UNE EXEGESE, S'APPUYANT SUR LA THEORIE DES MODELES DES GROUPES ALGEBRIQUES SIMPLES, D'UN RESULTAT OBTENU RECEMMENT PAR MONSIEUR ALEKSANDR VASILEVIĆ BOROVIK, SUIVIE D'UN COMMENTAIRE DE MEME NATURE SUR LE THEOREME DE BOREL-TITS

Bruno Poizat[1]

Abstract. We comment a recent result of Mr A.V. Borovik, making explicit its dependence on the famous Theorem of Borel and Tits on abstract isomorphisms of algebraic simple groups, considered from a model-theoretic point of view. As a by-product, we obtain a description of the automorphisms of finite order of a simple algebraic group (over an algebraically closed field), based on general arguments from Model Theory.

Mots-clés. Groupes algébriques simples, Théorème de Borel-Tits, Théorie de Galois, internité au sens de Hrushovski

Classification des sujets. 03C45, 03C60, 12L12, 20G07

0. Introduction

Nous commentons ici le théorème suivant, extrait de BOROVIK 2023 :

Theorem 3. *Let* K *be an algebraically closed field of characteristic* $p > 0$ *, and* K_∞ *the algebraic closure of the prime field* F_p *in* K *. Let* G *be a simple algebraic group over* K *, and* G_∞ *the group of points of* G *over* K_∞ *. If* M *is a subgroup of* G *containing* G_∞ *and the structure* (G,M) *has a finite Morley rank, then* $M = G$.

Son énoncé est elliptique, car G_∞ n'est déterminé que si on précise une façon de définir G dans K (par une formule pour un logicien, par un schéma pour un algébriste) qui ne fait intervenir que des paramètres algébriques. Borovik, citant BOREL 1970, déclare que chaque groupe algébrique simple a une représentation linéaire définie par des polynômes à coefficients entiers, résultat qui, d'après moi, est implicite dans la classification de THOMAS 1983 des groupes simples de rang de Morley fini localement finis, étendue aux groupes pseudo-localement finis. Rappelons que le travail de Simon Thomas repose sur la classification des groupes simples finis. La question suivante est un prélude aux arguments développés dans le présent article :

---

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, Mathématiques, bâtiment 101, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

Question 1. *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi un groupe simple définissable dans un corps algébriquement clos est définissablement isomorphe à un groupe définissable sans paramètres ?*

La démonstration de Borovik repose sur deux ingrédients :
(i) la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits exposée dans POIZAT 1988 (voir aussi POIZAT 1987, p. 149), ayant pour conséquence que tout ce qui est définissable à l'intérieur du groupe simple G au sens du corps K, quand on considère G comme un objet définissable dans K, est définissable à partir de la seule loi de groupe de G.
(ii) le théorème de WAGNER 2001 affirmant que si K est un corps infini de rang de Morley fini, dans un langage augmenté, possédant un automorphisme définissable non-trivial, son modèle premier est basé sur K_∞.

Mais, à la fin de l'article, Borovik propose deux démonstrations alternatives, demandant une meilleure connaissance de la structure des groupes algébriques simples ; l'une d'elle réduit le problème au cas où $G = SL_2(K)$ ou $PSL_2(K)$: le Theorem 3 devient alors une conséquence du Théorème 4 de POIZAT 2001, ou de sa généralisation MUSTAFIN-POIZAT 2006 qui décrit les sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$; ils n'utilisent pas le Théorème de Wagner, et sont valables en toute caractéristique, si bien que le Theorem 3 est aussi vrai en caractéristique nulle (quand K_∞ est la clôture algébrique du corps des rationnels). Le Théorème de Borel-Tits reste indispensable à la démonstration, car il faut être sûr que les "groupes de racine" de G soient définissables dans G.

Nous allons voir que le groupe G_∞ est une restriction élémentaire de G ; mais le Theorem 3 affirme une propriété beaucoup plus forte. Borovik l'utilise sous la forme suivante : si, dans un contexte de rang de Morley fini, G agit sur un ensemble X, et si chaque point de G_∞ normalise un sous-ensemble définissable de X, ou bien commute avec une fonction définissable de X dans X, alors cela a lieu pour tout point de G.

Dans cet article, nous allons interpréter ce résultat en termes de Théorie des Modèles ; nous verrons que le seul fait mathématique sur lequel il repose, de même que le Théorème de Borel-Tits et la description des automorphismes des groupes algébriques simples qu'on en tire, est que tout corps infini définissable dans un corps algébriquement clos nu[2] est définissablement isomorphe au corps de base (POIZAT 1987, p. 141) : le reste suit de résultats généraux de Théorie des Modèles. Cela permet de donner une version plus étendue du Théorème de Borel-Tits, dans laquelle il n'est pas essentiel que les structures considérées soient des groupes.

[2] Nous voulons dire par là que le langage dans lequel le corps se présente est réduit au pur langage des corps ; pour nous, si rien d'autre n'est spécifié, un "corps de rang de Morley fini" pourra être une structure de langage plus étendu.

1. Géomètres et Logiciens

Ce qui est frappant dans l'énoncé du Theorem 3, c'est qu'il confronte des notions de Théorie des Modèles ("le rang de Morley fini") à des notions de Géométrie Algébrique ("les points rationnels d'un groupe algébrique") ; sa protase est une mixture de Géométrie et de Théorie des Modèles.

Un théoricien des modèles voit une structure, par exemple un groupe, en compagnie du cortège (η θεωρια !) de ses extensions élémentaires, et s'immerge volontiers dans un domaine universel très saturé. Un point de vue très proche du sien est celui de WEIL 1948, qui nous apparaît a posteriori comme une étude fine de la Théorie des Modèles des corps algébriquement clos ; cela conforte l'impression que la Théorie des Modèles de la fin du siècle dernier est l'héritière de la Géométrie Algébrique des années cinquante.

Mais après Weil s'est développée une tendance à introduire les groupes algébriques non pas comme des groupes, mais comme des schémas de groupe, ayant des points rationnels sur n'importe quel anneau intègre A contenant les paramètres nécessaires à sa définition : les points rationnels sur A, eux, forment un groupe[3]. Une façon de faire est de considérer des fermés de Zariski des groupes linéaires GL_n, mais ce n'est pas la seule ; à ce propos, il semble que, dans ses premiers travaux, Zil'ber n'a en vue que ces groupes algébriques affines, ce qui n'est pas bien gênant quand on parle de groupes simples[4].

Le théoricien des modèles rejoint le géomètre en considérant les objets définissables dans un corps (nu) algébriquement clos K, associés à une formule φ du langage des corps à paramètres dans K ; ils ont été qualifiés de *constructibles* par Chevalley ; si L est un corps algébriquement clos étendant K, c'en est une extension élémentaire, et la formule φ définit sur L un objet ayant les mêmes propriétés du premier ordre que son ancêtre dont les points sont dans K ; de plus, toute bijection (de graphe) constructible entre deux objets constructibles dans K s'étend à leurs descendants dans L, ce qui fait que les théoriciens des modèles ont eux-aussi une vision schématique de l'existence.

La différence est que les variétés des géomètres sont des objets constructibles très particuliers, pour que leurs points rationnels sur n'importe quel anneau se comportent décemment. Les théoriciens des modèles, eux, manipulent aisément des objets plus généraux, mais doivent payer le prix de n'avoir pour domaine de base que des anneaux qui sont des corps algébriquement clos (ou bien des corps dont ils maîtrisent les propriétés du premier ordre, comme les corps réel-clos). Bien que le rang de Morley soit une traduction au niveau constructible de la dimension géométrique, les hypothèses du Theorem 3 sont modèle-théoriques, car le groupe M de l'énoncé n'a a priori

[3] Il est piquant de rappeler qu'un algébriste comme Borovik est l'auteur d'une tentative de caractériser la finitude du rang de Morley d'un groupe sans sortir de ce dernier (BOROVIK 1984), qui a été finalisée dans POIZAT 1987.

[4] Car on sait que le quotient d'un groupe algébrique connexe par son centre est affine (POIZAT 1987, p. 147), soit encore linéaire.

rien d'algébrique ; il satisfait cependant une condition de nature géométrique, celle de contenir le groupe G_∞ ; le théoricien des modèles rejoint le géomètre en déterminant G_∞ par le choix nécessaire d'une formule à paramètres algébriques interprétant G dans le corps de base. Quand il énonce cette condition, quel que soit le point-de-vue adopté, le Theorem 3 ne parle pas d'un groupe, mais d'une façon de définir un groupe.

On comprend que cette différence d'aproche ne facilite pas la communication entre la Géométrie et la Logique.

Prenons un premier exemple bien classique. Le groupe SL_3 est formé des matrices carrées d'ordre 3 dont le déterminant vaut 1 : cette définition est limpide à tout point de vue. Le groupe PSL_3 est défini communément comme étant le quotient de SL_3 par son centre, formé des matrices diagonales associées aux racines cubiques de l'unité. On constate donc que $PSL_3(R)$ est le même[5] groupe que $SL_3(R)$, et pourtant un géomètre sera réticent à admettre qu'ils sont identiques en tant que groupes algébriques ; il ne faut pas en conclure qu'il croit que l'application-identité est un morphisme tandis que son inverse ne l'est pas, mais plutôt qu'il demande une définition plus précise de PSL_3 ; en effet, tout débutant en géométrie sait les difficultés qu'on rencontre pour définir les quotients au niveau des schémas, et le mieux en l'espèce est de choisir une représentation linéaire $PSL_3{}^*$ de PSL_3 : la bijection de $SL_3(R)$ vers $PSL_3{}^*(R)$ s'exprime polynomialement, tandis que son inverse demande l'extraction d'une racine cubique. La philosophie de tout ça, c'est que deux objets isomorphes ne sont pas identiques, et qu'il faut se préoccuper de la nature de leur isomorphie avant de les identifier ; par contraste la prise de quotients par des relations d'équivalence définissables ne pose aucune difficulté aux théoriciens des modèles, d'autant plus que les corps algébriquement clos comme les corps réels-clos éliminent les imaginaires

Le deuxième exemple est anecdotique. En 1983, à Bombay, j'ai demandé à Jean-Louis Colliot-Thélène s'il était bien connu que le seul corps constructible était le corps de base ; comme je ne savais pas à l'époque que les groupes constructibles étaient constructiblement isomorphes aux groupes algébriques[6], je lui parlais d'un corps dont le groupe additif comme le groupe multiplicatif étaient des groupes algébriques. Il fallut de longues et pénibles explications pour que la lumière se fît : "Ah, tu veux parler d'un schéma en anneau dont les points rationnels sur un corps algébriquement clos forment un corps !" Gopal Prasad, également présent sur les lieux, fut beaucoup plus pragmatique : "Let us see! What can be the additive group of the field? It is certainly not an abelian variety ... "

---

[5] A vrai dire pas tout-à-fait : c'est le quotient de $SL_3(R)$ par son sous-groupe réduit à l'unité.

[6] Résultat exposé dans POIZAT 1987, p. 141 ; lui sont associés les noms de Weil, van den Dries et Hrushovski. J'ai reçu à son propos une intéressante lettre d'Alexandre Grothendieck, dont je tiens la copie à la disposition de mes lecteurs.

Ce fossé s'est élargi après l'intervention de Grothendieck[7].

2. Une première reformulation du Theorem 3

Pour mieux analyser le résultat de Borovik, nous le généralisons très légèrement, et nous en offrons une démonstration qui s'appuie directement sur le Théorème de Wagner, ce qu'évite Borovik qui préfère n'utiliser que la notion de "bon tore" qui en dérive (voir ABC 2008, p. 50).

Notre énoncé distingue la structure (G, M) formée du groupe algébrique G muni de sa loi de groupe, ainsi que d'un prédicat représentant son sous-groupe M, de la structure plus forte (K, G, M) formée du corps de base K et de la relation décrivant M comme sous-groupe de G (lequel est définissable dans K).

Théorème 2.1. *Considérons un groupe algébrique infini* $G(K) = G$ *sur un corps algébriquement clos* K *de caractéristique* p *, où* $G( )$ *est une formule du langage des corps à paramètres algébriques, définissant l'ensemble sous-jacent à* G *et sa multiplication, et un sous-groupe* M *de* $G(K)$ *contenant* $G(K_\infty)$ *, où* K_∞ *est le corps des nombres algébriques en caractéristique* p .
(i) *Si la structure* (K, G, M) *a un rang de Morley fini, alors* $M = G$.
(ii) *Si* G *est simple et la structure* (G, M) *a un rang de Morley fini, alors* $M = G$.

Démonstration. (i) Comme les paramètres de la formule $G( )$ sont algébriques, il existe une puissance non triviale σ de l'automorphisme de Frobenius du corps K qui induit un automorphisme σ^* de G ; l'intersection Γ de toutes les images de M par les puissances de σ^* , positives où négatives, est celle d'un nombre fini d'entre elles, si bien qu'elle est définissable dans (K, G, M) . On observe que $G(K_\infty)$ est préservé par σ^* , et inclus dans Γ .

Maintenant on oublie M : la structure (K, G, Γ) n'est rien d'autre qu'un corps enrichi de rang de Morley fini, admettant σ comme automorphisme. D'après le théorème de Wagner rappelé ci-dessous, son modèle premier est porté par K_∞ ; donc $\Gamma = G$.
(ii) Si G est simple, d'après la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits décrite dans la section suivante, (K, G, M) est de rang de Morley fini si et seulement si (G, M) l'est (Corollaire 4.3). **Fin**

Théorème de Wagner sur les corps (WAGNER 2001)**.** *Soit* K *un corps infini de rang de Morley fini, de langage possiblement enrichi ; alors :*

[7] C'est ainsi que j'ai averti un étudiant courageux qui voulait lire le SGA et les EGA avant d'entreprendre des travaux sur les groupes de rang de Morley fini : "Vous verrez que vous aurez du mal à comprendre ce qu'ils appellent une courbe." Olivier Chapuis, qui assistait à l'entretien, a ajouté : "Oh non, la vraie difficulté est de comprendre ce qu'ils appellent un point !"

(i) *le modèle premier de la théorie de* K *est la clôture algébrique modèle-théorique de l'ensemble vide ;*
(ii) K *élimine les imaginaires ;*
(iii) *si de plus la structure enrichie* K *a un automorphisme définissable non trivial, alors son modèle premier est porté par la clôture algébrique algébrique de l'ensemble vide, c'est-à-dire* K_∞ .

Nous appelons *corps de Wagner* un corps (enrichi) satisfaisant (iii) ; sa caractéristique est un nombre premier p , car le corps des invariants de l'automorphisme doit être fini. Observons que son langage ne peut nommer qu'un nombre fini de paramètres, tous algébriques ; on ne sait pas s'il existe des corps de Wagner autres que les corps nus avec un nombre fini de paramètres algébriques nommés.

La problématique sous-jacente au résultat de Borovik se résume à la question suivante : *si* G *est un groupe algébrique, sur un corps* K *algébriquement clos, et* M *est un sous-groupe de* G *, à quelles conditions les structures* (G, M) *ou* (K, G, M) *restent-elles de rang de Morley fini ?*

Par exemple, si la caractéristique de K est p , et si M est un sous-groupe propre divisible du groupe multiplicatif K* contenant sa torsion, (K*, M) est de rang de Morley deux, tandis que le rang de Morley de (K, K*, M) est infini. C'est une conséquence du Théorème de Wagner : comme K* n'a pas de p-éléments, si (K, K*, M) est de rang de Morley fini M est uniquement p-divisible, et l'automorphisme de Frobenius envoyant x sur x^p est un automorphisme de (K, K*, M) . D'ailleurs, d'après WAGNER 2003, il est très peu probable qu'on puisse trouver un sous-groupe propre infini M de K* tel que le rang de Morley de (K, K*, M) soit fini.

En caractéristique nulle, BHMPW 2009 ont construit un sous-groupe sans torsion M de K* tel que (K, K*, M) soit de rang de Morley deux ; le Théorème de Wagner interdit cela en caractéristique p . Ce groupe M est obtenu à partir d'un amalgame de Hrushovski, en collapsant un corps de rang ω.2 décrit dans POIZAT 2001, où l'absence de torsion était adoptée pour faciliter l'expression de la positivité de la prédimension ; dans l'état présent de nos connaissances, on ne sait pas si on peut faire la même construction en incorporant à M une partie, ou la totalité, de la torsion.

Du côté additif, en caractéristique nulle il est clairement impossible d'obtenir un sous-groupe M additif non trivial en gardant (K, K^+, M) de rang de Morley fini. Par contre, BMPZ 2007 ont construit un exemple de rang deux en caractéristique p .

Pour mieux mesurer la portée du Théorème de Wagner, il serait intéressant d'examiner ce qu'on peut ajouter à une variété abélienne, par exemple, en caractéristique p , à une courbe elliptique de discriminant transcendant.

Comme notre savoir-faire en la matière se limite aux groupe commutatifs, il est tentant de poser la question suivante, à laquelle MUSTAFIN-POIZAT 2007 apporte une réponse positive si $G = SL_2(K)$ ou $PSL_2(K)$.

Question 2. *Soit* M *un sous-groupe du groupe algébrique* G *, sur un corps algébriquement clos* K *, tel que* (K, G, M) *soit de rang de Morley fini ; peut-on trouver des sous-groupes* $A_1 , \ldots A_n$ *de groupes algébriques commutatifs tels que* (K, M) *et* $(K, A_1 , \ldots A_n)$ *soient bi-interprétables ?*

Théorème 2.3. *Le Théorème 2.1.(ii) est aussi valable en caractéristique nulle (si* K_∞ *représente la clôture algébrique du corps des rationnels).*

Démonstration. Comme je l'ai dit dans l'introduction, c'est une conséquence de la démonstration alternative de Borovik pour son Theorem 3. **Fin**

3. Le Théorème de Borel-Tits et la théorie des modèles des groupes algébriques simples

Un groupe algébrique infini simple G , sur un corps algébriquement clos K , a des propriétés modèle-théoriques très particulières, qui tiennent aux quatre faits suivants :
(i) G a un sous-groupe de Borel non nilpotent, et en conséquence on peut définir à l'aide de sa seule loi de groupe un corps infini L ; c'est un fait très basique pour un algébriste (voir ABC 2008, p. 118), mais on peut aussi l'obtenir à partir de la pseudo-locale-finitude de G (un contre-exemple minimal serait un mauvais groupe).
(ii) Comme nous l'avons dit, ce corps L est isomorphe au corps de base K , par un isomorphisme σ entre K et L qui est définissable dans K ; la construction de σ demande une certaine familiarité avec la Géométrie Algébrique, essentiellement pour montrer que le produit semi-direct de L^+ par L^* est un groupe algébrique affine.
(iii) D'après le premier résultat de Zil'ber sur la Théorie des Modèles du sujet (ZIL'BER 1977), le groupe nu G est ω_1-catégorique, et par conséquent son type générique est non-orthogonal à L ; selon un résultat général de Hrushovski sur les groupes simples de rang de Morley fini, G est L-interne, soit encore définissablement dans G (par une formule utilisant des paramètres) isomorphe à un groupe $G_1(L)$ définissable dans L .
(iv) Le groupe G a une copie isomorphe définissable dans K sans paramètres.

Théorème 3.1. (de Borel-Tits, version modèle-théorique). *Soient* G *un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos* K *,* L *un corps infini définissable dans* G *, et* σ *un isomorphisme du corps* K *vers le corps* L *définissable dans* K *; alors l'isomorphisme de groupe* σ^* *entre* $G = G(K)$ *et* $G(L)$ *induit par* σ *est définissable dans la structure de groupe nue de* G .

Démonstration. Comme G est L-interne, il est définissablement dans G isomorphe à un groupe $G_1(L)$ définissable dans L . Quand nous revenons dans K en prenant l'image de L par σ^{-1} , nous voyons que $G_1(K)$ est isomorphe à G définissablement dans K , dans lequel tout est définissable ; autrement dit, $G(K)$ est isomorphe à $G_1(K)$ définissablement au sens du corps nu K ; en appliquant σ , on voit que $G(L)$ est isomorphe à $G_1(L)$ par un isomorphisme définissable dans L ; comme L est définissable dans le groupe G , σ^* est composé d'un isomorphisme de G dans $G_1(L)$ et d'un isomorphisme de $G_1(L)$ dans $G(L)$ qui sont tout deux définissables dans le groupe nu G . **Fin**

Corollaire 3.2. *Si* G *est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos* K *, tout sous-ensemble constructible (c'est-à-dire définissable dans* K *) d'une puissance cartésienne de* G *est définissable dans le groupe nu* G .

Démonstration. Si X est constructible au sens de K , $\sigma^*(X)$ est constructible au sens de L , donc définissable dans G , ainsi que son image réciproque par σ^* . **Fin**

Notes. (i) Un isomorphisme comme σ^* , consistant à remplacer dans une formule du langage des corps le corps K par une image isomorphe L (on remplace aussi les paramètres de la formule par leurs images), sera appelé *transport de structure* ; ce transport est associé à une formule fixée $G(\ )$ définissant le groupe G . Naturellement, tout isomorphisme d'un objet constructible peut se voir comme un transport de structure !
(ii) Etant donnée la distance qui sépare Logique et Géométrie[8], on ne trouve pas dans BOREL&TITS 1973 un énoncé correspondant exactement au théorème ci-dessus ; des géomètres pourront même s'offusquer de voir associé un double nom aussi prestigieux à un résultat dont la démonstration demande si peu de connaissance de la structure du groupe. Ils considéreront le Corollaire 4.4 de la section suivante comme une version misérable du vrai Théorème de Borel-Tits, qui est infiniment plus riche (voir STEINBERG 1974) : il parle en réalité d'isogénies entre groupes quasi-simples et non pas seulement d'isomorphismes entre groupes simples (voir le Theorem 4 de BOROVIK 2023), dans un cadre qui n'est pas limité à celui d'un corps de base algébriquement clos. Cependant, on ne peut guère éviter de mentionner Borel et Tits à son propos car le Corollaire 3.2, grâce à l'introduction du langage du premier ordre, donne un sens mathématique précis à une formulation heuristique vague du résultat (voir ZIL'BER 1984), à savoir que la structure de variété du groupe est déterminée (de quelle manière ?) par sa seule loi de groupe.
(iii) J'ai cru opportun de reprendre dans POIZAT 1988 l'essai de ZIL'BER 1984, qui exprimait dans son introduction l'intuition correcte que la Théorie des Modèles

[8] Voyez le sous-titre de POIZAT 1987 !

avait quelque chose à dire sur le Théorème de Borel-Tits ; mais il la traduisait ensuite dans un Lemma 5 dont l'énoncé me semblait insuffisant et la démonstration peu convaincante.
(iv) L'ingrédient essentiel de la démonstration, celui qui met en jeu la simplicité du groupe, est la notion d'internité de Hrushovski, valable dans des contextes bien plus généraux que la finitude du rang de Morley. Elle est l'aboutissement d'une longue histoire mathématique, car elle s'inscrit dans le prolongement de la Théorie de Galois des équations algébriques (POIZAT 1983), de celle des équations différentielles linéaires, associée aux noms de Liouville, Picard et Vessiot, généralisée ensuite par Kolchin à ce que nous qualifions aujourd'hui d'équations différentielles internes au corps des constantes (POIZAT 1985, Ch. 18), et aussi du "groupe de liaison" (binding group) de ZIL'BER 1980 (voir POIZAT 1987, p. 54).

Pour élever le débat, et nous placer dans ce qui est à mon avis le véritable cadre convenant au Théorème de Borel-Tits, nous développerons dans la section suivante les conséquences du Théorème 3.1 sur les isomorphismes dans un contexte plus abstrait, où il n'est plus question de groupes ; dans la dernière section, nous reviendrons aux particularités des groupes algébriques simples. En attendant, nous examinons ce que ce résultat nous dit de leurs extensions et restrictions élémentaires.

Si $G = G(K)$ est un groupe simple infini, défini dans un corps algébriquement clos K par une formule $G(\ )$ sans paramètres, comment pouvons-nous décrire la théorie du groupe nu G ?

Nous savons qu'il est possible de définir dans G, avec l'aide d'un uplet de paramètres $\bar{a}$, un corps L et un isomorphisme entre G et $G(L)$. Cela s'exprime par une formule élémentaire $\gamma(\bar{x})$ que $\bar{a}$ satisfait.

Notons $\gamma_n(\bar{x})$ la formule déclarant en outre que le corps L n'a pas d'extension de degré n, et qui précise si $p = 0$ ou $p \neq 0$ suivant que $p \leq n$ est ou non la caractéristique du corps de base K. Comme tout corps infini définissable dans G est isomorphe à K, notre groupe satisfait $(\exists\, \bar{x})\, \gamma_n(\bar{x})$.

Dans un modèle ω-saturé de cette liste d'énoncés T, on trouve $\bar{a}$ satisfaisant tous les $\gamma_n(\bar{a})$, si bien que ce modèle est isomorphe à $G(L)$ où L est un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini : comme T est ω_1-catégorique, ce qui était prévu par ZIL'BER 1977, c'est la théorie de G.

Si G_1 est une restriction élémentaire de G, il contient un $\bar{a}$ satisfaisant $\gamma(\bar{x})$, et cette formule a même sens dans G et dans G_1 ; réciproquement, si cela a lieu, G_1 est restriction élémentaire de G, car le plongement de G_1 dans G correspond au plongement naturel de $G(k)$ dans $G(K)$, où k est un sous-corps algébriquement clos de K.

Quand on relit l'énoncé du Theorem 3 de Borovik, on comprend alors que $G(K_\infty)$ est le modèle premier de la théorie de G, et que le plongement considéré est élémentaire. De ce résultat on obtient donc une traduction exhalant une douce musique aux oreilles des familiers de la Théorie des Modèles :

Théorème 3.3. *Si* G *est un groupe algébrique simple, sur un corps algébriquement clos, et* M *est un sous-groupe de* G *contenant une restriction élémentaire de* G *, tel que la structure* (G, M) *soit de rang de Morley fini, alors* $M = G$.

Le géomètre doit pour une fois - et c'est justice - être mis en garde contre un danger de confusion. Le modèle premier de la théorie du corps K , qui est le corps des nombres algébriques, est un sous-corps de K bien déterminé. Par contraste, le modèle premier de la théorie du groupe G se plonge de multiples façons dans G , suivant le choix du paramètre $\overline{a}$; il n'est pas formé des points de G algébriques (au sens modèle-théorique) sur $\emptyset$ car G , étant simple, n'a pas de sous-groupe caractéristique propre. Par contre les extensions élémentaires de G ne font pas difficulté : elles correspondent aux extensions du corps K , puisque nous disposons dans G du paramètre $\overline{a}$.

Arrivé à ce point, je ne peux plus guère éviter la question de la modèle-complétude de la théorie de G , bien que je redoute que son seul effet soit d'attirer l'attention sur mon ignorance de la diversité des plongements des groupes algébriques les uns dans les autres ; elle est liée à la nature de la formule $\gamma(\overline{x})$. D'après MUSTAFIN-POIZAT 2006 la réponse à la question suivante est positive dans le cas de PSL_2 .

Question 3. *Si* $G = G(K)$ *est un groupe algébrique simple sur le corps algébriquement clos* K *, et si* k *est algébriquement clos, est-ce-que tout plongement de* $G(k)$ *dans* $G(K)$ *est élémentaire ? Plus précisément, existe-t'il un sous-corps* k' *de* K *isomorphe à* k *tel qu'il soit conjugué du plongement canonique de* $G(k')$ *dans* $G(K)$ *?*

Note. Dans CHERLIN 1979, Gregory Cherlin exprime son admiration pour le naturel et la simplicité de la démonstration de Zil'ber, tout en déclarant qu'il était parvenu à une conclusion semblable en s'appuyant lourdement sur la structure des groupes algébriques simples ; comme sa démonstration est restée inédite, il est difficile de dire si ce qu'il avait en tête pourrait apporter quelque lumière sur les questions posées ici.

4. Un contexte débarassé de toute référence à un groupe

Nous poursuivons l'étude du Théorème de Borel-Tits dans le cadre des structures constructives pleines ainsi définies :

Définition 4.1. *Nous dirons que* S *est une structure constructive pleine, relativement au corps algébriquement clos* K *, si sa base, infinie, est constructible, ainsi que toutes les fonctions et relations nommées dans son* *langage, supposé fini, et si en outre, pour chaque* n *, toute partie constructible de* S^n *est définissable, avec paramètres, dans le langage de la structure* S .

Ce que déclare notre Corollaire 3.2, c'est précisément que les groupes algébriques simples sont des structures constructives pleines. Nous allons tout d'abord montrer pour ces structures une sorte de réciproque au Corollaire 3.2, à savoir qu'elles sont K-internes, ce qui ne pose pas de difficultés car la définition de la plénitude incorpore en quelque sorte l'internité. Après en avoir tiré quelques corollaires, nous préciserons ensuite la manière de définir en elles des copies du corps de base, ce qui facilitera l'étude de leurs automorphismes.

Notation. Soient σ un isomorphisme entre les corps K et L , et φ une formule du langage des corps, à paramètres dans K , définissant une structure S ; nous notons $\sigma^*\varphi$ la formule, à paramètres dans L , obtenue en remplaçant les paramètres de φ par leurs images par σ , et σ^*S la structure définie dans L par $\sigma^*\varphi$. L'isomorphisme σ^* sera qualifié de *transport de structure* associé à σ ; il importe de remarquer qu'il n'a de sens que si on fixe la formule définissant S .

Théorème 4.2. *Soit* S *une structure constructible pleine, sur le corps algébriquement clos* K *; alors on peut définir dans* S *(ou plutôt* S^{eq} *) une copie* L *du corps* K *, isomorphe à* K *par un isomomorphisme* σ *définissable dans* K *. Pour chacun de ces corps* L *, l'isomorphisme* σ^* *induit par* σ *entre* S *et* σ^*S *est définissable dans* S *. En outre, la théorie de* S *est* ω_1*-catégorique.*

Démonstration. Par élimination des imaginaires, S est isomorphe à une partie constructible d'une puissance cartésienne de K ; comme elle est infinie, une de ses projections P est infinie, ce qui donne une copie de K privée éventuellement d'un nombre fini de points ; comme tout point de K est somme de deux points d'une quelconque de ses parties cofinies, on obtient une copie définissable de K comme un quotient de $P \times P$.

Comme σ^*S est définissable dans S et σ^* est définissable dans K , ce dernier est définissable dans S puisque que c'est une structure pleine.

On décrit la théorie de S à peu près comme nous l'avons fait dans le cas d'un groupe algébrique simple, sauf que maintenant il faut tenir compte des paramètres $\overline{b}$ dans L qui interviennent dans la formule définissant $\sigma^*(S)$, en plus des paramètres $\overline{a}$ dans S qui interviennent dans la définition de σ^* (par exemple, le corps K avec un point transcendant nommé dans son langage est une structure constructive pleine). On minimise le degré de transcendance de $\overline{b}$, si bien qu'aucun $\overline{\beta}$ de degré inférieur ne pourra définir un objet constructiblement isomorphe à S . Ces paramètres seront représentés par des uplets $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans la formule $\gamma(\overline{x},\overline{y})$, qui précise que $\overline{y}$ satisfait un système générateur des équations à coefficients entiers satisfaites par $\overline{b}$, et à la théorie on ajoute que si $\gamma(\overline{x},\overline{y})$ est satisfait alors $\overline{y}$ n'annule pas d'équations non satisfaites par $\overline{b}$. **Fin**

Corollaire 4.3. *Si on ajoute de la structure* Σ *à une structure constructive pleine* S *, sur un corps algébriquement clos* K *, de sorte que* (S, Σ) *reste de rang de Morley fini, alors* (K, S, Σ) *est de rang de Morley fini.*

Démonstration. La structure $(L, \sigma^*(S), \sigma^*(\Sigma))$, étant définissable dans (S, Σ) , est de rang de Morley fini, ainsi que son image réciproque par σ^* . **Fin**

Corollaire 4.4. *Soient* S *une structure constructible pleine, sur le corps algébriquement clos* K *, et un isomorphisme* τ *entre* S *et une structure* S' *constructible sur le corps algébriquement clos* L *; alors* S' *est pleine, et les corps* K *et* L *sont isomorphes, par un isomorphisme tel que* τ *se décompose en le transport associé suivi d'un isomorphisme définissable dans* L *(soit encore dans* S' *).*

Démonstration. L'isomorphisme τ fait apparaître S' comme $S(K_1)$ où $K_1 = \sigma(K)$ est un corps isomorphe à K ; autrement dit $\tau = \sigma^*$; le corps L est isomorphe à K_1 par θ définissable dans K_1 , et la structure S' est isomorphe à S(L) par θ^* , lequel est définissable dans S' ; τ est donc la composition du transport de S(K) vers S(L) induit par $\theta \circ \sigma$, suivi de θ^{*-1} . **Fin**

Corollaire 4.5. *Soient* S *une structure constructible pleine, sur le corps algébriquement clos* K *, un corps infini* L *définissable dans* S *, et un automorphisme* τ *de* S *; alors* τ *se décompose en des homomorphismes constructibles et le transport de* S(L) *sur* $S(\sigma.L)$ *où* σ *est l'isomorphisme de corps induit par* τ *sur* L .

Démonstration. L'automorphisme τ est un transport de S = S(K) sur S = $S(K_1)$; par ailleurs, il existe un isomorphisme α de K dans L , définissable dans K , que τ conjugue sur un isomorphisme α' entre K_1 et $\theta.L$; τ se décompose donc en un transport de S(K) sur S(L) , un transport de S(L) sur $S(\sigma.L)$, et un transport de $S(\sigma.L)$ sur $S(K_1)$, les deux extrêmes étant définissables. **Fin**

Théorème 4.6. *Soit* S *une structure constructible pleine, sur le corps algébriquement clos* K *; si on est en caractéristique nulle, on peut définir sans paramètres dans* S *(ou plus exactement dans* S^{eq} *) une copie* L *du corps* K *; si on est en caractéristique* p *, on peut définir sans paramètres dans* S *une famille finie* $\{L_1 , ... L_n\}$ *de copies du corps* K .

Démonstration. Nous avons vu qu'on peut définir dans S un corps L_1 définissablement isomorphe à K , avec l'aide d'un uple de paramètres a_1 , qu'on peut supposer canonique pour la chose. Soit A l'ensemble des a qui permettent de définir un corps infini L_a de la même façon que a_1 permet de définir L_1 ; comme S élimine le quanteur "il existe une infinité de ... ", A est définissable dans S , et sans paramètres (il suffit d'ailleurs de déclarer que le corps est quadratiquement clos pour garantir son infinitude).

Comme S est pleine, pour tout a dans A il existe un isomorphisme σ_b entre L_1 et L_a définissable dans S à l'aide d'un uplet de paramètres b . Montrons, par induction sur le rang et le degré de Morley de A , que la définition de σ_b peut être obtenue uniformément lorsque a parcourt A ; pour cela, on considère (après avoir éventuellement remplacé S par une extension élémentaire saturée) a de rang maximum dans A ; la définition de son σ_b convient pour tout a' d'une partie A' de A de même rang de Morley que A , si bien que l'induction s'applique à $A-A'$; il ne reste plus qu'à faire un patchwork pour assembler les morceaux, ce qui peut conduire à allonger b pour pouvoir distinguer des cas. Nous obtenons finalement un ensemble définissable B , et, pour b parcourant B , une famille uniformément définissable d'isomorphismes σ_b entre L_1 et un L_a , de sorte que chaque L_a soit l'image d'au moins un σ_b . Naturellement, beaucoup de paramètres interviennent dans la définition de B , par exemple a_1 , ainsi que les paramètres de la décomposition de A .

Posant alors $\tau_c = \sigma_b \circ \sigma_{b'}^{-1}$, nous obtenons un ensemble C paramétrant une famille uniforme, close pour la prise d'inverse, d'isomorphismes entre un L_a et un $L_{a'}$, de sorte que pour chaque couple (a,a') dans $A\times A$ il y ait au moins un c dans C associé à un isomorphisme entre L_a et $L_{a'}$. En remplaçant C par la réunion des ensembles semblablement définis et ayant la même propriété, c'est-à-dire en incorporant au paramètre c ceux qui interviennent dans la définition de l'ensemble C , nous obtenons un ensemble D , qui a encore cette propriété, mais qui, lui, est définissable sans paramètres.

En caractéristique nulle, comme le corps L_a n'a pas d'automorphisme constructible autre que l'identité, il n'y a qu'un seul isomorphisme définissable entre L_a et $L_{a'}$. Nous considérons alors la réunion disjointe des L_a , qui est l'ensemble U des couples (a,x) , $a \in A$, $x \in L_a$; sur cet ensemble, la relation E suivante est définissable sans paramètres : $(a,x) \mathrel{E} (a',y)$ s'il existe d dans D tel que τ_d soit un isomorphisme entre L_a et $L_{a'}$ et que $\tau_d(x) = y$. E n'est rien d'autre que la relation d'équivalence qui déclare que x et y se correspondent par l'unique isomorphisme définissable entre L_a et $L_{a'}$, et le corps L cherché est le quotient U/E .

En caractéristique p , si σ et τ sont deux isomorphimes entre L_a et $L_{a'}$, on doit avoir $\sigma.x = (\tau.x)^q = \tau.(x^q)$, où $q = p^n$ pour un certain entier relatif n . Pour chaque a , nous considérons l'ensemble définissable des automorphismes y de L_a qui s'obtiennent par composition d'un isomorphisme de L_a vers un $L_{a'}$ et d'un isomorphisme de ce $L_{a'}$ vers L_a , tous deux paramétrés dans D . Ils forment une famille discrète, chacun d'eux étant de la forme $y = x\wedge p^n$, où n est un entier relatif ; par compacité, ils sont en nombre fini, et si on fixe a la relation exprimant que x et y dans L_a se correspondent par un de ces automorphismes s'écrit $(y\text{-}x\wedge q_1).(y\text{-}x\wedge q_2). \ldots . (x\text{-}y\wedge r_1).(x\text{-}y\wedge r_2). \ldots = 0$, où les q_i et les r_j sont des puissances positives de la caractéristique. Par élimination des quanteurs dans K , le degré de ce polynôme est borné (je ne vois pas pour cela de démonstration basée sur l'absence de propriété de recouvrement fini), et il existe un entier N , indépendant de a , tel que $-N \leq n \leq N$ pour tous les exposants n décrivant cette famille d'automorphismes de L_a .

On voit que, quels que soient a et a' dans A , il y a au plus $2N+1$ isomorphismes distincts entre L_a et $L_{a'}$ qui sont paramétrés par D . Nous pouvons les individualiser er en les ordonnant, en décrétant que $\sigma \leq \tau$ si $\tau.x = (\sigma.x)\wedge p^n$ pour un $n \geq 0$; l'existence de N permet de distinguer le plus petit, et obtenir une famille uniforme $\sigma_{aa'}$, indexée par $A\times A$, d'automorphismes de L_a dans $L_{a'}$.

Fixons maintenant un type π dans A de rang de Morley maximum. Nous définissons sur l'ensemble U la relation E_π suivante : $(a,x)\ E_\pi\ (a',y)$ si pour tout g dans π , indépendant de $\{a, x, a', y\}$, $\sigma_{ag}(x) = \sigma_{a'g}(y)$. E_π est une relation d'équivalence : pour vérifier qu'elle est transitive, on prend g dans π indépendant de tout le monde. Et elle est définissable car le type π l'est, mais sa définition demande l'emploi du paramètre (imaginaire) canonique de π , lequel est algébrique sur $\tilde{\varnothing}$. Posons $L_\pi = U/E_\pi$; les conjugués de L_π forment un ensemble fini, définissable sur $\varnothing$, de copies de K . **Fin**

Exemple 4.7. La relation E_π du Théorème 4.6 définit une famille d'isomorphismes uniques entre les L_a , et qui se composent, situation analogue à ce qui se produit du premier coup en caractéristique nulle. Pour se convaincre qu'il est nécessaire de stationnariser un type fort pour en arriver là, on considère l'exemple suivant, comme un prélude à la démonstration du théorème qui suit.

La structure S est la réunion de deux copies disjointes L_1 et L_2 du corps K de caractéristique p , avec deux isomorphismes θ_1 de L_1 vers L_2 et θ_2 de L_2 vers L_1 tels que $\theta_2.\theta_1(x) = x^p$. Symétriquement, $\theta_1.\theta_2(y) = y^p$; en effet, y est de la forme $y = \theta_1(x)$, et $\theta_1.\theta_2.\theta_1(x) = \theta_1(x^p) = y^p$.

Le langage de la structure S est formé de la relation d'équivalence $x\in L_1 \Leftrightarrow y\in L_1$, de la relation binaire $y = \theta_1.x \vee y = \theta_2.x$, qui est le graphe d'une permutation $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ de S , et des deux relations ternaires $z = x +_1 y \vee z = x +_2 y$ et $z = x \cdot_1 y \vee z = x \cdot_2 y$, où $+_1$, $+_2$, $\cdot_1$ et $\cdot_2$ sont les opérations des deux corps. Elle possède une copie constructible sur le sous-ensemble de

$K \times K$ défini par l'équation $x.y = 0$, qui est pleine car tout est définissable une fois qu'on fixe le zéro d'un des deux corps.

L'application θ est un automorphisme constructible de S , dont le carré vaut le frobenius sur chacun des deux corps. Il est centralisé par chaque automorphisme σ de S ; si σ fixe les deux corps, il est déterminé par sa restriction à L_1 (ou à L_2 !), qui est un automorphisme de corps, ce qui nous renvoie à une question ouverte depuis longtemps, antérieure à la Conjecture d'Algébricité, puisqu'elle est posée dans MACINTYRE 1971, et met en scène un corps de Wagner avant l'heure : *un corps de rang de Morley fini peut-il avoir un automorphisme définissable non constructible, c'est-à-dire autre qu'une puissance du frobenius ?*

Si σ échange les deux corps, $\theta.\sigma = \sigma.\theta$ les préserve. Il est de la forme $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$ où σ_1 est un isomorphisme de K_1 vers K_2 , et σ_2 est un isomorphisme de K_2 vers K_1 . La condition de commutation entre σ et θ s'exprime ainsi : $\sigma_2.\theta_1(x) = \theta_2.\sigma_1(x)$ et $\sigma_1.\theta_2(y) = \theta_1.\sigma_2(y)$ pour tout x de K_1 et tout y de K_2 . Si on pose $\sigma_1 = \theta_1.\alpha_1$ et $\sigma_2 = \theta_2.\alpha_2$, α_1 est un automorphisme de K_1 et α_2 est un automorphisme de K_2 , et cela donne $\alpha_2.\theta_1 = \theta_1.\alpha_1$ et $\alpha_1.\theta_2 = \theta_1.\alpha_2$.

Si σ est d'ordre fini, σ^2 induit des automorphismes d'ordre fini sur les corps algébriquement clos K_1 et K_2 , valant l'identité d'après le Théorème d'Artin : σ est donc une involution ; il en est de même si σ fait partie d'un groupe superstable d'automorphismes de S , car un théorème de Hrushovski affirme que tout groupe supertable d'automorphismes d'un corps algébriquement clos est réduit à l'identité (voir POIZAT 1987 p. 191).

Dire que σ est une involution signifie que $\sigma_1 = \sigma_2^{-1}$, ce qui donne $Id = \theta_1.\alpha_1.\theta_2.\alpha_2 = \theta_1.\theta_2.\alpha_2.\alpha_2$ et $\alpha_1^2 = (\theta_1.\theta_2)^{-1}$, ce qui est impossible car le frobenius n'est pas le carré d'un automorphisme de K_1 (en effet, si F est l'extension de degré d du corps premier F_p , son groupe d'automorphismes est cyclique et engendré par le frobenius). Nous voyons donc que S n'a pas d'automorphisme involutif, et que tout groupe superstable d'automorphismes de S est réduit à l'identité.

Plus généralement, si une structure contructible pleine permet de définir sans paramètres la réunion de deux corps $S = L_1 \cup L_2$, nous savons que cette dernière possède un automorphisme $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ définissable sans paramètres ; comme $\theta_1.\theta_2$ doit être constructible, c'est une puissance $q°$ du frobenius ; si q est impair, S n'a pas d'automorphisme involutif ; il en a un seul (qui est constructible) si q est pair, et dans ce cas il y a un troisième corps L_3 qui est définissable sans paramètres, qui est le quotient de S par son unique automorphisme involutif.

J'énonce le théorème suivant sous une hypothèse de superstabilité pour exprimer ma gratitude à Hrushovski, dont le résultat est à peu près évident dans le cas de rang de Morley fini.

Corollaire 4.8. *Soient* S *une structure constructible pleine, sur un corps* K *algébriquement clos de caractéristique nulle, et* τ *un automorphisme de* S .
(i) *En caractéristique nulle, si* τ *est d'ordre fini,* τ^2 *est constructible, c'est-à-dire définissable dans* S *; si la structure* (S, τ) *est superstable,* τ *est constructible.*
(ii) *En caractéristique* p *, si* τ *est d'ordre fini, il est constructible ; s'il appartient à un groupe* G *d'automorphismes de* S *tel que la structure* (S, G) *soit superstable,* τ *est constructible.*

Démonstration. (i) Soit L une copie de K définissable sans paramètres ; τ induit un automorphisme σ de ce corps L . Si τ est d'ordre fini, le Théorème d'Artin nous assure que σ vaut l'identité, sauf si c'est la conjugaison modulo un sous-corps réel-clos de L sur lequel il est de degré deux : on est donc sûr que σ^2 vaut l'identité. Si (S,σ) est superstable, σ vaut également l'identité, selon Hrushovski (POIZAT 1987 p. 191). Le résultat suit donc du Corollaire 4.5.
(ii) En caractéristique p , nous disposons seulement de ce que nous appelons un *multicorps* définissable sans paramètres, formé de L_1 , ... L_n , et d'une famille $\theta = \{\ldots\ \theta_{ij}, \ldots\}$ d'isomorphismes de corps, θ_{ij} allant de L_i vers L_j , pour $i \neq j$. Nous considérons cette structure dans un langage semblable à celui de l'exemple ci-dessus. Notre automorphisme induit un automorphisme σ de ce multicorps, ce qui signifie que si $\sigma(L_i) = L_{i'}$ et $\sigma(L_j) = L_{j'}$, alors $\sigma(\theta_{ij}) = \theta_{i'j'}$.

Si σ fixe l'un des corps, nos hypothèses impliquent qu'il le fixe point-par-point, et nous avons gagné d'après le Corollaire 4.5 ; d'après l'étude que nous avons faite de l'Exemple 4.7, c'est également vrai si σ échange deux de ces corps, car alors il en fixe un troisième.

Pour traiter le cas général, nous considérons un cycle de longueur q de σ , que nous notons (L_1 , L_2 , ... L_q) ; on a donc $\sigma(L_i) = L_{i+1}$, et nous nommons θ_i la restriction de θ à L_i , expédiant ce dernier sur L_{i+1} . L'hypothèse implique que σ^q agit comme l'identité sur chacun des corps L_i .

La restriction σ_i de σ à L_i s'écrit $\theta_i.\beta_i$ où β_i est un automorphisme du corps L_i , et la commutation de σ et de τ s'exprime par : $\theta_{i+1}.\theta_i.\beta_i = \theta_{i+1}.\beta_{i+1}.\theta_i$, soit encore $\beta_{i+1}.\theta_\iota = \theta_i.\beta_i$.

Par ailleurs $\theta_q. \ldots . \theta_2. \theta_1$ est un automorphisme α constructible du corps L_1 , c'est-à-dire une puissance du Frobenius. En conclusion, la restriction de σ^q à L_1 vaut $Id = \theta_q.\beta_q. \ldots . \theta_2.\beta_2.\theta_1.\beta_1 = \theta_q. \ldots .\theta_2.\theta_1.\beta_1{}^q = \alpha.\beta_1{}^q$. Il en suit que β_1 est lui aussi une puissance du frobenius, et qu'en fait tous les β_i sont égaux dans leurs corps respectifs à cette même puissance du frobenius.

Pour pouvoir appliquer le Corollaire 4.5, on observe que θ agit sur le corps L , quotient du multicorps par son unique automorphisme d'ordre q , ou bien plus simplement que chacun des σ_i est constructible. **Fin**

5. Retour aux groupes algébriques simples

L'idéologie gouvernant cet article, c'est qu'on peut démontrer des résultats subtils de Géométrie Algébrique par des arguments triviaux de Théorie des Modèles. Ce genre de sport à ses limites, et, quand on parle d'un groupe algébrique simple G , pour pouvoir appliquer ces résultats il est souvent nécessaire d'aller voir de plus près la structure de G .

C'est ainsi que dans G les borels ainsi que leurs tores maximaux sont conjugués (voir ABC 2008, p. 119), mais il n'est pas clair pour moi qu'on puisse en déduire que les différentes manières de définir une copie de K dans les borels de G soient conjuguées par les automorphismes intérieurs de G , comme elles le sont si $G = PSL_2$. D'où cette question extrêmement naïve :

Question 4. *Dans un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique* p *, peut-on définir sans paramètres une copie du corps de base ?*

Par ailleurs le Corollaire 4.4 appliqué aux groupes donne ceci :

Corollaire 5.1. *Tout isomorphisme entre un groupe algébrique simple* $G = G(K)$ *, sur le corps* K *algébriquement clos, et un groupe* $H = H(L)$ *algébrique sur le corps algébriquement clos* L *, lorsque ces deux groupes sont munis de leur structures de variétés respectives, envoie constructible sur constructible et fermé de Zariski sur fermé de Zariski.*

Démonstration. Tout isomorphisme échange les ensembles définissables, qui sont dans le cas présent les constructibles ; quand on considère les groupes comme des variétés algébriques, les transports de structure échangent les fermés de Zariski ; il en est de même des automorphismes de groupe constructibles, car ce sont des morphismes en caractéristique nulle, et des quasi-morphismes en caractéristique p (combinaisons de morphismes et de puissances négatives du Frobenius). **Fin**

Ce Corollaire 5.1 enveloppe d'un mystère ténébreux la Conjecture d'Algébricité : si elle est vérifiée, il y aura une façon intrinsèque de distinguer les fermés de Zariski parmi les ensembles définissables dans les groupes simples nus ! Une réciproque est donnée par HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996.

D'autre part, nous avons montré que, si H est un groupe de rang de Morley fini (ou même seulement superstable) d'automorphismes de G , il est composé d'automorphismes constructibles. Mais, pour les applications, on a besoin d'un résultat plus fort : sa composante connexe $H°$ est formée d'automorphismes intérieurs, comme il est montré - un peu rapidement à mon goût - dans ABC 2008 p. 134, qui s'appuie sur un théorème de HUMPHREYS 1981 qu'il vaut la peine de citer in extenso :

Theorem (HUMPHREYS 1981, p.160). *Let G be semisimple.*
(a) Aut G = (Int G)D.
(b) *The natural map* $D \to \Gamma$ *induces a monomorphism* Aut G/Int $G \to \Gamma$ *; in particular,* Int G *has finite index in* Aut G.

Pour Humphreys, Aut G désigne le groupe des automorphismes du groupe G qui sont, ainsi que leurs inverses, des morphismes de la variété de G : ce sont des applications polynomiales puisque la variété de G est affine. En caractéristique nulle, ils sont identiques aux automorphismes constructibles du groupe G . En caractéristique p , les automorphismes constructibles de G sont des quasi-morphismes ; comme G est un groupe affine définissable sans paramètres, ils sont de la forme $\alpha.\varphi$ où α est un polynôme et φ l'automorphisme induit par une puissance du frobenius ; on peut supposer que α n'est pas un polynôme en les puissances p° des inconnues ; l'inverse de α est alors de la même forme $\beta.\varphi'$, $\alpha.\beta.\varphi'^{-1} = \mathrm{Id}$, et en différentiant on voit que φ' est l'identité, si bien que α est un isomorphisme au sens géométrique.

Int G est le groupe des automorphismes intérieurs, isomorphe à G , D est le groupe des automorphismes qui fixent un borel et un tore maximal donnés, et Γ est le groupe (fini) des automorphismes du système de racines associé.

On en déduit, suivant Altinel, Borovik et Cherlin, que Aut G est définissable, que sa composante connexe est formée des automorphismes intérieurs, et que c'est le plus grand groupe H d'automorphismes de G tel que (G,H) soit superstable ; en effet, on peut supposer que H contient Aut G , et alors le quotient H/Aut G est isomorphe à un groupe superstable d'automorphismes du corps K , qui doit être trivial.

L'amour de la généralité m'invite à poser la question suivante :

Question 5. *Le groupe des automorphismes constructibles d'une structure constructible pleine* S *sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est il définissable ? Est-ce le plus grand groupe superstable d'auromorphismes de* S *? Peut-on formuler une question semblable en caractéristique* p *?*

Et celui de ma spécialité mathématique favorite m'invite à poser une question plus vague, de même nature que la première :

Question 6. *Peut-on trouver une raison purement modèle-théorique expliquant pourquoi, dans un contexte de rang de Morley fini, la composante connexe d'un groupe définissable d'automorphismes d'un groupe algébrique simple est formée d'automorphismes intérieurs ?*

Références

ABC 2008 Tuna Altinel, A.V. Borovik & Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley Rank,* American Mathematical Society

BHMPW 2009 Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martín Pizarro & Frank Wagner, *Die böse Farbe,* Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 8, 415-443

BMPZ 2007 Andreas Baudisch, Amador Martin-Pizarro & Martin Ziegler, *Red Fields,* the Journal of Symbolic logic, 72, 207-225

BOREL 1970 Armand Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups,* Lecture Notes in Mathematics 131

BOREL-TITS 1973 Armand Borel & Jacques Tits, *Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples,* Annals of Mathematics, 97, 499-571

BOROVIK 1984 Aleksandr Vasil'ević Borovik, *Théorie des groupes finis et groupes incomptablement catégoriques* (en russe), prépublication n° 511, Novosibirsk

BOROVIK 2023 Id., *Finite group actions on abelian groups of finite Morley rank,* à paraître au Journal of Model Theory

BOROVIK-NESIN 1994 Aleksandr Vasil'ević Borovik & Ali Azizoğlu Nesin, *Groups of Finite Morley Rank,* Clarendon Press, Oxford

CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, *Groups of small Morley rank,* Annals of Mathematical Logic, 17, 1-23

HUMPHREYS 1981 James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups,* Springer

HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1996 Ehud Hrushovski & Boris Zil'ber, *Zariski geometries,* Journal of the American Mathematical Society, 9, 1-56

MACINTYRE 1971 Angus Macintyre, *On ω_1-categorical theories of fields,* Fundamenta Mathematicae, 71, 1-25

MUSTAFIN-POIZAT 2006 Yerulan Mustafin & Bruno Poizat, *Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$,* Journal of Agebra, 297, 155-167

POIZAT 1983 Bruno POIZAT, *Une théorie de Galois imaginaire,* the Journal of Symbolic Logic, 48, 1151-1170

POIZAT 1985 Id., *Cours de Théorie des Modèles,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

POIZAT 1987 Id., *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

POIZAT 1988 Id., *MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense,* the Journal of Symbolic Logic, 53, 124-131

POIZAT 2001 Id., *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner,* the Journal of Symbolic Logic, 66, 1637-1646

POIZAT 2001a Id., *L'égalité au cube,* the Journal of Symbolic Logic, 66, 1647-1676

STEINBERG 1974 Robert Steinberg, *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups,* Séminaire Bourbaki, n° 435, 307-426

THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups,* Archiv der Math., 41, 103-116

WAGNER 2001 Frank Wagner, *Fields of finite Morley rank,* the Journal of Symbolic Logic, 66, 703-706

WAGNER 2003 Id., *Bad fields in positive characteristic,* Bulletin of the London Mathematical Society, 35, 499-502

WEIL 1948 André Weil, *Foundations of Algebraic Geometry,* American Mathematical Society

ZIL'BER 1977 Boris Iosifović Zil'ber, *Groupes et anneaux de théorie catégorique* (en russe), Fundamenta Mathematicae, 55, 173-188

ZIL'BER 1980 Id., *Totally categorical theories; structural properties and the non-finite axiomatizability,* Lecture Notes in Mathematics, 834, 381-410

ZIL'BER 1984 Id., *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields,* Colloquium Mathematicum, 48, 173-180

5 juillet 2023