmetry/middle language and the loop language. I explain in Section 3 why the first is more suitable to render the model-theoretic properties of the symmetrons.

In Section 4, I observe that a symmetron S is isomorphic to the symmetric space of its symmetries, and I introduce the group T of its *transvexions,* the permutations of S which are the product of an even number of symmetries (Definition 4.3). Except in the case of a *bounded* symmetron (Definition 4.7), where each transvexion is a product of a fixed number of symmetries, the group T is not definable in S, so that, from a model-theoretic point of view, the theory of symmetrons cannot be reduced to a mere fragment of the theory of groups.

Section 5 describes the transvexions of the *groupic* symmetrons, which are the symmetric spaces of the uniquely 2-divisible groups ; Exemples 5.7 show that non isomorphic groups may define the same symmetron. A special case is formed by the *abelian* symmetrons (Definition 5.6), where T is commutative ; in this case T is uniquely 2-divisible, and S is the space of its symmetries. When the group has finite Morley rank, its symmetron is bounded and *regular,* meaning that its group of tansvexions is uniquely 2-divisible (Definition 5.8) ; a bounded and regular symmetron of finite Morley rank transmits these properties to its definable subsymmetrons (Proposition 5.10).

Section 6 studies the *commutative* symmetrons, where symmetry and middle are the same thing, and their links with groups of exponent 3. They should not be confused with abelian symmetrons.

Section 7 establishes the local property on which rests the entire model theory of ω-stable symmetrons : in them, any two points are linked by a definable abelian subsymmetron. A consequence is that any definable set is closed by symmetry if and only if it is closed under taking the middle ; from that we obtain the descending chain condition on definable subsymmetrons. It is finally observed that Glauberman's Z*-Theorem implies the regularity of the finite symmetrons (Corollary 7.7, Remark 7.8).

Section 8 begins with Definition 8.1 of *indecomposable sets,* due to Zamour. After that we show that each ω-stable symmetron S can be written in a unique way as a disjoint union of a finite number, which is odd and equal to the Morley degree of S, of definable indecomposable subsymmetrons ; they are called the *irreducible components* or *connected components* of S. We also study the action of the symmetries of S on its generic types.

Section 9 extends to symmetrons of finite Morley rank the results of elliptic generation usually proved for groups, the Theorem of Indecomposable Sets on one hand, the Theorem without Indecomposable Sets on the other.

Section 10 introduces locally finite symmetrons, which are also the symmetrons whose group of transvexions is locally finite (Proposition 10.1) ; they are regular, and the pseudo-locally-finite symmetron are almost so (Corollary 10.2).

Section 11 asks some questions concerning the symmetrons which are definable in an algebraically closed field ; they are pseudo-locally-finite, and I would like to know some unbounded examples.

Section 12 is a brief incursion into real geometry describing a well-known example of a symmetron with involutive transvexions.

Section 13 contains the principal novelties of this paper ; it introduces symmetron-congruences, whose study was initiated by Zamour, depending on previously known descriptions of loop-congruences. The language of symmetry and middle allows to distinguish three levels of normality for a subsymmetron of the symmetron S : it is *partitional* if its images under the symmetries form a partition of S ; it is *semi-normal* if this partition is respected by each individual symmetry (for any given center) ; it is *normal* if symmetry and middle go to the quotient, that is if the partition is a congruence of symmetron (Definition 13.2 ; in the ω-stable case, preservation of symmetry is suffficient). By Corollary 13.13, the decomposition of an ω-stable symmetron into its connected components is a congruence. The semi-normal closure, and the normal closure, of a definable connected subsymmetron S of a symmetron of finite Morley rank are definable and connected, and elliptically generated by S and some finite set of parameters (Theorem 13.14).

Section 14 establishes some connections between congruences and normal subgroups of the transvexions group.

Section 15 answers positively the central question solved partially by Zamour in the part of his dissertation consecrated to symmetrons : are symmetrons of finite Morley rank the same as ranked symmetrons ? In fact, the results of Section 13 allow now the reproduction without restriction, in the case of symmetrons, of Lascar's analysis for groups. A consequence of the analysis is that a simple symmetron of finite Morley rank is an ω_1-categorical structure.

The final Section 16 is a brief discussion on the possibility of a Hrushovski's analysis of a symmetron of finite Morley rank, starting from the top.

Table des matières

0.Motivations et résumé

La présente mise-au-point rassemble tout ce que je sais à propos de mon obsession présente, extrait pour l'essentiel des sources suivantes :

P18 Bruno Poizat, *Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions,* Journal of Algebra, 497, 2018, 143-163

P21 Id., *Symétries et transvexions, principalement dans les groupes de rang de Morley fini,* the Journal of Symbolic Logic, 86, 2021, 965-990

P24 Id., *La Conjecture d'Algébricité, dans une perspective historique, et surtout modèle-théorique,* à paraître au Journal of Model Theory

P24a Id., *Quelques modestes compléments aux travaux de Messieurs Mark DeBonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les Groupes de Frobenius de rang de Morley fini,* à paraître au Journal of Model Theory

Z22 Samuel Zamour, *Etude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini,* thèse de doctorat, Université Claude Bernard, 2022

Z24 Id., *Symétrons et K-boucles ω-stables,* soumis

Son oigine vient de la prise de conscience que, dans la démonstration par Olivier Frécon de l'inexistense d'un groupe simple sans involutions de rang de Morley trois, les symétries du groupe jouaient un rôle peut-être caché, mais essentiel. Cela m'a conduit à entreprendre une étude systématique, dans un cadre de rang de Morley fini, des espaces de symétries où deux points quelconques sont échangés par une symétrie et une seule, comme l'est l'espace des symétries d'un groupe uniquement divisible par 2 ; le centre de la symétrie qui échange a et b est appelé *milieu* de a et de b . J'ai baptisé ces espaces *symétrons,* étant dans l'ignorance des autres noms sous lesquels ils avaient été étudiés antérieurement, principalement par des théoriciens des groupes finis.

Je me suis alors rendu compte que bien des résultats montrés initialement par Boris Zil'ber, ou bien inspirés par ses travaux, à propos des groupes de rang de Morley fini pouvaient s'adapter aux symétrons, qui sont pourtant des structures bien plus faibles que les groupes. C'est pour moi l'intérêt principal des symétrons : ils permettent de développer une problématique zil'bérienne dans un contexte autre que celui des groupes.

Cependant, il est une difficulté dans le traitement des quotients de symétron qu'on ne rencontre pas dans le cas des groupes : tout le monde sait qu'une congruence de groupe est l'équivalence modulo un sous-groupe normal, tandis que les congruences de symétron sont plus difficiles à décrire ; cela explique pourquoi le célèbre théorème de Zil'ber assurant que, dans un groupe de rang de Morley fini, la clôture normale d'un sous-groupe définissable connexe est définissable, trouve ici pour la première fois son équivalent sans aucune restriction dans le cas des symétrons : dans sa thèse, Samuel Zamour n'avait pu en traiter qu'un cas particulier.

Il m'a semblé que le temps était venu d'écrire cette synthèse du sujet, qui rend compte de tous les résultats obtenus jusqu'à présent, et propose des directions à explorer, ne serait-ce que pour s'assurer de la solidité des fondements de la théorie sous-jacente. J'y redéfinis toutes les notions de base, tout en ajoutant quelques-unes qui me semblent pertinentes pour éclairer la problématique du symétron. J'expose aussi tous les résultats principaux, en les redémontrant au moins brièvement, surtout quand avec le recul du temps je pense pouvoir améliorer leur présentation originelle ; je reconnais que l'article est à cause de cela un peu long ; c'est le dilemme de toute présentation de synthèse : faut-il tout redémontrer, ou bien renvoyer systématiquement à ce qui a déjà été publié, malgré ses imperfections ? J'ajoute aussi des nouveautés, par exemple sur les symétrons commutatifs, et les congruences. Enfin, je pose beaucoup de questions.

La Section 1 est un prologue, où sont considérés les groupes uniquement 2-divisibles, ceux qui sont ω-stables en particulier, et un Théorème sans Indécomposables, bien plus pratique d'emploi que le Théorème des Indécomposables de Zil'ber, valable dans les groupes de rang de Morley fini.

Dans la Section 2, je définis les notions d'espace symétrique, en particulier de ceux qui sont attachés à un groupe, et de symétron. Le Lemme 2.1 montre qu'un sous-espace symétrique définissable d'un groupe de rang de Morley fini, une fois translaté afin de contenir 1, engendre un sous-groupe définissable.

Zamour utilise dans sa thèse l'interdéfinissabilité des symétrons avec certaines structures connues sous le nom de *boucles,* si bien que pour étudier un symétron on a le choix entre deux langages, celui de la symétrie et du milieu, et celui de la boucle ; j'explique dans la Section 3 pourquoi symétrie et milieu permettent d'exprimer les propriétés modèle-théoriques du symétron bien plus directement que ne le fait la boucle.

Dans la Section 4, j'observe qu'un symétron S est isomorphe à l'espace de ses symétries, et j'introduis le groupe T de ses *transvexions,* qui sont les permutations de S produits d'un nombre pair de symétries (Définition 4.3). Hormis le cas d'un symétron *borné* (Définition 4.7), où chaque transvexion est produit d'un nombre fixe de symétries, le groupe T n'est pas définissable dans S, si bien que, du point de vue modèle-théorique, on ne peut pas considérer la théorie des symétrons comme un simple fragment de la théorie des groupes.

La Section 5 décrit les groupes de transvexions des symétrons *groupiques,* qui sont les espaces symétriques des groupes uniquement 2-divisibles ; il convient de noter que des groupes non isomorphes peuvent définir le même symétron (Exemples 5.7). Un symétron S est dit *abélien* si son groupe de transvexions T est commutatif ; dans ce cas T est uniquement 2-divisible, et S est l'espace des symétries de T (Définition 5.6). Si le rang de Morley du groupe est fini, son symétron est borné et *régulier,* ce qui signifie que son groupe de transvexions est uniquement 2-divisible (Définition 5.8) ; un symétron borné et régulier de rang de Morley fini transmet ces propriétés à ses sous-symétrons définissables (Proposition 5.10).

La Section 6 étudie les symétrons *commutatifs,* pour lesquels symétrie et prise de milieu coïncident, et leurs rapports avec les groupes d'exposant 3. Il ne faut pas les confondre avec les symétrons abéliens.

La Section 7 entre dans le vif du sujet, en montrant que dans un symétron ω-stable deux points sont toujours reliés par un sous-symétron abélien définissable (Proposition 7.1). Cette propriété locale fonde toute la théorie des modèles des symétrons ω-stables. Dans cet article, l' ω-stabilité est considérée comme l'hypothèse modèle-théorique raisonnable minimale, puisqu'elle assure que tout groupe définissable sans involutions est uniquement 2-divisible. C'est ainsi qu'un sous-ensemble définissable d'un symétron ω-stable est clos par symétrie si et seulement s'il est clos par prise de milieu ; on en déduit la condition de chaîne sur les sous-symétrons définissables. La section se conclut par l'observation que le Z*-Theorem de Glauberman entraîne la régularité des symétrons finis (Corollaire 7.7, Remarque 7.8).

La Section 8 est ouverte par la Définition 8.1 des ensembles *indécomposables,* due à Zamour ; on montre ensuite que chaque symétron ω-stable S s'écrit de manière unique comme une réunion finie de sous-symétrons définissables indécomposables deux-à-deux disjoints, en nombre impair et égal au degré de Morley de S ; on les appelle les *composantes connexes,* ou *composantes irréductibles* de S. On étudie aussi l'action des symétries de S sur ses types génériques.

La Section 9 étend aux symétrons de rang de Morley fini les théorèmes de génération elliptique valable pour les groupes, le Théorème des Indécomposables d'une part, le Théorème sans Indécomposables d'autre part.

La Section 10 introduit les symétrons localement finis, qui sont aussi ceux dont le groupe de transvexions est localement fini (Proposition 10.1) ; ils sont réguliers ; quant aux symétrons pseudo-localement-finis, ils le sont presque (Corollaire 10.2).

La Section 11 pose quelques questions sur les symétrons constructibles, c'est-à-dire ceux qui sont définissables dans un corps algébriquement clos ; ils sont pseudo-localement-finis, et j'aimerais bien en connaître qui ne soient pas bornés.

La Section 12 est une brève incursion dans la Géométrie réelle, décrivant un exemple en fait classique de symétron ayant des transvexions involutives.

La Section 13 introduit les congruences de symétron, dont l'étude a été initiée par Zamour, en s'appuyant sur des descriptions connues antérieurement des congruences de boucles. Le langage de la symétrie et du milieu permet de distinguer trois degrés de normalité pour un sous-symétron du symétron S ; il est dit *partitionnel* si ses images par les symétries forment une partition de S, *semi-normal* si cette partition est respectée par chaque symétrie, et *normal* si symétrie et milieu passent au quotient, c'est-à-dire si c'est une congruence (Définition 13.2 ; dans le cas ω-stable, le respect de la symétrie suffit). Le Corollaire 13.13 montre que la décomposition en composantes connexes d'un symétron ω-stable est une congruence. Les clôtures semi-normale et normale d'un sous-symétron définissable connexe S d'un symétron de rang de Morley fini sont définissables et connexe, et elliptiquement engendrées par S et un ensemble fini de paramètres (Théorème 13.14).

La Section 14 décrit le lien entre les congruences d'un symétron et les sous-groupes normaux de son groupe de transvexions.

La Section 15 résoud le problème central de la partie de la thèse de Zamour consacrée aux symétrons de rang de Morley fini : ils sont les mêmes que les symétrons rangés. La solution est basée sur la reproduction de l'analyse de Lascar des groupes de rang de Morley fini, que n'avait pas pu conduire Zamour en toute généralité en travaillant dans le langage de la boucle. Un symétron infini simple, de rang de Morley fini, est une structure ω_1-catégorique (Théorème 15.3).

La dernière Section 16 envisage brièvement la possibilité d'une analyse de Hrushovski, faite à partir du haut, d'un symétron de rang de Morley fini, analogue à celle qui est faite dans un groupe de rang de Morley fini.

Autres références

BOROVIK-NESIN 1994 A.V. Borovik & Ali Nesin, *Groups of Finite Morley Rank,* Oxford University Press

BRUCK 1971 Richard Huber Bruck, *A survey of binary systems,* Springer

BHMPW 2009 Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martín Pizarro & Frank Wagner, *Die böse Farbe,* Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 8, 415-443

BURDGES-CHERLIN 2008 Jeffrey Burdges & Gregory Cherlin, *Borovik-Poizat rank and stability,* The Journal of Symbolic Logic, 67, 1570-1578

CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, *Groupes de petit rang de Morley* (en anglais), Annals of Mathematical Logic, 17.1, 1-28

FRÉCON 2018 Olivier Frécon, *Simple groups of Morley rank three are algebraic,* Journal of the American Mathematical Society, 31, 643-649

GAGEN 1971 Terrence Gagen, *Topics in finite groups,* Cambridge University Press

GLAUBERMAN 1966 George Glauberman, *Central elements in core-free groups,* Journal of Algebra, 4, 403-420

GRISHKOV-NAGY 2011 Alexander Grishkov & Gabor Nagy, *Algebraic Bol loops,* Forum Mathematicum, 23, 655-668

HRUSHOVSKI 1986 Ehud Hrushovski, *Contributions to stable theories,* thèse de doctorat, Berkeley

LEVI-VAN DER WAERDEN 1933 F. Levi & B.L. van der Waerden, *Über eine besondere Klasse von Gruppen,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 154-158

POIZAT 1987 Bruno Poizat, *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

VAN DEN DRIES 1982 Laurentius van den Dries, *Definable groups in characteristic* 0 *are algebraic,* Abstracts A.M.S., 3, 355-39

1.Prologue

Le mot *involution* dérive du verbe latin *involvere,* qui signifie envelopper, enrouler. Nos ancêtres disaient que quatre points alignés distincts $(x,x';y,y')$ étaient *en involution* s'ils formaient une division harmonique, c'est-à-dire si chacun des deux couples (x,x') et (y,y') étaient échangés par la même transformation projective de la droite, de la forme $a.t + b / c.t + d$; le carré de cette transformation, ayant quatre points fixes, vaut l'identité. De nos jours, l'usage est d'appeler *involution* tout élément d'un groupe dont le carré est l'unité, mais qui ne lui est pas égal. C'est à Novosibirsk qu'en 1986 Borovik m'a patiemment expliqué que les involutions avaient pris une certaine importance en Théorie des Groupes.

Le groupe G est dit *uniquement* 2*-divisible* si chacun de ses points x a une unique racine carrée $x^{1/2}$ (ces groupes ont été qualifiés de *médians* dans P18) ; dans ce cas G n'a pas d'involutions. Cette condition suffit si G est périodique, car alors chaque x est d'ordre impair, et a une racine carrée $x^{1/2}$ qui engendre le même groupe (cyclique et fini), et a même centralisateur que x ; si donc y est une racine carrée de x dans G , le carré de $y^{-1}.x^{1/2}$ vaut 1 , et $y = x^{1/2}$. Pour une raison semblable, elle suffit également si G est ω-stable, en particulier s'il a un rang de Morley fini ; en effet, le centre C du centralisateur de x est alors un groupe commutatif définissable sans involutions, dans lequel l'élévation au carré est un homomorphisme injectif, et aussi surjectif puisque son image est un sous-groupe de C qui a même rang et même degré de Morley ; x a par conséquent une seule racine carrée $x^{1/2}$ dans C , laquelle a même centralisateur que x .

Remarquons au passage que les groupes uniquement 2-divisibles forment une variété dans le langage des groupes augmenté de la racine carrée, définie par les équations de groupe auxquelles on ajoute :

$$(x^2)^{1/2} = x \qquad\qquad (x^{1/2})^2 = x \qquad\qquad (y.x.y^{-1})^{1/2} = y.x^{1/2}.y^{-1} \; .$$

En effet, la première équation interdit la présence d'involutions, et les deux autres forcent x et $x^{1/2}$ à avoir le même centralisateur.

Notre référence pour les groupes de rang de Morley fini sera POIZAT 1987. On y ajoute ici une version du Théorème des Indécomposables (de Zil'ber) qui n'y figure pas, et qui est bien plus pratique que l'originale ; elle se démontre facilement à partir de cette dernière, et de la remarque que tout ensemble définissable se divise en un nombre fini de parties indécomposables (voir P24a, et notre Théorème 9.3).

Théorème sans Indécomposables. *Dans un groupe de rang de Morley fini :*
(i) *tout partie définissable* A *normalise le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par* A *, et ses éléments se répartissent en un nombre fini de classes modulo ce dernier ;*

(ii) *étant donnée une famille quelconque de parties définissables, chacune d'elles normalise le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre elles, et se répartit dans un nombre fini de classes modulo ce dernier.*

On rappelle que l'ensemble A engendre *elliptiquement* le sous-groupe H du groupe G si, pour un nombre n fixé, chaque point de H est produit de n points dans $A \cup \{1\} \cup A^{-1}$; cette définition ne suppose pas que H soit tout le groupe engendré par A .

2. Groupes et symétries

Si G est un groupe quelconque, l'opération binaire $s(x,y) = y.x^{-1}.y$ satisfait aux trois équations suivantes :

(i) $s(x,x) = x$ (ii) $s(s(x,y),y) = x$ (iii) $s(s(x,y),z) = s(s(x,z),s(y,z))$.

Si on préfère noter l'opération $s(x,y) = xy$, ces équations deviennent :

(i) $xx = x$ (ii) $(xy)y = x$ (iii) $(xy)z = (xz)(yz)$.

En posant $z = x$ dans (iii) on obtient : (iv) $s(s(x,y),x) = s(x,s(y,x))$, $(xy)x = x(yx)$, qui est une forme faible d'associativité (et de commutativité).

Si, fixant y , on convient d'appeler *symétrie de centre* y l'opération unaire $s_y(x) = s(x,y)$, l'interprétation de ces équations est transparente : chaque symétrie (i) fixe son centre (ou, plus exactement, chacun de ses centres) ; (ii) est involutive ; (iii) est un automorphisme de la fonction $s(x,y)$ (soit encore : la conjuguée de la symétrie de centre y par la symétrie de centre z est la symétrie de centre $s(y,z)$). Le plus simple, pour vérifier la troisième équation, est de remarquer que les translations $a.x$, $x.b$, et l'inversion x^{-1} , sont des automorphismes de l'opération $s(x,y)$.

Les structures dont le langage consiste en une fonction binaire vérifiant ces trois équations sont connues sous le noms d'*espaces de symétries,* et sous bien d'autres noms encore ; pour faire bref, il seront qualifiés ici d'*espaces symétriques,* bien que ce mot signifie tout autre chose dans un autre domaine des mathématiques.

Un sous-espace symétrique S d'un groupe G est donc une partie de G close sous l'opération $s(x,y)$; on note que l'inverse et les translatés de S sont aussi des espaces symétriques.

Note. Depuis P18, j'ai choisi de noter $s(x,y)$ la valeur en x de la symétrie de centre y , car je n'avais pas remarqué que dans des travaux antérieurs le centre de symétrie était écrit à gauche, sous la forme $\sigma(y,x) = s(x,y)$; cette façon de faire respecte la tradition vénérable, remontant à Leibniz, de noter la fonction à gauche de son argument. Suivant l'avis de Zamour, je maintiens ma notation, pour des raisons esthétiques concernant la fonction-milieu introduite ci-dessous.

Le résultat suivant est très simple, mais d'un emploi constant :

Lemme 2.1. [P18] *Soient* G *un groupe, et* S *un de ses sous-espaces symétriques définissables contenant l'élément neutre.*
(i) *Si* S *est fini, il engendre un sous-groupe fini de* G .
(ii) *Si le rang de Morley de* G *est fini et* S *est définissable, le sous-groupe engendré par* S *est définissable, car elliptiquement engendré.*

Démonstration. (i) L'ensemble $X = S.S$ est clos par conjugaison, par inversion et par élévation au carré ; par conséquent, tout produit de points de X peut se remplacer par un produit sans répétitions.
(ii) Modulo le plus grand sous-groupe connexe elliptiquement engendré par lui même, S engendre un groupe fini. **Fin**

Maintenant que je connais les divers noms sous lesquels ils ont été désignés dans la littérature, je n'ai pas de remords d'avoir dans P21 rebaptisé *symétrons* les espaces symétriques dans lesquels, pour chaque x et chaque y , il existe un unique z tel que $s(x,z) = y$; on le nomme *milieu* $m(x,y)$ de x et de y ; il satisfait :

(i') $m(x,x) = x$ (ii') $m(x,y) = m(y,x)$.

Cette fonction binaire est caractérisée par les équations suivantes, qui indiquent que, à y fixé, la fonction $m(x,y)$ est l'inverse de la fonction $s(y,x)$:

(v) $s(y,m(x,y)) = x$ (vi) $m(y,s(y,x)) = x$.

Dans le langage de la symétrie et du milieu, les symétrons forment une classe équationnelle, dans laquelle chacune de ces deux fonctions est définissable à partir de l'autre, puique $z = s(x,y)$ si et seulement si $y = m(x,z)$.

L'espace symétrique d'un groupe est un symétron si et seulement s'il est uniquement 2-divisible ; en effet, $s(x,y) = y.x^{-1}.y = z$ si et seulement si $y.x^{-1}$ est racine carrée de $z.x^{-1}$.

Une autre façon de produire des symétrons est de considérer un automorphisme involutif s d'un groupe uniquement 2-divisible G ; l'ensemble I_s des points inversés par s forme un symétron, qui est normalisé par le groupe F_s des points fixes de s ; chaque point de G s'exprime de manière unique comme produit d'un point fixe et d'un point inversé. Les seules involutions du produit semi-direct $G.s$ sont les conjuguées de s , et elles forment un symétron que la translation par s rend isomorphe à I_s . Le lien entre les automorphismes involutifs de G et ses sous-espaces symétriques est décrit dans P 18, dans le but d'analyser la démonstration de FRECON 2018.

Caveat. L'action des symétries du groupe G par conjugaison sur elles-mêmes se traduit par $s_a.s_b.s_a(x) = a.(b.(a.x^{-1}.a)^{-1}.b)^{-1}.a = ab^{-1}a.x^{-1}.ab^{-1}a$; ce n'est pas l'action de G par automorphismes intérieurs sur leurs centres, et par ailleurs les symétries ne forment pas un groupe.

3. Boucles [Z22-24] **et symétrons** [P21)]

Considérons maintenant un groupe G uniquement 2-divisible, et l'opération $b(x,y) = y^{1/2}.x.y^{1/2}$. On remarque que $x^2 = b(x,x)$, que 1 est l'unique y tel que $b(y,y) = y$, et que x^{-1} est l'unique y tel que $b(x,y) = 1$; comme $s(x,y) = b(x^{-1},y^2)$, elle est définissable à partir de $b(x,y)$. Réciproquement, $b(x,y)$ est définissable à partir de $s(x,y)$ en utilisant 1 comme paramètre, car $x^{-1} = s(x,1)$, $y^{1/2} = m(y,1)$ et $b(x,y) = s(s(x,1),m(y,1))$.

Par ailleurs, une vérification pénible permet de voir que :
- pour tous x et y , il existe un unique u tel que $b(u,x) = y$, et un unique v tel que $b(x,v) = y$
- il existe un (unique) élément neutre bilatère (1 en l'occurence)
- l'inverse à droite est égal à l'inverse à gauche (x^{-1} en l'occurence)
- l'inverse est un automorphisme, c'est-à-dire que $b(x,y)^{-1} = b(x^{-1},y^{-1})$
- une forme faible de l'associativité, dite *équation de Bol*, est vérifiée :

$b(b(b(z,x),y),z) = b(z,b(b(x,y),x))$, soit encore $z((x,y)x) = ((zx)y)x$ si on écrit plus simplement $b(x,y) = xy$
- pour tout x il existe un unique y tel que $b(y,y) = x$.

Une loi binaire vérifiant ces conditions est appelée K-boucle uniquement 2-divisible.

De plus, la double interprétation que nous avons conduite dans les groupes est connue pour avoir une portée générale (voir les références dans Z22-24 et BRUCK 1971), c'est-à-dire que :
- si $b(x,y)$ est une K-boucle uniquement divisible par 2 , $s(x,y) = b(x^{-1},b(y,y))$ est un symétron
- si $s(x,y)$ est un symétron et a est un quelconque de ses points, $b(x,y) = s(s(x,a),m(y,a))$ est une K-boucle uniquement 2-divisible, dont le neutre est a .

Note. Pour rester cohérent avec notre notation de la symétrie, nous avons permuté les variables dans l'écriture usuelle de la boucle $y+x = b(x,y)$; par ailleurs nous trouvons très inconfortable d'écrire additivement une opération qui n'est ni commutative ni associative. Il existe en fait une deuxième condition de Bol, celle vérifiée par la duale $x+y$ de $b(x,y)$, qu'on obtient en permutant les variables : $(x(yx))z = x(y(x,z))$; la conjonction des deux est appelée condition de Moufang, qui équivaut, dans le cas des K-boucles uniquement 2-divisibles, à la commutativité de la boucle $b(x,y) = b(y,x)$.

Comme le milieu de x et de 1 au sens du symétron est la racine carrée de x au sens de la boucle, on en déduit que les K-boucles forment une variété dans le langage $b(x,y)$, x^{-1} , $x^{1/2}$, 1 ; pour le voir directement, il faut une certaine expertise dans l'égalité de Bol (que ses aficionados trouvent aussi précieuse et naturelle que l'associativité).

Autrement dit, pour étudier un symétron, nous avons le choix entre deux langages, celui de la symétrie et celui de la boucle. On voit que la boucle est obtenue en détruisant l'homogénéité du symétron, en décidant qu'un point arbitraire est le neutre. Dans une littérature assez volumineuse sur les groupes - surtout les groupes finis - la boucle est choisie, car l'amour qu'éprouvent les théoriciens des groupes pour une structure est en proportion directe à sa ressemblance à un groupe, aussi bizarre soit-elle (une K-boucle associative est un groupe commutatif). De notre côté, nous pensons au contraire que la boucle ressemble trop artificiellement à un groupe pour permettre d'exprimer simplement les propriétés spécifiques aux symétrons de rang de Morley fini, et nous préférons le langage de la symétrie (et du milieu), lequel est associé à une axiomatisation transparente ; cependant nous ne poussons pas le respect de la cohérence jusqu'à étudier les groupes de façon homogène, dans le langage de la fonction ternaire $y.x^{-1}.z$, laquelle est interdéfinissable avec la relation quaternaire d'équipollence $y.x^{-1} = v.u^{-1}$.

4. Espaces symétriques et espaces de symétries, transvexions

Lemme 4.1. *Dans un espace symétrique, la première condition implique la deuxième, laquelle est équivalente à la conjonction des deux dernières :*
(i) *quels que soient* a *et* b *, il y a au plus un seul* c *tel que la symétrie de centre* c *échange* a *et* b *;*
(ii) *chaque symétrie n'a qu'un seul point fixe ;*
(iii) *chaque symétrie n'a qu'un seul centre ;*
(iv) *si deux symétries commutent, elles sont égales.*

Démonstration. Supposons (i) vérifiée, et considérons un point fixe b de la symétrie s_a ; s_a commute avec s_b ; comme s_b commute avec s_a , $a' = s_b(a)$ est aussi un centre de la symétrie s_a , si bien que la symétrie de centre a' échange a et a ; vu l'unicité, a = a' , et b = a .

Il est clair que (ii) implique (iii) ; si deux symétries commutent, chacune normalise l'ensemble des points fixes de l'autre, si bien que (ii) implique (iv).

Réciproquement, si a est un point fixe de la symétrie s , elle commute avec s_a , et lui est égale si (iv) est vérifiée ; a est donc un centre de s , qui est unique d'après (iii). **Fin**

Si S est un espace symétrique, ses symétries forment un sous-espace symétrique Σ du groupe des permutations de S , où la fonction $\sigma(s_x,s_y) = s_y.s_x^{-1}.s_y = s_y.s_x.s_y$ est la conjuguée de la symétrie de centre x par la symétrie de centre y , dont le résultat est la symétrie de centre s(x,y) ; c'est une image homomorphe de S par l'application qui envoie a sur la symétrie de centre a . La condition (iii) signifie que l'espace symétrique S est isomorphe à Σ ; la condition (iv) signifie que le produit de deux symétries n'est jamais une involution.

Pour l'espace symétrique du groupe G , (i) signifie que la racine carrée est unique si elle existe, c'est-à-dire que l'élévation au carré est une injection de G dans G ; (ii) signifie que G n'a pas d'involutions ; (iii) que G n'a pas d'involutions centrales ; (iv) que le quotient de G par le groupe de ses involutions centrales n'a pas d'involutions (autrement dit, toute involution de G est centrale et G n'a pas d'éléments d'ordre 4).

Dans un groupe G , les cossettes modulo les sous-groupes de G sont des cas particuliers de sous-espaces symétriques, puisque ce sont les ensembles non vides clos pour l'opération ternaire $y.x^{-1}.z$. Le lemme suivant explique pourquoi les sous-espaces symétriques d'un groupe ont été qualifiés d'*ensembles convexes* dans P18, car le contexte invitait à considérer les cossettes modulo les sous-groupes abéliens comme les droites d'une géométrie.

Lemme 4.2. *Une partie X d'un groupe G en est un sous-espace symétrique si et seulement si chaque paire de points de X est contenue dans une cossette modulo un sous-groupe commutatif incluse dans X .*

Démonstration. Si X est convexe, il est clair qu'il est clos pour l'opération $y.x^{-1}.y$; réciproquement, on translate et on montre par récurrence sur n que, si X contient x et 1 , il contient chaque x^n , soit encore le groupe cyclique engendré par x . **Fin**

Définition 4.3. (i) *Si S est un espace symétrique, on note T le groupe des permutations de S qui sont produit d'un nombre pair de symétries, que nous appelons* transvexions *de S ; plus précisément, on note* T_n *l'ensemble des produits de* 2^n *symétries ; nous appelons* transvexions primaires *les points de* T_0 *, c'est à dire les produits de deux symétries.*
(ii) *On note sT le groupe des* symétries-transvexions, *qui sont les permutations de S engendrées par les symétries, et qui sont aussi les produits d'une transvexion par n'importe quelle symétrie : sT est soit égal à T , soit isomorphe au produit semi-direct de T par le groupe {1,s} .*
(iii) *Si s est une symétrie de S , on note* T_s *l'ensemble des permutations de S qui sont produit de s et d'une symétrie ;* T_s *est un sous-espace symétrique du groupe des permutations de S ; comme il contient l'identité, il est clos par inversion et prise de carré (et aussi par prise de puissance n° pour tout entier n , positif ou négatif).*

T_0 est donc la réunion des T_s . C'est aussi, pour chaque symétrie s , l'ensemble des produits de deux points de T_s , si bien que ce dernier engendre le groupe T (en effet ss'.ss" = ss's.s" et s's" = ss.s'.ss.s" = s(ss's).ss"). Nous verrons à plusieurs reprises que les transvexions primaires jouent un rôle crucial dans la description des symétrons.

Pour décrire l'influence d'un homomorphisme entre deux espaces symétriques sur leurs groupes de transvexions, il faut le décomposer en un homomorphisme surjectif et un homomorphisme injectif ; ce dernier est un plongement, c'est-à-dire un isomorphisme entre sa source et son image, puisque le langage est fonctionnel.

Lemme 4.4. *Soit* f *un homomorphisme de l'espace symétrique* S *vers l'espace symétrique* S' .
(i) f *induit un homomorphisme surjectif* f^* *entre le groupe des symétries-transvexions de* S *et celui de son image* $f(S)$.
(ii) *Le groupe des symétries-transvexions de* $f(S)$ *est une section (pas un sous-groupe) de celui de* S .

Démonstration. (i) Il faut vérifier que, si le produit des symétries centrées sur y_1 , ... y_n vaut l'identité sur S , leurs images par f a la même propriété sur $f(S)$; autrement dit, si $s((...s(s(x,y_1),y_2) ...),y_n) = x$ pour tout x de S , alors $s((\ldots s(s(u,f(y_1)),f(y_2)) ...),f(y_n)) = u$ pour tout u de $\varphi(S)$, ce qui est évident car u est de la forme $u = f(x)$.
(ii) Le groupe des symétries-transvexions de $f(S)$ est le sous-groupe engendré par les symétries de S' centrées dans $f(S)$, quotienté par la relation d'équivalence "avoir même action sur $f(S)$ ". **Fin**

Quand S est un symétron, l'application qui associe une symétrie à son centre établit un isomorphisme entre S et le symétron de ses symétries, munies de la fonction binaire de conjugaison, puis la translation par s induit un isomorphisme entre S et T_s , qui est un sous-espace symétrique du groupe T . Le groupe de transvexions de T_s est isomorphe à T , mais ce n'est pas T , qui est un groupe de permutations de S , pas de permutations de T_s .

Lemme 4.5. *Quand* S *est un symétron :*
(i) T_0 *est formé des commutateurs de symétries, et* T *est le dérivé de* sT *;*
(ii) *pour chaque symétrie* s *l'élévation au carré est une bijection de* T_s *dans* T_s *; l'élévation au carré est donc une surjection de* T_0 *dans* T_0 .

Démonstration. (i) Comme s' est conjuguée de s par une symétrie, $s.s'$ est de la forme $s.s''.s.s'' = [s,s'']$.
(iii) $s.s'$ est le carré de $s.s''$ si et seulement si s'' conjugue s et s' . **Fin**

Définition 4.6. *On dit qu'un espace symétrique est* borné *si chacune de ses transvexions est produit de* m *symétries, où* m *est un nombre entier fixé, c'est-à-dire si la suite des* T_n *stationne à partir d'un certain* n . *Dans ce cas les groupes* T *et* sT *sont définissables à partir de l'espace symétrique.*

Lemme 4.7. *Tout sous-espace symétrique définissable d'un espace symétrique borné de rang de Morley fini est lui-même borné*.

Démonstration. Le groupe T des transvexions de l'espace S est définissable ; si s est une symétrie de S centrée dans le sous-espace S' , l'ensemble Θ_s des produits de s par une symétrie centrée en S' est un sous-espace symétrique de T ; d'après le Lemme 2.1, ce dernier engendre elliptiquement un sous-groupe Θ de T , et le quotient de Θ par la relation "avoir même action sur S' " est le groupe des transvexions de S' . **Fin**

Remarque 4.8. Comme la donnée d'un symétron équivaut à celle d'un ensemble I d'involutions dans un groupe, clos par conjugaison et tel que deux points de I soient toujours conjugués par un unique point de I, on pourrait penser que l'étude des symétrons fait partie de la Théorie des groupes ; c'est certainement le cas pour les symétrons finis. Cependant, le logicien constate que le groupe des transvexions n'est pas toujours définissable à partir du symétron, si bien qu'il n'hérite pas des propriétés modèle-théoriques de ce dernier. Ne perdons pas de vue qu'ici notre étude porte sur la Théorie des Modèles du symétron lui-même.

5. Symétrons groupiques

Nous décrivons dans cette section, en suivant P18, le groupe des transvexions d'un *symétron groupique,* c'est-à-dire du symétron d'un groupe G uniquement 2-divisible. Dans les démonstrations qui suivent, on suppose que G n'est pas réduit à l'élément neutre, car les résultats s'adaptent trivialement quand $G = \{1\}$, puisqu'alors $T = sT = \{1\}$.

Une remarque préliminaire : les symétries sont des bijections de G dans G, mais ce ne sont pas des automorphismes de G ; quand G est uniquement 2-divisible, le seul cas d'une symétrie qui est un automorphisme de G est l'inversion dans un groupe abélien. Par contre, les symétries opèrent par conjugaison sur le groupe des transvexions du symétron de G.

Lemme 5.1. *Si* G *est un groupe, ses symétries sont les applications de* G *dans* G *qui s'écrivent* $a.x^{-1}.a$ *; la translation* $a.x.b$ *est produit d'un nombre pair de symétries si et seulement si* $a.b^{-1}$ *est dans le groupe dérivé* G' *de* G *; les translations* $a_1.x.b_1$ *et* $a_2.x.b_2$ *sont égales, c'est-à-dire définissent la même application de* G *dans* G*, si et seulement si* $a_1^{-1}.a_2$ *est égal à* $b_1.b_2^{-1}$ *et est central dans* G.

Démonstration. C'est la définition d'une symétrie. Un produit d'un nombre pair de symétries s'écrit $a_1.a_2. \dots a_n.x.a_n. \dots .a_2.a_1$, où les a_i sont les centres où les inverses des centres des symétries composées ; réciproquement, la translation $[a,b].x = aba^{-1}b^{-1}.x$ est la composée de $a^{-1}b^{-1}.x.a^{-1}b^{-1}$ et de $ab.x.ba$, soit encore la composée de quatre symétries : celle de centre 1, celle de centre $a^{-1}b^{-1}$, celle de centre b^{-1}, et enfin celle de centre a. Si $a_1.x.b_1 = a_2.x.b_2$ pour tout x, $a_2^{-1}a_1.x.b_1b_2^{-1} = x$; en faisant $x = 1$ on voit que les deux coefficients sont inverses l'un de l'autre, et $c.x.c^{-1} = x$ pour tout x signifie que c est central. **Fin**

Lemme 5.2. *Soient* G *un groupe uniquement* 2*-divisible, et le sous-groupe* Θ *de* $G\times G$ *défini par l'équation* $x.y \in G'$*, ainsi que le produit semi-direct* $\varepsilon\Theta$ *de* Θ *par son automorphisme involutif* ε *qui échange les coordonnées ; les involutions de* $\varepsilon\Theta$ *forment un symétron isomorphe à celui des symétries de* G*, qui engendre* $\varepsilon\Theta$.

Démonstration. Notons G^i le groupe inverse de G ; le groupe $G \times G^i$ opère par translations bilatères sur G , et la translation $(a.x.b)$ image de (a,b) est produit d'un nombre pair de symétries si et seulement si $a.b^{-1} \in G'$, ce qui définit un sous-groupe Θ_1 de $G \times G^i$; la conjugaison par x^{-1} transforme $a.x.b$ en $(a.x^{-1}.b)^{-1} = b^{-1}.x.a^{-1}$, et correspond à l'application $\eta(a,b) = (b^{-1},a^{-1})$, qui est un automorphisme involutif de $G \times G^i$.

Comme G^i est isomorphe à G via l'application inverse, en remplaçant la deuxième coordonnée par son inverse on remplace Θ_1 par le groupe Θ de l'énoncé, et l'application η devient l'échange ε des coordonnées.

Les involutions de $\varepsilon\Theta$ sont les $((a,a^{-1}),\varepsilon)$; comme G est 2-divisible elles sont toutes conjuguées, et comme il n'a pas d'involution chacune ne commute qu'avec elle-même. En conjuguant l'involution $((b,b^{-1}),\varepsilon)$ par l'involution $((a,a^{-1}),\varepsilon)$, on obtient : $((a,a^{-1}),\varepsilon).((b,b^{-1}),\varepsilon).((a,a^{-1}),\varepsilon) = ((a,a^{-1}),\varepsilon).((b,b^{-1}).(a^{-1},a),1) = ((a,a^{-1}),\varepsilon).((ba^{-1},b^{-1}a),1) = ((a,a^{-1}).(b^{-1}a,b.a^{-1}),\varepsilon) = ((ab^{-1}a,a^{-1}ba^{-1}),\varepsilon)$; on voit donc qu'en associant à l'involution $((a,a^{-1}),\varepsilon)$ la symétrie s_a de centre a on obtient un isomorphisme entre les deux espaces symétriques, puisque la conjuguée de s_b par s_a a pour centre $s_a(b)$.

Les produit de ε et d'une involution $(a,a^{-1}).\varepsilon$ forment le "convexe diagonal" des (a,a^{-1}) , sous-ensemble symétrique de $G \times G$ qui engendre Θ d'après la démonstration du lemme précédent. **Fin**

Lemme 5.3. *Si* G *est uniquement* 2*-divisible, le groupe* T *des transvexions du symétron de* G *est isomorphe au quotient de* Θ *par le centre de* $\varepsilon\Theta$ *, formé des points* (c,c) *où* c *est dans* G' *et* c^2 *est central dans* G . *Si de plus* G *est de rang de Morley fini,* T *est définissable.*

Démonstration. Regardons tout d'abord à quelle condition $((x,x^{-1}),1)$ commute avec $((a,b),\varepsilon)$; $((x,x^{-1}),1).((a,b),\varepsilon) = ((xa,x^{-1}b),\varepsilon)$, tandis que $((a,b),\varepsilon).(x,x^{-1}),1) = ((ax^{-1},bx),\varepsilon)$; il faut donc que $xa = ax^{-1}$ et que $x^{-1}b = bx$, ce qui s'écrit $xaxa = a^2$ et $b^2 = bxbx$; vu l'unicité de la racine carrée, ce n'est possible que si $x = 1$. Par conséquent le centre de $\varepsilon\Theta$ est inclus dans Θ .

Comme un point central de Θ doit commuter avec tous les (x,x^{-1}) ses deux coordonnées sont centrales, et il est formé des couples (c_1,c_2) tels que c_1 et c_1 soient centraux et $c_1.c_2 \in G'$. Pour qu'un tel point soit central dans $\varepsilon\Theta$ il faut en plus qu'il commute avec ε , c'est-à-dire que ses deux coordonnées soient égales ; le centre de $\varepsilon\Theta$ est donc formé des (c,c) où c est central et $c^2 \in G'$. Quand G est de rang de Morley fini, G' est définissable, donc clos par racine carrée, et en fait $c \in G'$.

Comme $\varepsilon\Theta$ est engendré par ses involutions, son action sur elles correspond au quotient de $\varepsilon\Theta$ par son centre ; T est donc une section de $G \times G$, qui est définissable quand G est de rang de Morley fini, **Fin**

Corollaire 5.4. *Le groupe des transvexions* T *du symétron d'un groupe uniquement 2-divisible* G *ne contient pas d'involutions ; plus précisément, l'élévation au carré est une injection de* T *dans* T *. Il est divisible par* 2 *si et seulement si le groupe dérivé* G' *de* G *l'est.*

Démonstration. Soit (x,y) dans Θ , c'est-à-dire que $x.y \in G'$, et son carré (x^2,y^2) est dans le centre de sT ; $x^2 = y^2 = c$ où c est central dans G ; l'unique racine carrée $c^{1/2}$ de c est centrale dans G , et $x = y = c^{1/2}$, si bien que (x,y) est dans le centre de sT .

Supposons que (x,y) et (u,v) dans Θ aient même carré modulo le centre de sT ; $x^2 = c.u^2$, $y^2 = c.v^2$, où c est central (et $c \in G'$) ; comme $c^{1/2}$ est central, l'unicité de la racine carrée dans G implique que $x = c^{1/2}.u$, et que $c = c^{1/2} = 1$; autrement dit $(x,y) = (u,v)$.

Le sous-groupe $G'\times\{1\}$ de Θ intersecte trivialement le centre de sT ; il est isomorphe à un sous-groupe de T dont les racines carrées de ses points ne peuvent provenir que de lui-même. Supposons réciproquement que G' soit 2-divisible ; si (x,y) est dans Θ , son unique racine carrée dans $G\times G$ est $(x^{1/2},y^{1/2})$; $(x^{1/2}.y^{1/2})^2 = x.y.g$ avec g dans G' ; par hypothèse la racine carrée de $x.y.g$ est dans G' , ce qui signifie que $(x^{1/2},y^{1/2})$ est dans Θ ; ce dernier est donc 2-divisible, ainsi que son image T . **Fin**

Remarque 5.5. Le dérivé d'un groupe uniquement 2-divisible n'est pas toujours divisible par 2 . Pour obtenir un exemple par compacité, il suffit de disposer, pour chaque entier m , d'un groupe uniquement 2-divisible contenant un commutateur qui n'est pas le carré d'un produit de m commutateurs ; la suite des groupes de matrices triangulaires unipotentes à coefficients dans un corps de caractéristique $\neq 2$ donne ce qu'il faut.

Définition 5.6. *Nous dirons qu'un symétron* S *est* abélien *si son groupe de transvexions* T *est commutatif.*

Cela signifie que, pour toute symétrie s , son système générateur T_s est commutatif ; T_s , étant uniquement 2-divisible et clos pour l'opération $y^2.x^{-1}$, est un groupe commutatif, égal à T , et S est isomorphe au symétron des symétries de T . Cela signifie encore que les transvexions primaires commutent, c'est-à-dire que S vérifie l'équation $s(s(s(s(x,y),z)u)v) = s(s(s(s(x,u),v)y)z)$.

Exemples 5.7. Si G est uniquement 2-divisible et commutatif, T est isomorphe au sous-groupe des (x,x^{-1}) de $G\times G$, lui-même isomorphe à G , et sT est isomorphe au produit semi-direct de G par l'inversion. Le symétron de G est abélien, c'est-à-dire T est commutatif, si et seulement si G est nilpotent de classe 2 ; dans ce cas-là la loi $x{*}y = x.y.[y,x]^{1/2}$ définit sur G une structure de groupe commutatif G^* qui a les mêmes symétries que G (voir P18 et GAGEN 1971, p. 8). Si G est nilpotent non commutatif, le centre de $\varepsilon\Theta$ n'est pas trivial. Si G est complet (i.e. $G = G'$) et sans centre T est isomorphe à

$G{\times}G$; dans ce cas, si G est de rang de Morley fini, il est un contre-exemple à la Conjecture d'Algébricité.

Définition 5.8. *On dit qu'un symétron est* régulier *si son groupe de transvexions est uniquement 2-divisible.*

Par exemple, un symétron ω-stable borné sans transvexions involutives est régulier.

Lemme 5.9. *Les seules symétries-transvexions involutives d'un symétron régulier sont ses symétries et, pour chaque symétrie* s *,* T_s *est l'ensemble de ses transvexions inversées par* s .

Démonstration. Il n'y a pas de transvexions involutives, et si $s.t$ est une involution, c'est que s conjugue t et t^{-1} ; elle inverse aussi son unique racine carrée $t^{1/2}$ dans T , et $s.t = t^{-1/2}.s.t^{1/2}$ est conjuguée de s : c'est donc une symétrie. Par ailleurs, u est inversé par s si et seulement si $s.u$ est une involution. **Fin**

Proposition 5.10. [P18, P21] (i) *Si le groupe* G *est de rang de Morley fini, son espace symétrique est borné.*
(ii) *Si de plus il n'a pas d'involutions, son symétron est régulier.*
(iii) *Tout sous-symétron définissable d'un symétron régulier et borné de rang de Morley fini est lui-même régulier et borné.*

Démonstration. (i) C'est une conséquence de 5.1 parce que le dérivé G' est elliptiquement engendré par les commutateurs : c'est un théorème bien connu de Zil'ber, mais il est observé dans P18 que c'est une conséquence immédiate de l'ellipticité de la génération du groupe engendré par le "convexe diagonal", c'est-à-dire le sous-espace symétrique de $G{\times}G$ formé des (x,x^{-1}) .
(ii) Le groupe de ses transvexions est une section définissable de $G{\times}G$.
(iii) S est un sous-espace symétrique définissable d'un groupe G sans involutions de rang de Morley fini, isomorphe à son groupe de transvexions ; son groupe de transvexions est une section définissable de G . **Fin**

L'Exemple 5.7 montre que le groupe associé à un symétron groupique n'est pas uniquement déterminé, ce qui justifie la question suivante :

Question 5.11. *Si* S *est un symétron groupique, y a-t-il un ou plusieurs groupes définissables dans* S *(ou dans* T *) dont il soit le symétron ? Peut-on décrire les paires de groupes isosymétriques de rang de Morley fini ?*

Un symétron groupique de rang de Morley fini est-il isomorphe au symétron d'un groupe de rang de Morley fini sans involutions ? Qu'en est-il si de plus son groupe de transvexions est borné ?

6. Symétrons commutatifs

Comme il se doit, nous dirons qu'un espace symétrique est commutatif si sa loi l'est, c'est-à-dire si $s(x,y) = s(y,x)$. Il peut être abélien ou pas.

Lemme 6.1. (i) *Un espace symétrique commutatif est un symétron.*
(ii) *Un symétron est commutatif si et seulement si la symétrie* $s(x,y)$ *y est égale au milieu* $m(x,y)$.
(iii) *Dans ce cas, la boucle associée est commutative.*
(iv) *Le symétron d'un groupe uniquement 2-divisible est commutatif si et seulement si ce dernier est d'exposant trois.*
(v) *Un symétron est commutatif si et seulement chacune de ses transvexions primaires est d'ordre trois.*

Démonstration. (i) Si l'espace symétrique est commutatif, $s(x,s(x,y)) = s(s(y,x),x) = y$; d'autre part, si $s(x,z) = y$, alors $s(x,y) = s(x,s(x,z)) = z$.
(ii) Si le symétron est commutatif, nous venons de voir que $s(x,y)$ est le milieu de x et de y ; par ailleurs le milieu est commutatif.
(iii) La boucle, qui s'écrit en général $b(x,y) = s(s(x,a),m(y,a))$, est commutative si s l'est, car alors elle devient $m(m(x,a),m(y,a)) = s(s(x,a),s(y,a))$.
(iv) $yx^{-1}y = xy^{-1}x$ signifie que $(x^{-1}y)^3 = 1$.
(v) Si S est un symétron, chaque T_s est un sous-espace symétrique de T qui est isomorphe à S . La condition de commutativité signifie donc que $yx^{-1}y = xy^{-1}x$ quand x et y sont dans le même T_s ; en faisant $y = 1$, on voit que $x^3 = 1$, c'est-à-dire que chaque point de T_0 est d'ordre 3 . Sous l'hypothèse réciproque, pour chaque x et y dans T_s , $x^{-1}y$ est d'ordre 3 puisqu'il est dans T_0 , et S est commutatif. **Fin**

On comparera ce Lemme à Z24 4.06. Comme le montre le contre-exemple des groupes commutatifs, la commutativité de la boucle n'implique pas celle du symétron. Il pourrait être utile de savoir caractériser les symétrons dont la boucle est commutative, bien qu'il ne soit pas clair que les boucles commutatives aient des propriétés modèle-théoriques particulières.

L'étude des groupes finis engendrés par une classe de conjugaison d'involutions tel que le produit de deux quelconques d'entre elles soit d'ordre 3 a été une première étape importante de la classification des groupes simples finis. Le résultat des courses est que leur dérivé n'a pas d'involutions, et qu'ils sont résolubles.

Les symétrons commutatifs sont des cas particuliers de systèmes de Steiner, étant formés de triplets $\{x, y, xy\}$ tels que par deux points passe un et un seul triplet de la famille ; ce sont précisément ceux qui satisfont à la condition (iii), ce qui n'est pas le cas du plan projectif sur le corps à deux éléments. Ils forment la variété des fonctions binaires associée aux équations (i), (ii) et (iii), auxquelles on ajoute la commutativité.

Lemme 6.2. *Le symétron commutatif libre engendré par trois points est abélien : c'est le symétron de l'unique groupe d'ordre* 9 *et d'exposant* 3 .

Démonstration. Si un symétron commutatif est engendré par x , il est réduit à ce point ; s'il est engendré par x et y , il est formé de x , y et xy ; s'il est engendré par trois points x , y et z , on vérifie sans grande peine qu'il est formé de x , xy , $(xy)z$ et de leurs homologues, ce qui fait au plus neuf points. Comme par ailleurs le symétron du groupe d'exposant 3 et d'ordre 9 , qui est commutatif et engendré en tant que groupe par deux points a et b , est engendré en tant que symétron par 1 , a et b , c'est lui le symétron libre. **Fin**

Il est bien connu que les classes de conjugaison d'un groupe d'exposant 3 sont commutatives ; plus précisément, comme le montre un calcul rapide :

Lemme 6.3. *Dans un groupe, si* y *,* xy *et* xy^{-1} *sont d'ordre* 3 *,* x *et* yxy^{-1} *commutent.*

On en déduit facilement qu'un groupe d'exposant 3 est localement résoluble, localement fini, puis localement nilpotent ; mais en s'acharnant sur les commutateurs, on finit par se convaincre qu'il est nilpotent de classe 3 (LEVI & VAN DER WARDEN 1933).

Corollaire 6.4. *Soient* s *une symétrie du symétron commutatif* S *, et* x *et* y *deux points de* T_s *; s'ils commutent, le groupe qu'ils engendrent a un, trois ou neuf points, et est inclus dans* T_s *; s'il ne commutent pas, ils engendrent un groupe à 27 éléments.*

Démonstration. T_s contient $(yx^{-1}y)^2$, qui vaut xy si x et y commutent. Sinon, comme xy et xy^{-1} sont dans T_0 , x commute avec $yx^{-1}y^{-1}$, et aussi avec $xyx^{-1}y^{-1}$; y commute aussi avec ce commutateur, qui est donc central dans le groupe engendré par x et par y , lequel est nilpotent de classe 2 , si bien que le commutateur est d'ordre 3 ; x et y engendrent donc une copie du groupe d'exposant trois librement engendré par deux éléments, lequel a vingt-sept éléments. Le commutateur de x et de y n'est pas nécessairement dans T_s , car le symétron engendré par 1 , x et y n'a que neuf points. **Fin**

Ce petit résultat est loin de répondre à la question suivante :

Questions 6.5. *Un symétron commutatif est-il localement fini ? Est-ce que toutes ses transvexions sont d'ordre trois ? Plus précisément, le symétron commutatif libre engendré par quatre points est-il fini ou infini, et quel est son groupe de transvexions ?*

Après avoir remarqué que les sous-symétrons de ceux des groupes d'exposant trois forment une variété, puisque ce sont ceux dont toutes les transvexions sont d'ordre trois, on termine la section par une question s'adressant à des logiciens :

Question 6.6. *Que peut-on dire de la théorie des symétrons commutatifs existentiellement clos ? de celle des groupes d'exposant trois existentiellement clos ? de celle de leurs sous-symétrons existentiellement clos ?*

Nous retrouverons les symétrons commutatifs dans la Proposition 12.8.

7. Une propriété locale des symétrons ω-stables

Toute la théorie des symétrons ω-stables développée dans P21 repose sur la propriété locale exprimée dans la proposition qui suit. Si s et s' sont deux symétries, $C(s,s')$ note dans son énoncé l'ensemble des points de T_s qui commutent avec tous les points de T_s qui commutent avec $s.s'$; $C(s,s')$ est un sous-ensemble de T_s définissable commutatif, contenant l'identité et $s.s'$, et c'est un sous-espace symétrique de T_s ; il contient donc aussi toutes les puissances de $s.s'$.

Proposition 7.1. [P21] *Si l'espace symétrique* S *est* ω*-stable (en particulier s'il est fini), et satisfait l'hypothèse (ii) du Lemme 4.1, alors pour chaque couple de symétries* $C(s,s')$ *est un groupe commutatif uniquement* 2*-divisible.*

Démonstration. L'hypothèse signifie que S est isomorphe à l'espace de ses symétries, et que l'ensemble T_0 des produits de deux symétries ne contient pas d'involutions.

Comme $C = C(s,s')$ est convexe et contient 1, il est clos par élévation au carré ; si deux point $s.s_1$ et $s.s_2$ de C ont même carré, comme ils commutent $((s.s_1)^{-1}.(s.s_2))^2 = (s_1.s_2) = 1$, ce qui implique que $s_1 = s_2$ puisqu'il n'y a pas d'involutions dans T_0. L'élévation au carré est donc une injection de C sur un de ses sous-ensembles, que nous notons A, dont le complément a un rang de Morley strictement inférieur à celui de C ; si nous notons additivement la restriction à C de la loi de groupe de T, C est clos pour l'opération $y\text{-}x\text{+}y = 2y - x$; pour tous x et x' dans C, $A\text{-}x$ et $A\text{-}x'$ sont inclus dans C, et doivent avoir une intersection non vide, ce qui signifie que $x\text{-}x'$ est différence de deux points de A, et est donc dans C ; comme C est clos par passage à l'opposé, c'est un groupe ; comme il est ω-stable et sans involutions, il est uniquement 2-divisible, et en fait $A = C$. **Fin**

On voit donc que dans un groupe fini, ou plus généralement ω-stable, dès qu'une involution ne commute avec aucune de ses conjuguées (sauf elle-même) elle forme avec elles un symétron.

Nous notons $D(s,s')$ le plus petit sous-groupe définissable de $C(s,s')$ contenant $s.s'$, et $\Delta(s,s') = \Delta(a,a')$ son translaté $s.D(s,s')$ dans S, où a et a' sont les centres respectifs de s et de s'.

Corollaire 7.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 7.1,* $\Delta(a,a')$ *est à la fois le plus petit sous-ensemble définissable de* S *clos par prise de milieu contenant* a

et a' *, et le plus petit sous-ensemble définissable de* S *clos par symétrie contenant* a *et* a' .

Démonstration. Il faut montrer que, si A est un groupe abélien ω-stable sans involutions, les parties définissables X de A contenant 0 closes par milieu sont les mêmes que celles qui sont closes par symétrie, et que ce sont en fait les sous-groupes définissables de A . Si X est un groupe, il est clos par symétrie, et il est clos par milieu puisqu'il est divisible par 2 . Si X est clos pour le milieu $(x+y)/2$, ½.X est un groupe H : comme le quotient A/H ne contient pas d'involutions, X = H . Si X est clos par symétrie, on fait comme dans la démonstration de la Proposition 4.1. **Fin**

On en déduit les contraintes structurelles suivantes (voir [P21]) :

- pour qu'un espace symétrique ω-stable soit un symétron, il suffit que chacune de ses symétries n'ait qu'un seul point fixe ;
- dans un symétron ω-stable S , une partie définissable est close par symétrie si et seulement si elle est close par prise de milieu ; on dira alors qu'elle est un *sous-symétron* de S ;
- si S' ⊂ S" sont deux sous-symétrons définissables du symétron ω-stable S , et si a est un point de S" - S' , s(S',a) est disjoint de S' ; par conséquent RM(S') < RM(S") , ou bien RM(S') = RM(S") et d°M(S') < d°M(S") ; on a donc la condition de chaîne descendante sur les sous-symétrons définissables ;
- un sous-symétron définissable d'un symétron ω-stable est le symétriseur de l'ensemble de ses types génériques (c'est-à-dire de ceux qui sont de rang de Morley maximum), qui sont en nombre impair ; ses symétries agissent transitivement sur ses types génériques ;
- une partie définissable X du symétron S est générique, c'est-à-dire de même rang de Morley que S , si et seulement si S est la réunion d'un nombre fini de translatés t.X de X par des produits t de deux symétries (dont nous avons noté l'ensemble T_0) ;
- un symétron est dit *connexe* s'il n'a pas de sous-symétron propre de même rang, ce qui signifie encore qu'il n'a qu'un seul type générique ; un symétron ω-stable se décompose en ses *composantes connexes*, comme nous le verrons en détail dans la Section 8.

Corollaire 7.3. *Tout sous-espace symétrique fini d'un symétron est un symétron.*

Démonstration. Soit S un symétron, et F un sous-ensemble fini de S clos par symétrie ; chacune de ses symétries ne fixant dans S que son centre, a aussi cette propriété dans F ; nous avons vu que cette condition suffit à être un symétron pour un espace symétrique ω-stable, et a fortiori s'il est fini. **Fin**

Si S est un symétron, nous savons que l'élévation au carré est une surjection de T_0 dans T_0 ; dans le cas fini, c'est donc aussi une injection ; un peu de travail local permet de voir que c'est plus généralement vrai dans le cas ω-stable :

Corollaire 7.4. *Dans un symétron* S *qui est* ω-*stable, ou bien dont toutes les transvexions primaires sont d'ordre fini :*
(i) *à toute transvexion primaire* t *est associé un unique groupe (commutatif) définissable minimal* $D(t)$ *contenu dans* T_0 *et contenant* t *; tout point de* $D(t)$ *est inversé par chaque symétrie qui inverse* t *, et commute avec chaque transvexion qui commute avec* t *;*
(ii) *l'élévation au carré est une bijection de* T_0 *dans* T_0 *;*
(iii) *si* x *et* y *sont à la fois dans* T_s *et dans* $T_{s'}$*, leur milieu au sens de* T_s *est le même que leur milieu au sens de* $T_{s'}$;
(iv) *si le produit de trois symétries est une involution, c'est une symétrie ;*
(v) T_s *est formé des transvexions primaires inversées par* s *;*
(vi) *l'intersection des* T_s *est un groupe, appellé* microcentre *de* T *, qui est formé des transvexions primaires centrales dans* T .

Démonstration. (i) Dans le cas ω-stable, si t , étant de la forme $t = s.s'$, est inversé par la symétrie s , $D(s,s')$ est nécessairement $D(t)$ le groupe cherché : on voit que sa définition ne dépend pas de la symétrie s qui inverse t ; en effet, si s'' est une autre symétrie inversant t , l'intersection de $D(t)$ et de l'espace symétrique $T_{s''}$ est un groupe, égal à $D(t)$: il est bien inversé par chaque symétrie qui inverse t . Les points de $D(t)$ qui commutent avec tous les points de T_n qui commutent avec t forment un groupe définissable, égal à $D(t)$.

Si t est d'ordre fini le groupe qu'il engendre est inclus dans T_s ; il est d'ordre impair puisque ce dernier ne contient pas d'involutions.
(ii) Soient t un point de T_0 , et t' une de ses racines carrées dans T_0 ; comme $D(t)$ est contenu dans $D(t')$, et qu'il s'agit de groupes uniquement 2-divisibles, t' est l'unique racine carrée de t contenue dans $D(t)$; en fait $D(t) = D(t')$.
(iii) $z.x^{-1}.z = y$ signifie que $(z.x^{-1})^2 = yx^{-1}$; si x , y et z sont dans le même T_s , yx^{-1} est dans T_0 , et n'a qu'une seule racine carrée dans T_0 .
(iv) si $s.s_1.s_2$ est une involution i , c'est que s conjugue $s_1.s_2$ et son inverse $s_2.s_1$; elle conjugue également sur son inverse l'unique racine carrée de $s_1.s_2$ contenue dans T_0 , si bien que i est conjuguée de s ;

(v) d'après (iv), si s inverse $s_1.s_2$, $s.s_1.s_2$ est une symétrie ;

(vi) d'après (v), cette intersection est centrale dans T ; étant un symétron commutatif définissable, c'est un groupe ; si $s_1.s_2$ commute avec $s.s_1$ il est inversé par s : en effet, $s_1.s_2 = s.s_1.s_1.s_2.s_1.s = s_1.s_2.s_1.s$. **Fin**

Dans un symétron ω-stable, quand on retranslate les $D(t)$ dans S , on voit que deux points a et b de S sont reliés par le sous-symétron abélien définissable $\Delta(s,s')$, où s et s' sont les symétries de centre respectifs a et b ; c'est ce qui justifie l'emploi dans P18 du mot *ensemble convexe* pour désigner les sous-symétrons. Par ailleurs, si on pose $\Gamma(s,s') = s.C(s,s')$, on obtient une famille uniforme de sous-symétrons abéliens définissables reliant les paires de points de S .

Question 7.5. *Est-ce-que tout symétron ω-stable infini contient un sous-symétron abélien définissable infini ?*

Après tout ce discours sur les involutions, nous ne pouvons plus taire un résultat classique de la théorie des groupes finis, le Théorème Z* de Glauberman, dans la démonstration duquel les tables de caractères jouent un rôle essentiel. Il est résumé dans le fait suivant :

Fait 7.6. [GLAUBERMAN 1966, Theorem 1] *Soient* G *un groupe fini et* N *son plus grand sous-groupe normal d'ordre impair. Alors, pour qu'une involution* i *de* G *soit centrale modulo* N *, il suffit que chacun de ses commutateurs* $igig^{-1}$ *soit d'ordre impair.*

Corollaire 7.7. *Un symétron fini est régulier.*

Démonstration. On se place dans le groupe $G = sT$ engendré par les symétries. Si i est une symétrie, $j = gig^{-1}$ en est une autre, et nous avons vu que le groupe engendré par ij est d'ordre impair. Alternativement, $(ij)^n = i.kjk^{-1}$ ou $(ij)^n = i.kik^{-1}$, où k est dans le groupe engendré par i et j , et si $(ij)^n$ était une involution, i commuterait avec une de ses conjuguées distincte d'elle-même. Donc les symétries sont centrales modulo N , et comme elles sont conjuguées, elles sont égales modulo N , et $N = T$. **Fin**

Ce Corollaire 7.7 signifie que tout symétron fini est un sous-symétron d'un symétron groupique (fini !) ; [P18] donne un exemple de symétron fini qui n'est pas groupique.

Remarque 7.8. Le Théorème de Glauberman est un peu plus fort que le Corollaire 7.7. Considérons en effet un groupe G fini contenant un ensemble d'involutions I clos par conjugaison, et tel que deux de ses points distincts ne commutent jamais ; cette condition signifie que l'espace symétrique I satisfait la condition (i) du Lemme 4.1, et donc que c'est un symétron. Elle signifie aussi que, quels que soient i et j dans I , le groupe engendré par $i.j$ ne contient pas d'involutions (en effet, s'il en contenait une c , $i.c$ serait une conjuguée de j commutant avec i), condition impliquant que i et j sont conjuguées dans le groupe qu'elles engendrent.

Le Théorème de Glauberman affirme qu'il n'y a pas d'involutions dans le groupe H engendré par les ij , tandis que le Corollaire 7.7 affirme seulement qu'il n'y en a pas dans le quotient de H par son centre, qui n'est pas toujours trivial (voir l'Exemple 2 de P21 - il faut ajouter à la fin que a est central - repris dans l'Exemple 8.6). Dans le but de dénoncer cette situation, on se ramène par un quotient au cas ou le 2-sylow de H est réduit à une involution centrale ; si on se permet d'utiliser le Théorème de Feit et Thompson, ce qui est totalement incongru dans ce contexte, H est résoluble, et on voit que ses éléments d'ordre impair forme un groupe, d'où contradiction.

Plus généralement, si G est de rang de Morley fini et I est un ensemble d'involutions définissable et clos par conjugaison, le sous-groupe H engendré par I est définissable d'après le Lemme 2.1 (car $I \cup \{1\}$ est un espace symétrique) ; pour la même raison, I forme un symétron, c'est-à-dire que deux points de I distincts ne commutent pas, si et seulement si le plus petit sous-groupe définissable contenant le produit ij de deux points i et j de I n'a pas d'involutions.

La généralisation du Théorème Z* de Glauberman se pose donc exactement en ces termes (à comparer avec BOROVIK-NESIN 1994, p. 355) :

Question 7.9. *Si* I *est un sous-ensemble définissable d'involutions formant symétron du groupe* G *de rang de Morley fini, est-ce que le dérivé du groupe engendré par* I *peut contenir des involutions ?*

La conclusion de cette section, c'est que quand on tombe sur un symétron ω-stable, et en particulier un symétron de rang de Morley fini, les deux premières questions à se poser sont les suivantes :

1. Est-il borné ?
2. A-t-il des transvexions involutives ?

D'après [P21], un symétron de rang de Morley fini borné avec des transvexions involutives contredit la Conjecture d'Algébricité. Par contre, c'est peut-être faisable de trouver un symétron non-borné de rang de Morley fini, et même constructible dans un corps algébriquement clos.

Un cas particulier extrême de la Question 7.9 est le suivant :

3. Est-il possible qu'une symétrie soit égale à une transvexion, hormis le cas où le symétron est vide ou réduit à un point ?

Voici comment cette question s'interprète dans le cas borné (voir P23a, Remarques.2.ii, ainsi que notre Proposition 8.6) :

Proposition 7.10. *Dans un symétron borné* ω*-stable, les symétries sont des transvexions si et seulement si le groupe des symétrie-transvexions est connexe.*

Démonstration. Soit S notre symétron ; le groupe $G = sT$ engendré par les symétries est définissable, ainsi que son dérivé T, le groupe des transvexions.

Si G est connexe, T ne peut être d'indice 2 dans G, et $G = T$ (c'est ce qui se produit quand S est réduit à un point, unique cas où les symétries ne sont pas des involutions).

Si G n'est pas connexe, les symétries ne sont pas dans G°, et restent donc des involutions modulo G° ; si i et j sont des symétries modulo G°, le groupe engendré par leur produit ij est 2-divisible, et donc d'ordre impair ; d'après le Fait 7.6 elles sont égales modulo le plus grand sous-groupe N normal sans involutions de $G/G°$ (le Corollaire 7.7 ne suffit pas, car il n'est pas certain que N soit le groupe des transvexions de leur symétron) ; G a donc un sous-groupe d'indice 2 , qui ne peut être que T . **Fin**

8. Composantes connexes, symétrons définis par des données génériques

Définition 8.1. [Z22] *Une partie d'un symétron est dite* indécomposable *si, chaque fois qu'elle est contenue dans une réunion d'un nombre fini de sous-symétrons définissables deux-à-deux disjoints, elle est incluse dans l'un d'entre eux.*

Par une simple application du Lemme de König, et de la condition de chaîne sur les sous-symétrons définissables, on obtient :

Lemme 8.2. *Dans un symétron ω-stable, tout sous-ensemble définissable se partitionne en un nombre fini de sous-ensembles définissables indécomposables.*

Lemme 8.3. *Dans un symétron ω-stable, tout sous-symétron définissable S non vide se décompose de manière unique en une réunion de sous-symétrons définissables indécomposables non vides deux-à-deux disjoints, qu'on appelle ses composantes connexes (ou composantes irréductibles) ; elles sont en nombre impair, et les symétries centrées en S les permutent ; elles ont toutes même rang de Morley que S .*

Démonstration. Le Lemme de König, combiné avec le fait que l'intersection de deux symétrons est un symétron, montre l'existence d'une telle décomposition $S = A_1 \cup ... \cup A_m$; considérons une autre décomposition $S = B_1 \cup ... \cup B_n$; A_1 doit être inclus dans un des B_j , qui lui-même est inclus dans l'un des A_i , qui ne peut être que A_1 ; autrement dit les A_i et les B_j sont les mêmes à permutation près.

Comme les symétries sont des automorphismes de symétrons, celles qui sont centrées en S permutent les composantes de S . Une symétrie centrée sur un point a de A_1 fixe A_1 ; elle ne peut fixer une autre composante A_2 , car a n'est pas le milieu de deux points de A_2 , d'où l'imparité du nombre de composantes. Par contre la symétrie centrée sur le milieu d'un point de A_1 et d'un point de A_2 les échange. **Fin**

Nous pouvons faire agir les symétries du symétrons S sur l'ensemble des types sur S : si p est un type complet en une variable au-dessus de S , et a un point de S , $s_a(p)$ est le type de $s(x,a)$ quand x est une réalisation de p . Nous notons $Sym(p)$ l'ensemble des points de S dont la symétrie associée fixe p , $Sym(p \leftrightarrow q)$ ceux dont la symétrie échange p et q , et $Sym(p_1, \ldots p_n)$ ceux dont la symétrie permute les p_i . Quand S est ω-stable, il s'agit de sous-symétrons de S définissables, puisque les types le sont.

Nous appelons *types génériques* d'un symétron ω-stable ceux dont le rang de Morley est maximum.

Lemme 8.4. [P21] *Si* p *et* q *sont deux types génériques d'un symétron* ω-*stable,* $\mathrm{Sym}(p \leftrightarrow q)$ *n'est pas vide.*

Démonstration. Réalisons p en x et q en y de manière indépendante au-dessus de S ; si m est le milieu de x et de y , y et m sont codéfinissables au-dessus de x , si bien que x et m sont indépendants au-dessu∪s de S , dans lequel le type de m sur $S \cup \{x\}$ est finiment réalisable : cela permet, grâce à des formules de degré de Morley un, l'une satisfaite par p , l'autre par q , de trouver dans S un point de $\mathrm{Sym}(p \leftrightarrow q)$. **Fin**

Corollaire 8.5. [P21] *Dans un symétron* ω-*stable, le degré de Morley d'un sous-symétron définissable est son nombre de composantes connexes : un sous-symétron est irréductible (on dit aussi : connexe) si et seulement si son degré de Morley vaut un.*

Démonstration. Il est clair qu'il y a au moins autant de types génériques que de composantes ; par ailleurs, si p_1 , ... p_d sont les types génériques de S , ce dernier est la réunion des d sous-symétrons non vides et disjoints $\mathrm{Sym}(p_1 \leftrightarrow p_1)$, ... $\mathrm{Sym}(p_1 \leftrightarrow p_d)$. **Fin**

Dans un groupe ω-stable, un sous-groupe définissable connexe est aussi connexe en tant que symétron, puisque son degré de Morley vaut un.

La ressemblance entre les groupes stables et les symétrons ω-stables, ne s'arrête pas là : il est montré dans P21 qu'une formule φ est générique, c'est-à-dire de rang de Morley maximum, si et seulement si S est recouvert par un nombre fini de translatées de φ par des transvexions primaires, et aussi que chaque sous-symétron définissable est le symétriseur $\mathrm{Sym}(p_1, \dots p_d)$ de ses types génériques.

Proposition 8.6. *Un symétron* ω-*stable borné est connexe si et seulement si son groupe de transvexions est connexe.*

Démonstration. Si la symétrie s'' est le milieu des symétries s et s' , $s''.s$ conjugue s et s' ; par conséquent le groupe T agit transitivement sur S , ainsi que sur ses composantes connexes, si bien que si T est connexe il n'y en a qu'une. Réciproquement, chaque cossette modulo T° intersecte T_s en un symétron ; si T_s est connexe, toutes ces intersections sauf une sont vides ; comme T_s contient l'élément neutre, il est inclus dans T° , et comme il engendre T , $T = T^\circ$. **Fin**

Dans un symétron de rang de Morley fini, quand on réalise de manière indépendante en x et en y deux types stationnaires p et q de rang n, leur milieu $m(x,y)$ a un rang $\geq n$; quand ce rang vaut n, cela veut dire que le sous-symétron (définissable) $Sym(p\leftrightarrow q)$ des points qui échangent les types p et q est de rang de Morley n.

Le théorème parallèle dans le cas des groupes de rang de Morley fini est que, si $RM(y^{-1}.x) = n$, le stabilisateur par translation à gauche de p est de rang n, les y translatant p sur q formant une cossette modulo ce groupe.

Cette remarque permet de court-circuiter les calculs de FRÉCON 2018 dans son groupe paradoxal de rang trois : les commutateur permettent de définir deux types p et q de rang deux dont le milieu ne peut être générique ; il est donc de rang deux, ce qui produit un sous-symétron de rang deux, qui définit un automorphisme involutif dont l'existence est impossible (P18). Elle montre également la limite de l'argument de Frécon : si le rang est quatre, le milieu de p et de q est de rang trois, et il n'y a plus de paradoxe.

Si donc on vit à l'intérieur d'un symétron, des données génériques suffisent à déterminer un sous-symétron définissable. Mais que se passe-t-il si on ne dispose pas d'un symétron enveloppant ? A-t-on un théorème de Weil-Hrushovski pour les symétrons ? Autrement dit :

Question 8.7. [P24] *Considérons, dans une structure de rang de Morley fini (ou peut-être seulement* ω*-stable), un ensemble définissable* S *de degré de Morley un muni d'une fonction binaire* $s(x,y)$ *satisfaisant génériquement aux équations* (ii)*,* (iii) *et* (iv) *;* (S,s) *est-il génériquement isomorphe à un symétron définissable ?*

On remarque que, si x, y et z sont génériques indépendants, ces équations n'appliquent la symétrie qu'à des couples génériques indépendants ; c'est pour cela qu'il faut remplacer (i) par (iv).

Et notons que GRISHKOV-NAGY 2011 donnent un contre-exemple au Théorème de Weil pour une K-boucle partielle 2-divisible non uniquement, où chaque point a deux racines carrées.

9. Génération elliptique dans les symétrons de rang de Morley fini

Dans un symétron, nous dirons que le sous-symétron S_1 est elliptiquement engendré par X si chacun de ses points s'obtient en n étapes à partir de X par application des fonctions $s(x,y)$ et $m(x,y)$, où n est un nombre fixé.

Nous expliquons dans cette section ce que deviennent dans le cas des symétrons les théorèmes de génération elliptique valables dans les groupes de rang de Morley fini.

Théorème des Indécomposables, 9.1. [Z22] *Dans un symétron de rang de Morley fini :*
(i) *tout ensemble indécomposable non vide engendre un sous-symétron connexe, et ce de façon elliptique ;*

(ii) *en particulier, deux sous-symétrons définissables connexes d'intersection non vide engendrent un sous-symétron définissable connexe, et ce de façon elliptique ;*
(iii) *plus généralement, si les* X_i *forment une famille quelconque d'ensembles indécomposables deux-à-deux non disjoints, ils engendrent un symétron définissable connexe, qui est en fait elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre eux.*

Démonstration. (i) On considère un type p, de rang de Morley maximal, dont la variable x s'exprime par une succession de symétries et de prises de milieu à partir de points dans X, ce qui se traduit par une formule $\varphi(x)$ satisfaite par p ; soit $\psi(x)$ la formule déclarant que $s_y(x)$ satisfait φ pour un y de X ; l'hypothèse implique que les types q_1, ... q_n de rang maximal satisfaisant ψ ont même rang que p. Par conséquent X est inclus dans $\mathrm{Sym}(p\leftrightarrow q_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Sym}(p\leftrightarrow q_n)$, et comme il est irréductible, il est dans un seul d'entre eux : quel que soit a dans X, ce dernier est inclus dans $C = \mathrm{Sym}(p\leftrightarrow q)$ où $q = s_a(p)$. Tout point de C est au milieu d'un point satisfaisant φ et d'un point satisfaisant ψ, si bien que C est le symétron engendré par x, et que cette génération est elliptique. Comme X est inclus dans une composante connexe de C, ce dernier n'en a qu'une, et en fait $p = q$.
(ii) La réunion des deux sous-symétrons est indécomposable.
(iii) On remplace chaque X_i par le symétron qu'il engendre et on itère (ii). **Fin**

Définition 9.2. *On appelle* composante *du symétron engendré par l'ensemble définissable* X *un sous-symétron connexe définissable maximal elliptiquement engendré par* X. *Plus généralement, on appelle* composante *du symétron engendré par une famille d'ensembles définissables* X_i *un sous-symétron connexe définissable maximal elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre eux.*

Théorème sans Indécomposables, 9.3. [P24] (i) *Soient* S *un symétron de rang de Morley fini et* X *un sous-ensemble de* S *définissable et non vide. Alors, le sous-symétron de* S *engendré par* X *est réunion de ses composantes ; celles-ci sont deux-à-deux disjointes, se correspondent par symétrie, et* X *est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'entre elles.*
(ii) *Soient* S *un symétron de rang de Morley fini et* X_i *une famille de sous-ensembles de* S *définissables non vides. Alors, le sous-symétron de* S *engendré par les* X_i *est réunion de ses composantes ; celles-ci sont deux-à-deux disjointes, se correspondent par symétrie, et chaque* X_i *est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'entre elles.*

Démonstration. (i) D'après 9.1.(ii) deux composantes non disjointes sont égales ; par ailleurs pour chaque a du symétron Σ engendré par X, le singleton $\{a\}$ est un symétron définissable connexe elliptiquement engendré par X, et il s'étend en un tel symétron maximal, c'est-à-dire une composante.

Si a est un point de la composante C et a' un point de la composante C', la symétrie ayant pour centre le milieu m de a et de a' échange C et C'.

D'après le Lemme 8.2, X est réunion d'un nombre fini de sous-ensembles indécomposables ; d'après 9.1.(i), chacun d'eux engendre un symétron connexe, contenu dans une seule composante.
(ii) se démontre de la même façon. **Fin**

10. Symétrons localement finis et pseudo-localement-finis

On dira que le symétron S est *localement fini* si et seulement si chaque partie finie de S engendre un sous-espace symétrique fini, qui est en fait un symétron (Corollaire 6.3) ; il est *pseudo-localement-fini* si c'est un modèle de la théorie des symétrons localement finis, c'est-à-dire si tout énoncé auquel il satisfait est satisfait dans un symétron localement fini.

Proposition 10.1. [P21] *Un symétron est localement fini si et seulement si son groupe de transvexions est localement fini.*

Démonstration. Si T est localement fini, pour toute symétrie s, chaque partie finie de T_s engendre un groupe fini, qui contient le symétron qu'elle engendre.

Supposons maintenant S, soit encore T_s, localement fini ; comme T_s engendre le groupe T, toute partie finie de T est contenue dans le groupe engendré par une partie finie de T_s, à laquelle on adjoint l'élément neutre ; elle engendre par hypothèse un sous-espace symétrique fini de T_s, qui d'après le Lemme 2.1 engendre un sous-groupe fini de T. **Fin**

Corollaire 10.2. [P21] (i) U*n symétron localement fini est régulier.*
(ii) *Le groupe des transvexions d'un symétron pseudo-localement-fini ne contient pas d'involutions ; plus précisément l'élévation au carré y est injective.*
(iii) *Un symétron borné pseudo-localement-fini est régulier.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas localement fini. Si la transvexion t, produit de $s_1, \dots s_{2^n}$, n'est pas l'identité, elle ne commute pas avec une certaine symétrie s, et si par ailleurs son carré vaut l'identité, il commute avec s, $s_1, \dots s_{2^n}$; le théorème de Glauberman appliqué au symétron fini engendré par ces symétries montre que c'est impossible. Comme T n'a pas d'involutions et est localement fini, il est uniquement 2-divisible.

Pour le reste, on remarque que les énoncés qui, à n fixé, déclarent que T_n ne contient pas d'involutions, ni de points ayant deux racines carrées dans T_n, sont élémentaires. **Fin**

A propos de 10.2(ii), on reverra le Corollaire 5.4.

Proposition 10.3. (i) *Un symétron* ω*-stable est borné si et seulement si la suite des rangs/degrés de Morley des* T_n *stationne à partir d'un certain indice.*
(ii) *Si de plus le symétron est localement fini, il suffit que la suite des rangs de Morley stationne.*

Démonstration. (i) Si le symétron est borné, c'est la suite des ensembles T_n elle-même qui stationne. Supposons réciproquement que $RM(T_{m+3}) = RM(T_m)$,

et $d°M(T_{m+3}) = d°M(T_m)$; alors, pour tout t de T_{m+2} , $t.T_m$, qui est inclus dans T_{m+3} , n'est pas disjoint de T_m , si bien que t est produit de deux points de T_m ; autrement dit $T_{m+2} = T_{m+1}$ et la suite des T_n stationne à partir de $m+1$.
(ii) Supposons que $RM(T_{m+3}) = RM(T_m)$ pour un certain m , et considérons un ensemble maximal $\{a_1, \ldots a_p\}$ de points de T_{m+2} tels que $a_1.T_m$, ... $a_p.T_m$ forment des parties deux-à-deux disjointes de T_{m+3} ; pour tout t de T_{m+2} , $t.T_m$ intersecte un certain $a_i.T_m$, c'est à-dire que $t \in a_i.T_{m+1}$ puisque T_m est clos par inversion. Autrement dit $T_{m+2} \subseteq a_1.T_{m+1} \cup \ldots \cup a_p.T_{m+1}$.

On en déduit que T_{m+3} est inclus dans la réunion des $a_i.T_{m+1}.a_j.T_{m+1}$, c'est-à-dire des $a_i.a_j.a_j^{-1}.T_{m+1}.a_j.T_{m+1} = a_i.a_j.T_{m+1}.T_{m+1} = a_i.a_j.T_{m+2}$ puisque T_{m+1} est normal dans T ; finalement T_{m+3} est inclus dans la réunion des $a_i.a_j.a_k.T_{m+1}$.

En répétant, on montre que T_{m+n+1} est inclus dans la réunion des $a.T_{m+1}$, où a est un produit de a_i de longueur $2^n - 1$; cela borne leur rang de Morley, et quand le symétron est localement fini cela borne aussi leur degré de Morley.

Cette démonstration ne demande pas de propriétés d'additivité du rang de Morley. **Fin**

11. Symétrons algébriques et constructibles

Nous dirons qu'un symétron est *constructible* s'il est définissable dans un corps nu algébriquement clos ; comme toute les structures constructibles, il est pseudo-localement-fini (P21 ; et même localement fini si le corps de base est la clôture algébrique d'un corps fini) ; j'aimerais bien en connaître un qui ne soit pas borné.

Ceux qui sont bornés ne font pas grand mystère : ce sont les sous-ensemble connexes constructibles d'un groupe algébrique sans involutions (ce qui généralise la propriété analogue des symétrons finis).

En effet, il est connu, et même démontré dans POIZAT 1987, qu'un groupe constructible est constructiblement isomorphe à un groupe algébrique ; cela demande le Théorème de Weil (VAN DEN DRIES 1982, HRUSHOVSKI 1986, POIZAT 1987). On peut se poser la même question pour les symétrons, à condition de préciser ce qu'on entend par *symétron algébrique* ; le minimum est que la base du symétron soit une variété, et que la fonction $s(x,y)$ soit un morphisme ; exiger que le milieu $m(x,y)$ soit un morphisme est trop fort en caractéristique 2 , car alors, dans le groupe K^* , $m(1,x) = x^{1/2}$ n'est qu'un quasi-morphisme.

Ce n'est pas être bien dur pour les symétrons bornés, dont le T est un groupe algébrique sans involutions, qui est par conséquent résoluble ; comme la clôture de Zariski de T_s est close par symétrie, et a même rang et même degré de Morley que son sous-symétron T_s , elle lui est égale : T_s est Zariski-clos, et $s(x,y) = y.x^{-1}.y$ est un morphisme. Le milieu est un morphisme si $x^{1/2}$ est un morphisme, ce qui se montre en caractéristique $\neq 2$ en remarquant qu'alors $T°$ est linéaire unipotent : si la caractéristique est finie, T est un groupe d'exposant fini impair n , et la racine carrée est x^m où m est l'inverse de 2 modulo n ;

en caractéristique nulle, logarithme et exponentielle sont des polynômes bijectifs échangeant matrices unipotentes et matrices nilpotentes, ce qui permet de transformer l'extraction de racine carrée en multiplication par $\frac{1}{2}$. En caractéristique 2 , $T°$ est produit d'un tore et de variétés abéliennes, où la racine carrée est quasi-algébrique.

Remarque 11.1. Les sous-ensembles convexes constructibles d'un groupe algébrique ne sont pas toujours Zariski-clos ; par exemple, la clôture de Zariski de l'ensemble des involutions contient souvent l'élément neutre.

Pour nous résumer :

Question 11.2. *Existe-t-il des symétrons constructibles, voire des symétrons constructibles commutatifs, qui ne soient pas bornés, et même dont le groupe de transvexions ne soit pas divisible par* 2 *?*

Question 11.3. *Est-ce que tout symétron constructible est constructiblement isomorphe à un symétron algébrique ?*

12. Matrices symétriques réelles

Dans cet article, l' ω-stabilité est admise comme hypothèse minimale permettant de développer une théorie des symétrons, car elle assure que les groupes définissables sans involutions sont uniquement 2-divisibles ; il est possible que l'o-minimalité le permette aussi, ce qui justifie une petite incursion dans la géométrie réelle.

Elle est d'ailleurs inévitable car c'est un fait bien connu que les matrices symétriques réelles définies-positives, c'est-à-dire celles dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, forment un symétron. Nous allons décrire ici ce sous-espace symétrique du groupe linéaire $GL_2(R)$ sur un corps réel-clos R . Notre but n'est que de donner un exemple de symétron borné avec des transvexions involutives, ce qui nous dispense de généraliser cette étude aux plus grandes dimensions.

Nous notons $M(x,y;z,t)$ la matrice dont les coefficients sont $m_{11} = x$, $m_{22} = y$, $m_{12} = z$, $m_{21} = t$.

Une involution de $GL_2(R)$ ne peut avoir que 1 et -1 comme valeurs propres ; si elle possède les deux, elle est diagonalisable et son déterminant vaut -1 ; si sa valeur propre est double, en la mettant sous forme triangulaire on voit que c'est la matrice $-I = M(-1,-1;0,0)$, dont le déterminant vaut 1 .

Une matrice d'ordre 4 doit avoir i ou $-i$ comme valeur propre complexe, et comme elle est réelle elle a les deux : ce qui caractérise cette propriété, c'est que sa trace est nulle et son déterminant vaut 1 .

On sait que $(M.N)^t = N^t.M^t$, quand t est la *transposition,* c'est-à-dire la symétrie par rapport à la diagonale ; M et M^t ont le même déterminant, et en fait le même polynôme caractéristique $\det(M - \lambda.I)$, c'est à dire les mêmes valeurs propres ; si M est inversible, $M.M^{-1} = I$, $(M^{-1})^t.M^t = I$, si bien que l'inverse de M^t est la transposée de M^{-1} . On observe aussi que le produit de deux matrices symétriques (c'est-à-dire égales à leurs transposées) est symétrique seulement si elles commutent.

Une matrice est dite orthogonale si son inverse est égale à sa transposée ; cela signifie que le produit scalaire $\langle x,y\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2$ de deux de ses colonnes distinctes est nul, tandis que le carré scalaire de chaque colonne vaut 1 ; même chose pour les lignes. Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1 . Ces matrices forment un sous-groupe de $GL_2(R)$.

Les matrices symétriques inversibles forment un sous-espace symétrique de $GL_2(R)$, qui est normalisé par le groupe orthogonal. Si $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ sont deux vecteurs propres de la matrice symétrique M pour des valeurs propres distinctes $\lambda \neq \mu$, leur produit scalaire $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ est nul ; en effet, le produit de la ligne de coordonnées de x par la matrice M , puis par la colonne de coordonnées de y , vaut à la fois $\lambda.\langle x,y\rangle$ et $\mu.\langle x,y\rangle$.

Le discriminant du polynôme caractéristique $\lambda^2 - (x+y).\lambda + xy - z^2$ de la matrice $M(x,y;z,z)$ vaut $(x-y)^2 + 4z^2$; il n'est nul que si la matrice est scalaire ; sinon, ses deux valeurs propres sont réelles et distinctes ; elle est alors diagonalisable grâce à une conjugaison par une matrice orthogonale. On dit qu'elle est *définie positive* si ses deux valeurs propres sont strictement positives, ce qui signifie que son déterminant $xy - z^2$ et sa trace $x+y$ le sont ; en effet, si le déterminant est positif, les valeurs propres ont même signe, qui est celui de la trace ; en fait, cette condition implique que x et y sont strictement positives.

Un calcul aisé montre que l'ensemble $Sym(+)$ des matrices réelles symétriques définies positives est un sous-espace symétrique de $GL_2(R)$, calcul d'autant plus rapide qu'un changement de base orthonormée permet de supposer que l'une des matrices est diagonale ; il en est de même de l'ensemble $Sym(+,1)$ de celles d'entre elles dont le déterminant vaut 1 .

Lemme 12.1. *Chaque point de* $SL_2(R)$ *est produit de* 16 *points de* $Sym(+,1)$.

Démonstration. Pour $x > 0$, le produit de $M(x,x+x^{-1};x,x)$ par $M(x,x+x^{-1};-x,-x)$ vaut $M(0,2+x^{-2};1-,1)$; autrement dit, pour $a > 2$, $M(0,a;1,-1)$ est produit de deux matrices dans $Sym(+,1)$; en multipliant $M(0,a;1,-1)$ par $M(b,0;1,-1)$ on exprime $M(1,1;0,a-b)$, c'est-à-dire n'importe quelle matrice unipotente triangulaire inférieure, comme produit de 4 matrices dans $Sym(+,1)$; puis en multipliant des matrices unipotentes triangulaires inférieure et supérieure, on exprime comme produit de 8 matrices de $Sym(+,1)$ toute matrice de déterminant 1 qui a un 1 sur la diagonale ; chaque matrice de $SL_2(R)$ est produit de deux matrices satisfaisant à cette condition. **Fin**

Proposition 12.2. $Sym(+,1)$ *est un symétron borné, dont le groupe de transvexions est isomorphe à* $PSL_2(R)$ *; il contient des involutions.*

Démonstration. Comme une matrice diagonalisable commute avec son carré, elles se diagonalisent dans les mêmes bases ; par conséquent chaque matrice de $Sym(+)$ a une unique racine carrée dans $Sym(+)$, dont les valeurs propres sont les racines carrées positives des siennes.

On vérifie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation : $M(a,b;c,c) = M(x,y;z,z).M(d,e;f,f).M(x,y;z,z)$ quand les matrices sont dans $Sym(+)$; au prix d'un changement de base orthonormé, on peut supposer que la deuxième matrice est diagonale, c'est-à-dire que $f = 0$. La condition s'écrit alors $M(ad,be;c(de)^{1/2},c(de)^{1/2}) = M(xd,ye;z(de)^2,z(de)^{1/2})^2$, et la conclusion suit du point précédent. Si les matrices-coefficents ont pour déterminant 1 , celui de la matrice inconnue est nécessairement la racine carrée positive de 1 .

Une transvexion de $Sym(+,1)$ s'écrit $M_1. \ldots .M_n.X.M_n. \ldots .M_1$ où M_1 , … M_n sont symétriques définies-positives de déterminant 1 , soit encore $M.X.M^t$ où M est dans le groupe $SL_2(R)$ engendré par $Sym(+,1)$; en posant $X = I$, on voit que le noyau de cette action est formé de matrices orthogonales, qui sont scalaires car elles doivent respecter toutes les droites propres possibles ; il s'agit donc de I et de $-I$, et c'est bien une action de $PSL_2(R)$.

Ce dernier contient des involutions, provenant des points d'ordre 4 de $SL_2(R)$. **Fin**

Comme tout point de $Sym(+)$ est produit d'un point de $Sym(+,1)$ par une matrice scalaire positive, on voit que $Sym(+)$ est aussi un symétron ; son groupe de transvexions est formé des matrices de déterminant positif quotienté par $\{I,-I\}$.

Remarques 12.3. (i) Le passage au quotient par $\{I,-I\}$ définit une injection de $Sym(+,1)$ dans $PSL_2(R)$, dont l'image est T_I associé à la symétrie de centre I , c'est-à-dire l'inversion.
(ii) De même que R^* se divise en nombres positifs et en nombres négatifs, l'espace des matrices symétriques de déterminant positif, ainsi que celui des matrices de déterminant 1 , se divisent entre définies-négatives et définies-positives ; ce sont des symétrons isomorphes, translatés l'un de l'autre par $-I$.
(iii) Quand R est le corps des réels, l'application exponentielle définit une bijection entre les matrices symétriques de trace nulle et les matrices symétriques définies positives de déterminant 1 .
(iv) Quand K est algébriquement clos, $PSL_2(K)$ est le groupe des transvexions de l'espace des matrices symétriques de déterminant 1 , qui, bien sûr, n'est pas un symétron.

13. Congruences de symétrons ω-stables

La grande faiblesse de P21, c'est l'absence de traitement des congruences de symétrons ; nous allons voir qu'il présente quelques difficultés, ce qui explique pourquoi nous avons évité de faire appel jusqu'à présent à des quotients de symétrons dans nos démonstrations. En fait, la première vraie étude de ces congruences dans le cas ω-stable a été entreprise dans [Z22], en s'appuyant sur des résultats inconfortables, mais connus, à propos des congruences de boucles.

Définition 13.1. *Nous dirons qu'une relation d'équivalence* $\sim$ *entre éléments du symétron* S *est une* congruence *si symétrie et milieu passent au quotient, c'est-à-dire que* $x \sim x'$ *et* $y \sim y'$ *implique* $s(x,y) \sim s(x',y')$ *et* $m(x,y) \sim m(x',y')$.

Comme les symétrons forment une variété dans ce langage, le quotient $S/\sim$ est aussi un symétron.

Puisque le milieu est symétrique, la condition de congruence se décompose en trois sous-conditions :

(i) $x \sim x'$ implique $s(x,y) \sim s(x',y)$ (ii) $y \sim y'$ implique $s(x,y) \sim s(x,y')$
(iii) $x \sim x'$ implique $m(x,y) \sim m(x',y)$.

Si $\sim$ vérifie (i), nous dirons qu'elle est une *demi-congruence* ; cela signifie que chaque symétrie est un automorphisme de $\sim$; ses classes sont alors des sous-symétrons, et si m est le milieu d'un point de la classe C et d'un point de la classe C', la symétrie de centre m échange C et C' ; par conséquent la relation $\sim$ est entièrement déterminée par une de ses classes C, car ses autres classes sont les images de C par les symétries.

Définition 13.2. *Nous dirons qu'un sous-symétron est* partitionnel *si ses symétriques forment une partition de* S *, qu'il est* semi-normal *s'il est une classe d'une demi-congruence, et qu'il est* normal *si cette demi-congruence est une congruence.*

Un sous-symétron S' est égal à $s_y(S')$ ou disjoint de ce dernier suivant que le centre y de la symétrie lui appartient ou pas, mais cela ne signifie pas que ses symétriques soit égaux ou disjoints. Il est partitionnel précisément quand, pour tous a et b dans S, $s_a(S')$ et $s_b(S')$ sont égaux ou disjoints ; dans ce cas, son symétrique $s_a(S')$ est aussi partitionnel, mais il peut définir une autre partition ; S' est semi-normal précisément quand la partition qui lui est associée est invariante par chaque symétrie.

Comme une conjonction de demi-congruences en est une, tout sous-symétron S' est inclus dans un sous-symétron semi-normal minimal, qu'on nommera sa *clôture semi-normale* ; on définit de même sa *clôture normale*.

Exemple 13.3. Soient G un groupe uniquement 2-divisible, et H un sous-groupe normal de G clos par racine carrée ; comme $g.H.g = g^2.g^{-1} Hg = g^2.H = H.g^2$, H est partitionnel, puisque ses symétriques sont les cossettes modulo H. Il est même semi-normal en tant que symétron, car la symétrie $s(x,y)$ passe au quotient modulo H, c'est-à-dire que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites par cette congruence de groupes ; pour ce qui est de la condition (iii), le milieu $m(x,y)$ ne passe au quotient que si G/H est uniquement 2-divisible, ce qui n'est pas certain bien que ce quotient soit un groupe 2-divisible sans involutions. C'est cependant le cas si G est ω-stable et H est définissable.

C'est aussi vrai si G est commutatif, et par conséquent tout sous-symétron d'un symétron abélien est normal, puisque qu'il correspond à une cossette modulo un sous-groupe 2-divisible de son groupe de transvexions.

Quand G est 2-nilpotent, comme il a même symétron que celui d'un groupe commutatif G^* défini sur le même ensemble (Exemple 5.7), H est un sous-symétron du groupe commutatif G^* , et comme il contient l'identité c'est en fait un sous-groupe clos par racine carrée de ce dernier. Il est donc normal en tant que symétron, qu'il soit normal ou non en tant que groupe.

Exemple 13.4. Nous considérons un corps K de caractéristique $\neq 2$, ayant un sous-groupe M multiplicatif uniquement 2-divisible non trivial ; on peut prendre K fini, ou bien le corps vert de rang de Morley 2 construit dans BHMPW 2009. Si G est le produit semi-direct de K^+ par M , nous allons vérifier que M n'est pas partitionnel dans G . Remarquons d'abord que, comme M est un sous-groupe de G , ses symétrisés sont des cossettes $a.M.a = a^2.a^{-1}Ma$ et l'intersection de deux d'entre elles est vide, ou bien est une cossette modulo un sous-groupe de G .

Et en effet, le symétrisé de $M = \{(0,\lambda)\}$ par (a,α) est formé des points qui s'écrivent $((1+\lambda\alpha^{-1}).a , \lambda)$; le symétrisé de M par (a,α) est égal à son symétrisé par (b,β) si $a = b = 0$, ou bien si $(a,\alpha) = (b,\beta)$; dans les autres cas, leur intersection a au plus un point, dont la coordonnée λ est l'unique solution d'une équation du premier degré. Pour garantir qu'elle soit dans M , le mieux est de la forcer à valoir 1 , et de constater que si, $a \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ et $(1+\alpha^{-1}).a = (1+\beta^{-1}).b$ l'intersection des symétrisés de M par (a,α) et par (b,β) se réduit à l'unique point $((1+\alpha^{-1}).a , 1)$.

Proposition 13.5. *Pour une demi-congruence définissable d'un symétron* ω-*stable, les conditions* (ii) *et* (iii) *sont équivalentes. En particulier, toute congruence pour la symétrie définissable est automatiquement une congruence pour le milieu.*

Démonstration. Si $\sim$ est une demi-congruence, toutes ses classes ont même rang de Morley et même degré de Morley ; soient C l'une d'entre elles, a un point du symétron, et supposons (iii) vérifiée ; $m(C,a)$ est donc contenue dans une classe C' ; si b est un point de C' , nous notons C'' la classe du point $s(a,b)$, image réciproque de b par la bijection $m(x,a)$; nous voyons que $m(C'',a)$ est aussi inclus dans $m(C,a)$; comme $m(x,a)$ est une bijection, il n'est pas possible que C et C'' soient disjointes, et $C = C''$; $m(x,a)$ définit donc une bijection entre C et C' , et la sous-condition (ii) est vérifiée.

Le même raisonnement vaut pour la bijection inverse $s(a,y)$. **Fin**

Proposition 13.6. *Un sous-symétron* C *est semi-normal si et seulement l'image de* C *par une tranvexion primaire est aussi son image par une certaine symétrie : pour tous* a *et* b *il existe* c *tel que* $s_a(s_b(C)) = s_c(C)$.

Démonstration. La condition est bien vérifiée si C est semi-normal, car les symétriques de C forment une partition préservée par les symétries.

Supposons la réciproque et considérons deux symétriques $D = s_a(C)$ et $D' = s_b(C)$ de C ; comme s_a est un automorphisme du symétron, D satisfait aussi à la condition, et il existe c tel que $D' = s_b(s_a(D)) = s_c(D)$; comme D est close par milieu, elle est disjointe de D' si c n'est pas dans D , et égale à D sinon. Nous avons donc montré que les symétriques de C forment une partition, c'est-à-dire que C est partitionnel. La condition implique que cette relation d'équivalence est conservée par symétrie. **Fin**

Corollaire 13.7. [P24] *Le sous-symétron non vide* C *est semi-normal si et seulement si, quels que soient les points* a *,* b *et* c *,* $s_a(s_b(s_c(C)))$ *est égal à* C *ou disjoint de* C *.*

Démonstration. La propriété est possédée par un sous-symétron C semi-normal, car alors $s_a(s_b(s_c(C)))$ et C sont des classes de la relation d'équivalence $\sim$ associée.

Réciproquement, on considère deux points a et b , un point x dans C et le milieu m de x et de $s_a(s_b(x))$; comme il ne sont pas disjoints, C et $s_m(s_a(s_b(C)))$ sont égaux, soit encore $s_m(C) = s_a(s_b(C))$. **Fin**

Proposition 13.8. *Dans un symétron commutatif, tout sous-symétron de trois points est partitionnel, mais pas nécessairement normal (ni, bien sûr, semi-normal !).*

Démonstration. On considère le sous-symétron $\Sigma = \{a, b, s(a,b)\}$, et deux points c et d tels que $S(a,c) = S(a,d) = e$, ou bien $S(a,c) = S(b,d) = e$; il faut vérifier que les images de Σ par les symétries de centre c et d sont égales ; or tout cela se passe dans le symétron engendré par a , b et c , dont nous savons qu'il est abélien, possèdant un, trois ou neuf points.

Considérons un point x dans un groupe G d'exposant 3 , et cherchons à quelle condition le symétron $\{1, x, x^{-1}\}$ est normal dans le symétron G , ce qui est équivalent à semi-normal puisque ce dernier est commutatif.

Pour cela, considérons son image $\{a, b, c\}$ par la composée de la symétrie de centre y et de celle de centre z : $a = zy^{-1}y^{-1}z = zyz$, $b = zy^{-1}xy^{-1}z$, $c = zy^{-1}x^{-1}y^{-1}z$. S'il est normal, la symétrie centrée sur le milieu de 1 et de a , qui vaut $a^{1/2} = a^2 = a^{-1}$, doit échanger les deux triangles, c'est-à-dire échanger x et b , ou bien échanger x et c .

Dans le premier cas, $(zyz)^{-1}x^{-1}(zyz)^{-1} = zy^{-1}xy^{-1}z$, soit encore $xzyz^{-1}y^{-1}x = z^{-1}y^{-1}zy$; mais en faisant commuter y et son conjugué, puis z et son conjugué, on voit que cette condition s'écrit $x[z,y]x = [z,y]$, et signifie que x est le milieu du commutateur de z et de y et de son inverse, c'est-à-dire que $x = 1$.

La deuxième condition s'écrit $x^{-1}[z,y]x = [z,y]$, soit encore que x commute avec le commutateur de z et de y .

Autrement dit, notre sous-symétron est normal si et seulement si x commute avec le dérivé de G . Or ce dernier est en général nilpotent de classe trois, mais pas de classe deux (cas où son symétron est abélien), ce qui nous donne des exemples où il n'est pas normal. On remarque qu'il est normal en tant que groupe seulement si x est central dans G , car un élément d'ordre 3 ne peut conjuguer x et x^{-1} si $x \neq 1$. **Fin**

Question 13.9. *Quel peut être le nombre d'éléments d'un symétron commutatif fini ? Si* S' *est un sous-symétron du symétron commutatif fini* S *, son ordre divise-t-il celui de* S *?*

Définition 13.10. *Si* $\sim$ *est une demi-congruence, nous appelons* renforcement *de* $\sim$ *la relation d'équivalence* $\sim^2$ *ainsi définie :* $a \sim^2 b$ *si* s_a *et* s_b *ont même action sur les classes modulo* $\sim$ *.*

Lemme 13.11. *Le renforcement de la demi-congruence* $\sim$ *est une demie-congruence qui raffine la relation d'équivalence* $\sim$ *; cette dernière est une congruence si et seulement si elle est égale à son renforcement.*

Démonstration. Comme $\sim$ est préservée par symétrie, son renforcement aussi. Si $x \sim^2 y$, il symétrisent tous deux la classe de x modulo $\sim$, et lui appartiennent puisqu'elle est close par milieu ; donc $x \sim y$. Dire que $\sim$ est égale à son renforcement, c'est dire que la classe modulo $\sim$ de $m(x,y)$ ne dépend que de la classe de x et de celle de y , ce qui signifie précisément que $\sim$ est une congruence. **Fin**

Dans le cas ω-stable, si on itère le renforcement on finit par tomber sur une congruence, mais on peut se demander si on gagne toujours du premier coup :

Question 13.12. *Est-ce que le renforcement est toujours une congruence ?*

Le corollaire suivant comble une lacune de [P21], où son énoncé est affirmé gratuitement :

Corollaire 13.13. [P24 ; affirmé sans démonstration dans P21 !] *La partition en composantes connexes d'un symétron* ω*-stable est une congruence.*

Démonstration. Elle est évidemment une demi-congruence ; comme elle n'a qu'un nombre fini de classes, son renforcement aussi ; comme il est définissable, le résultat suit de l'unicité de la décomposition en composantes connexes. **Fin**

Nous en venons maintenant à la définissabilité des clôtures normales et semi-normales d'un symétron définissable connexe, analogue au résultat de Zil'ber à propos du groupe engendré par les conjugués d'un sous-groupe connexe. Le théorème suivant est presque, mais malheureusement pas totalement, démontré dans [P24, Section 10, 2° théorème].

Théorème 13.14. *Soient* S *un symétron de rang de Morley fini et* A *une partie définissable non-vide et indécomposable de* S *; alors les sous-symétrons de* S *définissables, connexes, elliptiquement engendrés par* A *et un nombre fini de points, et maximaux pour ces propriétés, forment les classes d'une congruence définissable.*

Démonstration. Chaque singleton, étant définissable, connexe et elliptiquement engendré par son point, est inclus dans un symétron de la famille considérée : ces sous-symétrons recouvrent bien S . Si deux d'entre eux ont une intersection non-vide, au vu leur maximalité ils sont égaux d'après le Théorème des Indécomposables (9.1.(ii)) ; par ailleurs les symétries les permutent ; ils forment donc les classes d'une demi-congruence définissable $\sim$; on note n le rang de Morley de ses classes.

Soient C_1 et C_2 deux classes de $\sim$ et a un point de C_1 ; $m(a,C_2)$, étant en bijection avec C_2 , est un ensemble de rang de Morley n et de degré de Morley un ; d'après le Lemme 8.2, il possède une partie B définissable indécomposable de rang n ; comme le milieu fait partie, à côté de la symétrie, des fonctions génératrices, B est elliptiquement engendré (avec un paramètre de plus) ; toujours d'après le Théorème des Indécomposables, elle est contenue dans la (seule !) classe C_3 qui l'intersecte non trivialement.

Soit D le symétron formé des centres des symétries qui échangent C_1 et C_2 ; comme $\sim$ est une-demi congruence, il s'agit des symétries qui envoient a dans C_2 . Comme D contient B , il contient le symétron qu'il engendre, c'est-à-dire C_3 .

Par ailleurs, la fonction $s(a,z)$, inverse de la fonction $m(a,y)$, définit une injection de D dans C_2 . D a donc un rang de Morley moindre, ou, en cas d'égalité, son degré de Morley vaut un ; comme il contient C_3 , c'est C_3 . Les milieux de $C_1 \times C_2$ sont dans C_3 , le milieu passe au quotient. **Fin**

Théorème 13.15. *La clôture normale comme la clôture semi-normale d'un sous-symétron* S *définissable et connexe sont définissables et connexes, et engendrées elliptiquement par* S *et un nombre fini de paramètres.*

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème précédent, on voit qu'il s'agit du sous-symétron contenant S , définissable, connexe, elliptiquement engendré par S et un nombre fini de paramètres, contenu dans la clôture normale ou semi-normale, et maximal pour ces propriétés. **Fin**

Définition 13.16. *Si* S *est un symétron, un* S-module M *est la structure définie par une fonction* $\sigma(u,y)$ *de* $M \times S$ *dans* M *telle que* $\sigma(u,s(x,y)) = \sigma(\sigma(u,x),y)$.

Comme les demi-congruences sont de fait les congruences pour le structure de module de S sur lui-même, une étude systématique des S-modules devrait éclairer la nature des demi-congruences de symétron.

14. Congruences et transvexions

Comme les symétrons forment une classe équationelle, si f est une fonction qui est un homomorphisme pour la symétrie et le milieu du symétron S dans une structure de même langage, l'image $f(S)$ est un symétron. D'après le Lemme 4.7, l'épimorphisme f induit un épimorphisme f^* entre le groupe des symétries-transvexions de S et celui de $f(S)$.

D'après la proposition suivante, qui est une traduction de 12.5, sous une hypothèse d'ω-stabilité, un homomorphisme pour la symétrie l'est automatiquement pour le milieu.

Proposition 14.1. *Soit* S *un symétron* ω*-stable ; pour qu'une fonction définissable* f *de domaine* S *soit un homomorphisme de symétron, il suffit qu'elle soit un homomorphisme pour la symétrie.*

Démonstration. L'application f est donc un homomorphisme entre l'espace symétrique S et l'espace symétrique f(S) ; deux symétries s et s' de f(S) proviennent de deux symétries σ et σ' de S ; $D(s,s') = f^*(D(\sigma,\sigma'))$ est une image définissable de $D(\sigma,\sigma')$, et par conséquent n'a pas d'involutions : l'hypothèse (iii) du Lemme 4.1 est donc vérifiée. Par ailleurs, si a et b sont des centres de s , qui proviennent de α et β dans S , de milieu μ , a et b sont échangés par la symétrie s_m de centre $m = f(\mu)$, si bien que s et s_m commutent, $s = s_m$, et $a = b$; l'hypothèse (ii) est donc aussi vérifiée. Or nous savons que la conjonction de (ii) et (iii), c'est-à-dire l'hypothèse (i), suffit pour que l'espace symétrique ω-stable f(S) soit un symétron. **Fin**

Le noyau $Ker(f^*)$ est donc un sous-groupe normal de sT ; comme deux symétries sont égales modulo f si leur produit est dans $Ker(f^*)$, la congruence $f(x) = f(y)$ est déterminée par l'intersection H de $Ker(f^*)$ et de T , et f est définissable si et seulement si $H_0 = Ker(f^*) \cap T_0$ l'est. Nous observons que H_0 , qui est normalisé par chaque symétrie, est clos par prise de carré ; et aussi que si S est borné de rang de Morley fini, et si X est une partie définissable de T close par conjugaison et prise de carrés, le sous-groupe de T engendré par X est définissable, d'après le Théorème sans Indécomposables.

Réciproquement, si H est un sous-groupe de T normal dans sT , la congruence modulo H définit un homomorphisme d'espaces symétriques entre S et S/H , qui est un homomorphisme de symétrons si S est ω-stable et $T_0 \cap H$ est définissable. Cependant cette correspondance entre H et le symétron quotient S/H n'est pas univoque, car le groupe des transvexions de S/H n'est pas T/H , mais le quotient de ce dernier par le centre de sT/H .

Pour nous résumer :

Proposition 14.2. *Soient* S *un symétron borné* ω*-stable et* N *un sous-groupe définissable propre de* T *normalisé par les symétries ; alors le centre de* sT/N *est inclus dans* T/N *, et* S *modulo* N *est un symétron dont le groupe de transvexions est le quotient de* T/N *par le centre de* sT/N . *Si* S *est de rang de Morley fini, le sous-groupe* N_0 *de* N *engendré par* $N \cap T_0$ *est définissable et définit la même congruence.*

Démonstration. Soit s une symétrie, et t dans T tel que s.t commute avec s modulo N : $s.t.s \in N$, et donc $t \in N$; si s.t commute avec toutes les symétries modulo N , comme l'image de S modulo N est un symétron, cela ne peut se produire que si ce symétron est réduit à un point, ce que nous avons exclu en supposant que $N \neq T$. Deux symétries ont même action sur S/N précisément quand elles sont congrues modulo le centre de sT/N .

La congruence définie par N ne dépend que de $N \cap T_0$, et comme cet ensemble est normalisé par chaque symétrie, on montre comme dans le Lemme 2.1 qu'il engendre elliptiquement un groupe définissable. **Fin**

Dans le cas borné, les congruences de symétron correspondent donc de manière non univoque à des sous-groupes normaux de leur groupe de transvexions. Si en outre le rang de Morley est fini, on peut être plus précis : ce sont les groupes définissables compris entre N_0 et l'image réciproque du centre de sT/N_0 , qui définissent la même congruence que N .

Remarquons aussi que, si $\sim$ est une demi-congruence définissable du symétron borné ω-stable S , chaque symétrie la respecte, si bien que T définit par conjugaison un groupe d'automorphisme de $\sim$; si c est la classe de s , son fixateur est l'ensemble des h tels que $h.s.h^{-1} \sim s$; l'intersection H des fixateurs de toutes les classes est un sous-groupe définissable H de T normalisé par toutes les symétries ; si deux symétries sont congrues modulo H , c'est-à-dire si $s.s' = h \in H$, le groupe $D(h)$ est inclus dans H , lequel contient $h^{1/2}$ qui conjugue s et s' , qui sont donc dans la même classe de $\sim$. On voit que la congruence modulo H raffine la demi-congruence $\sim$.

15. Symétrons rangés et symétrons de rang de Morley fini

Une structure M est dite *rangée* si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

(i) toute partie définissable, avec paramètres, de M^{eq} , a un rang de Cantor fini ;

(ii) si $X(\bar{x}, \bar{y})$ est définissable, l'ensemble des paramètres $\bar{a}$ tels que $X(\bar{a}, \bar{y})$ soit de rang de Cantor m est définissable ;

(iii) si $X(\bar{x}, \bar{y})$ est définissable, il existe un entier n bornant les nombres de points des ensembles $X(\bar{a}, \bar{y})$ de rang nul, c'est-à-dire finis.

Comme nous parlons de rang de Cantor, ces conditions ne font intervenir que la seule structure M , et pas ses extensions élémentaires. Elles ne sont pas vérifiées par toutes les structures de rang de Morley fini, et d'après BURDGES-CHERLIN 2008, elles n'impliquent que la superstabilité ; on remarque qu'elles ne mentionnent pas l'additivité du rang.

Ce que montre POIZAT 1987 à propos du traitement axiomatique de la notion de groupe de rang de Morley fini, c'est que *les groupes rangés sont identiques aux groupes de rang de Morley fini* ; en outre le rang de Cantor y est identique au rang de Morley et au rang de Lascar. Il faut préciser qu'un *groupe* est ici une structure G munie d'une loi de groupe, enrichie éventuellement de fonctions et de relations supplémentaires ; quand nous disons que G est de rang de Morley fini, nous affirmons que le rang de Morley de ce groupe enrichi est fini, suivant la définition classique de la Théorie des Modèles. Si toute la structure est définissable à partir de la seule loi de groupe et de paramètres, on parle de groupe *nu*.

La démonstration met en œuvre ce qu'on appelle une *analyse de Lascar,* qui se déroule selon les étapes suivantes ; soit G un groupe infini de rang de Morley fini :

1. On commence par remplacer G par une de ses extensions élémentaires ω-saturée.

2. On considère un sous-ensemble définissable X de G dont le rang et le degré de Morley valent un ; il existe bien vu la saturation de G.

3. En lui enlevant un morceau fini, on rend X indécomposable, et en le translatant on lui fait contenir l'unité ; on considère alors le groupe H (elliptiquement) engendré par X, qui est définissable et connexe.

4. On considère le groupe G_1 clôture normale de H, engendré par les conjugés de H, qui est elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre eux.

5. On poursuit l'analyse dans le quotient G/G_1.

6. Quand on a fini, on se rend compte que G est une structure finidimensionelle, dans laquelle chaque dimension est portée par un ensemble fortement minimal ; or ces structures sont toutes rangées, comme leur cas particulier unidimensionel, c'est-à-dire ω_1-catégorique. Sur chaque modèle de la théorie de G le rang de Cantor est le rang de Morley, si bien que l'étape 1 est a posteriori inutile. De plus, on obtient gratuitement l'additivité du rang, car il est aussi égal au rang U de Lascar.

Pour la réciproque, c'est-à-dire quand le groupe G est rangé, on saute bien sûr la première étape, car on ne sait pas a priori que les extensions élémentaires de G sont rangées, mais on peut reproduire toutes les autres (il faut bien sûr vérifier que tous ce qu'on a montré en utilisant le rang de Morley se fait aussi avec le rang de Cantor, la définissabilité de la dimension se substituant à la définissabilité des types). Comme l'hypothèse (iii) implique qu'un ensemble de rang et de degré de Cantor un est fortement minimal, on parvient à la même conclusion en 6.

Théorème 15.1. *Les symétrons de rang de Morley fini sont les mêmes que les symétrons rangés.*

Démonstration. On peut reproduire pour les symétrons toute l'analyse de Lascar faite pour les groupes, en particulier la 4° étape grâce au Théorème 12.15. **Fin**

La question de l'identité des symétrons de rang de Morlet fini et des symétrons rangés a été posée dans [Z 22], où elle ne reçoit qu'une réponse partielle. Cela vient de la difficulté de caractériser les sous-boucles normales, qui est bien connue des loopologues, exprimée dans leur obscur langage. En effet, tout le monde sait qu'un sous-groupe est le noyau d'une congruence de groupe si et seulement s'il est clos sous les automorphismes intérieurs $g.x.g^{-1}$; pour les boucles, la normalité d'une sous-boucle équivaut à sa clôture sous certaines *opérations intérieures* (références dans Z22 et Z24), si bien que Zamour, qui travaille dans le langage des boucles et n'amalgame que des sous-boucles, ne peut conduire l'analyse de Lascar à son terme que sous la condition que toutes ces opérations intérieures soient des automorphismes de boucle ; cette condition passe au quotient car elle équivaut à la commutativité de la boucle. On observe que notre Théorème 13.14 amalgame non seulement des sous-symétrons, mais aussi des images de ces derniers par une fonction-milieu.

On peut mener l'analyse plus rapidement en introduisant au départ les sous-symétrons connexes maximaux qui sont elliptiquement engendrés par des points et des ensembles fortement minimaux indécomposables. Comme la congruence associée est invariante par tout automorphisme du symétron (nu), nous dirons qu'elle est *caractéristique,* terme emprunté à la Théorie des groupes. Par analogie avec les groupes, on peut se poser la question :

Question 15.2. *Dans un symétron, est-ce-que toute relation d'équivalence caractéristique est une congruence ?*

Et si nous avons soif de revenir nous abreuver à la source primordiale :

Théorème 15.3. *Un symétron infini, simple, et de rang de Morley fini est une structure* ω_1*-catégorique.*

Démonstration. Ce symétron est connexe et elliptiquement engendré par un ensemble fortement minimal et un nombre fini de paramètres : c'est une structure unidimensionnelle. **Fin**

Ce qui suggère une dernière question :

Question 15.4. *Un symétron de rang de Morley fini définissablement simple est-il simple ?*

Une autre difficulté propre aux symétrons est que certaines opérations intérieures font intervenir plusieurs paramètres (essentiellement deux centres de symétrie ; voir la Proposition 13.6), si bien qu'on ne voit pas trop comment définir le semi-normalisateur d'un sous-symétron S même définissable ; peut-être faut-il l'envisager comme un ensemble de transvexions primaires ? Si S est connexe, il n'est pas clair qu'il existe un plus grand symétron définissable connexe dans lequel S soit semi-normal. Pour le normalisateur, c'est pire.

16. Analyse de Hrushovski

Comme il est remarqué dans POIZAT 1987, il y a deux façons d'analyser un groupe de rang de Morley fini. La première, l'Analyse de Lascar que nous avons généralisée aux symétrons, est faite à partir du bas : elle consiste à construire un sous-groupe définissable normal contrôlé par un ensemble fortement minimal, puis à répéter dans le quotient ; elle est de nature assez algébrique, et s'appuie sur le Théorème des Indécomposables.

La deuxième, l'Analyse de Hrushovski, part du haut : elle consiste à associer à un type régulier q non orthogonal au générique un sous-groupe définissable normal tel que le quotient soit q-interne. Elle a d'ailleurs été précédée par les analyses de Berline et de Lascar des groupes superstables, qui partent aussi du haut. Elle est très modèle-théorique et se généralise à d'autres contextes ; elle demande de monter à des modèles saturés.

On devrait pouvoir conduire une analyse de Hrushovski dans un symétron de rang de Morley fini.

Index