Quelques modestes compléments aux travaux de Messieurs Mark DeBonis, Franz Delahan, David Epstein et Ali Nesin sur les Groupes de Frobenius de rang de Morley fini

Bruno POIZAT[1]

Version provisoire, février-mars 2022

Nasılsın Hoca ?

Önsöz. Bu makala, Ali Nesin'in takımın tarafından sonlu Morley ranklı Frobenius gruplar üzerine yapılan işlere yeni bir bakış atıyor ; komplemanı içinde 2-eleman olan gruplar, psödo-yerli-sonlu gruplar, bağlayılan gruplar üstünde has bir dikkat veriyoruz.

Резюме. Существуют ли неабелевы связные слабо категоричные группы, неизоморфные алгебраическим группам над алгебраически замкнутым полем ? Существуют ли простые категоричные группы, отличные от алгебраических над алгебраически замкнутым полем ?

Kurze Susammenfassung. In godes minna ind in thes christiânes folches ind unser bêdhêro gehaltnissi, fon thesemo dage frammordes, sô fram sô mir got gewizci indi mahd furgibit, sô haldih tesan mînan bruodher, sôsô man mit rehtû sinan bruodher scal, in thiû thaz er mig sô sama duo, indi mit Ludheren in nohheinin thing ne gegango, thô minan willon imo ce scadhen werdhhên.

Abstract. This paper casts a new look on the works of Ali Nesin and his team concerning Frobenius groups of finite Morley rank, in particular those which have an involution in their complement, or are pseudo-locally-finite, or are connected.

Résumé. Ce papier procède à un réexamen des travaux de l'équipe de Ali Nesin sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini, en particulier sur ceux qui ont une involution dans leur complément, ceux qui sont pseudo-localement-finis, et ceux qui sont connexes.

Mots-clefs. Groupes de Frobenius, localement finis, algébriques, de rang de Morley fini.

Classification des sujets selon la Société Américaine de Mathématiques. 20F11, 20E32, 20F50, 14L99.

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

Nous dirons que deux sous-groupes du groupe F sont *disjoints* si leur intsersection est réduite à l'élément neutre, et qu'un sous-groupe T propre de F (c'est-à-dire $\neq \{1\}$ et $\neq F$) est *malnormal* s'il est autonormalisant et disjoint de ses conjugués. Cela signifie encore que, pour tout a hors de T, $T \cap a.T.a^{-1} = \{1\}$, ou encore que, dans l'action de F sur $F\nearrow T$, le fixateur de deux points est toujours réduit à l'identité.

Un *groupe de Frobenius* est un groupe F possédant un sous-groupe malnormal T ; on note $U(T)$ l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun conjugué de T , augmenté de l'élément neutre.

Nous utiliserons tout le temps les quatre faits évidents suivants, que nous nous abstenons de démontrer pour ne pas risquer d'affecter ce que les américains appellent le sentiment de self respect de nos lecteurs.

Lemme 0. (i) *L'intersection de deux sous-groupes de* F *malnormaux non disjoints est aussi malnormale.*
(ii) *Si* T *est malnormal dans* F *, et si* H *est un sous-groupe de* F *qui n'est ni inclus dans* T *, ni disjoint de* T *, alors* $H \cap T$ *est malnormal dans* H *:* H *est un groupe de Frobenius, ou bien est inclus dans un conjugué de* T *, ou bien est inclus dans* $U(T)$.
(iii) *Soient* T *malnormal dans* F *, et* $a \neq 1$ *un point de* F *; s'il est dans* T *, son centralisateur est inclus dans* T *; s'il est dans* $U(T)$ *, son centralisateur est inclus dans* $U(T)$ *; tout sous-groupe normal de* F *, qui est abélien, ou même a un centre non trivial, est inclus dans* $U(T)$. *Si* S *est un sous-groupe normal non trivial de* T *, ce dernier est son normalisateur.*
(iv) *Si* T *est un sous-groupe malnormal de* H *et* H *est un sous-groupe malnormal de* F *,* T *est malnormal dans* F .

Si F est engendré par T et par un sous-groupe V normal et disjoint de T (F est alors le produit semi-direct de V par T), on dit qu'il est *scindé* ; V est alors inclus dans $U(T)$, mais ne lui est pas forcément égal : quand cela se produit, nous dirons que F est *scindé nettement*.

A l'autre extrême, nous dirons que T *remplit* F si $U(T)$ est réduit à l'élément neutre, et que F est *mauvais* s'il possède un sous-groupe malnormal le remplissant ; cette terminologie de remplissage a été introduite par JALIGOT 2001. Le premier *bad group*, qui est de rang de Morley trois, est apparu dans CHERLIN 1979 ; en fait, sa malignité a été montrée dans NESIN 1989 ; il a fallu attendre FRECON 2018 pour qu'on se rende compte qu'il n'existe pas. La possible existence de mauvais groupes de rang de Morley fini reste un obstacle majeur à la Conjecture d'Algébricité.

Les groupes de Frobenius finis ont une structure très particulière, qui intervient lourdement dans la classification des groupes simples finis ; en effet, dans le cas fini, pour chaque T malnormal, l'ensemble $U(T)$ est un sous-groupe non trivial (FROBENIUS 1901), qui est nilpotent (THOMPSON 1959) ; ce résultat de Thompson est un prélude au théorème de FEIT-THOMPSON 1963.

Quand le groupe T contient une involution i , il n'est pas dur de voir que U(T) est un groupe abélien inversé par i ; quand U(T) est un groupe résoluble, ce n'est pas la mer à boire de montrer qu'il est nilpotent ; mais, dans le cas général, ce sont des résultats difficiles, s'appuyant sur des calculs de caractères dont on ne connaît pas d'équivalents en rang de Morley fini.

Nous allons faire notre possible pour tenir un discours nouveau sur les groupes de Frobenius de rang de Morley fini. Il est remarquable que ces groupes occupent une place substantielle, p. 203-219, de BOROVIK-NESIN 1994, dont la référence sera B&N dans la suite de cet article, mais que les résultats obtenus sont peu exploités dans le reste du livre (probablement parce qu'ils ne sont pas assez décisifs), pas plus que dans d'autres travaux sur la Conjecture d'Algébricité. C'est ainsi que l'expression *groupe de Frobenius* n'apparaît pas dans ABC 2008.

Dans la première section, nous démontrons quelques résultats faciles sur les groupes de Frobenius finis, en faisant semblant d'ignorer les théorèmes de Frobenius et de Thompson. Nous ne faisons pas cela pour le plaisir de redécouvrir des trivialités, mais parce que nous espérons pouvoir transférer certaines démonstrations aux groupes de Frobenius *connexes* de rang de Morley fini, en remplaçant les calculs multiplicatifs sur les cardinalités par des calculs additifs sur les rangs, combinés avec des arguments de généricité. Nous améliorons aussi le Lemma 11.20 p. 207 de B&N, concernant les groupes de Frobenius de rang de Morley fini ayant un sous-groupe malnormal contenant une involution.

Dans la deuxième section nous examinons ce qui peut s'opposer à la netteté des scissions dans un contexte de rang de Morley fini.

Dans la troisième section, nous étendons les propriétés des groupes de Frobenius finis à ceux qui sont pseudo-localement-finis et ont un rang de Morley fini, aux groupes algébriques en particulier.

La quatrième section etudie principalement ceux des groupes de Frobenius de rang de Morley fini qui sont connexes ; nous constaterons que, dans leur cas, tous les groupes utiles sont définissables et connexes (ce qu'annonce le Corollary 11.24, p. 209 de B&N).

Enfin, la dernière section propose l'étude d'un exemple minimal, ce qui nous fait revisiter les problèmes de comportement des corps en situation de rang de Morley fini.

Cette étude prolonge donc les travaux de DEBONIS-NESIN 1994, DELAHAN-NESIN 1993 & 1995, EPSTEIN-NESIN 1994, NESIN 1992 & 1994, qui sont exposés dans B&N, p. 203-219 ; nous redémontrons tout ce dont nous faisons un usage essentiel, en particulier la facile, mais fondamentale, Proposition 3.1 de définissabilité, qui leur appartient. Ces auteurs ont généralisé des résultats algébriques dans des contextes particuliers (présence d'une involution dans T , solvabilité de U(T) , etc.) où les propriétés des groupes de

Frobenius finis sont relativement simples à établir ; assez souvent, les groupes connexes constituent le cas facile de leurs théorèmes. Nous, au contraire, restons résolument à l'intérieur de la Théorie des modèles, en exploitant l'unicité du générique pour tenter d'isoler les pathologies des groupes de Frobenius connexes (quand l'Algèbre est inévitable, nous nous reposons sur B&N !). Il faut dire que, pour quelqu'un qui est familier des groupes finis, ou des groupes algébriques, les groupes de rang de Morley fini connexes sont les objets les plus troublants qui soient, leur propriété la plus mystérieuse étant l'existence potentielle.

La fin de cette introduction est un lieu idéal pour exprimer ma reconnaissance très sincère à Aleksandr Vasilievich, qui a bouleversé ma vie scientifique en m'expliquant, il y a trente-six ans, que les involutions étaient des choses qui avaient une certaine importance en Théorie des groupes.

Exemple 1. Soient V un groupe commutatif et F le produit semi-direct de V par une involution i qui l'inverse ; $T = \{1, i\}$ est malnormal dans F si et seulement s'il est égal à son centralisateur, c'est-à-dire si V ne contient pas d'involutions ; dans ce cas, $U(T) = V$ si et seulement V est divisible par 2 .

Par exemple, si V est le groupe cyclique infini Z , F est le groupe diédral infini, isomorphe au groupe des transformations affines $(-1)^n.x + m$ de l'anneau Z des entiers ; les conjuguées de l'involution $-x$ sont les $-x + 2m$, si bien que $U(T)$ est formé des $x + m$ et des $-x + 2m + 1$: ce n'est pas un groupe. Il y a deux classes de conjugaison d'involutions dans F . On remarque que le quotient de ce groupe par $2.Z$ n'est pas un groupe de Frobenius.

Exemple 2. OLSHANSKII 1982 construit, pour chaque nombre premier p assez grand, des groupes O_p dénombrables dont tous les sous-groupes propres ont exactement p éléments ; chacun d'entre eux est malnormal, et ces groupes de Frobenius O_p ne sont pas scindés puisqu'ils sont simples ; ils sont même mauvais si jamais tous leurs sous-groupes propres sont conjugués ; comme ils n'ont pas de sous-groupes abéliens infinis, ils ne peuvent être superstables.

Par compacité, on obtient à la limite des groupes O_∞ qui vérifient :
(i) le centralisateur de chaque $a \neq 1$ est un groupe abélien sans torsion divisible,
(ii) le groupe n'est pas commutatif, et si a et b ne commutent pas, leurs centralisateurs sont disjoints,
(iii) tout sous-groupe définissable propre est le centralisateur d'un point.

L'état présent de nos connaissances ne permet pas d'exclure que certains d'entre eux soient des mauvais groupes de rang de Morley quatre.

Exemple 3. Dans un groupe libre non commutatif, les sous-groupes commutatifs sont cycliques et malnormaux. Les groupes libres sont la source de nombreuses constructions de groupes de Frobenius exotiques.

Section 1. Quelques résultats faciles sur les groupes de Frobenius finis

Lemme 1.1. *Soient un groupe fini* F *et un de ses sous-groupes propres* T .
(i) *Le nombre de points de* $U(T)$ *est supérieur ou égal à l'indice de* T *dans* F *; il lui est égal si et seulement si* T *est malnormal.*
(ii) *Il n'y a pas de mauvais groupe de Frobenius fini.*
Si T *est malnormal :*
(iii) F *est scindé relativement à* T *si et seulement si* $U(T)$ *est un groupe ;*
(iv) F *est engendré par* $U(T)$ *et* T *;*
(v) *Si* V *est un sous-groupe normal dans* F *strictement inclus dans* $U(T)$ *, alors* $T_1 = T/V$ *est malnormal dans* $F_1 = F/V$ *, et* $U(T_1) = U(T)/V$ *;*
(vi) *Si* T *contient une involution* i *, il n'en contient pas d'autres et* $U(T)$ *est un groupe commutatif sans involutions inversé par* i .

Démonstration. (i) Notons t et f les ordres respectifs de T et de F . Si T est malnormal, on compte, en mettant de côté l'élément neutre, le nombre de points dans l'union des conjugués de T , ce qui donne $1 + (t - 1).f/t = f + 1 - f/t$; le nombre de point de $U(T)$ est donc $f - (f + 1 - f/t) + 1 = f/t$. Si T n'est pas malnormal, ou bien son nombre de conjugués est inférieur à son indice, ou bien ils ne sont pas disjoints.
(ii) f/t vaut au moins 3 quand T n'est pas normal dans F .
(iii) Si $U(T)$ est un groupe, il est normal dans F et disjoint de T, si bien que le groupe G engendré par $U(T)$ et T est leur produit semi-direct. D'après le point (i), F et G ont même ordre, et sont égaux.

Si F est scindé, produit semi-direct de V par T , V est inclus dans $U(T)$ car disjoint de T et de ses conjugués (il est normal dans F) ; comme son nombre d'éléments est l'indice de T dans F , c'est $U(T)$ tout entier : on voit que la scission est nette.
(iv) Soit G le groupe engendré par T et $U(T)$; s'il existe a hors de G , le groupe $G^a = a.G.a^{-1}$ contient $U(T)$, qui est un ensemble normal, et les conjugués de T qui sont dans G sont disjoints de ceux qui sont dans G^a ; par conséquent l'intersection de G et de G^a est réduite à $U(T)$, qui est un groupe ; F est donc le produit semi-direct de $U(T)$ par T , ce qui contrarie l'hypothèse.
(v) On remarque que T est isomorphe à T_1 puisqu'il est disjoint de V . Notons f , t et v les ordres respectifs de F , T et V ; l'indice de T_1 dans F_1 vaut f/tv , et, comme $v < f/t$, T_1 est un sous-groupe propre de F_1 . Comme $V.T \cap U(T) = V$, et que c'est également vrai si on remplace T par un de ses conjugués, $U(T_1)$ est formé des points dont l'image réciproque est dans $U(T)$; il a donc f/tv éléments.
(vi) Soit j une involution dans un autre conjugué de T ; i comme j inversent par conjugaison leur produit ij , qui ne peut être dans un conjugué de T car cela forcerait i et j à être dans ce dernier. Ce produit ij est donc dans $U(T)$; comme en prenant une involution j dans chaque conjugué de T on a déjà le compte, il n'y a qu'une seule involution par conjugué de T , et $U(T)$ est

l'ensemble des points inversés par i ; il ne peut pas contenir d'involutions, qui commuteraient avec i . Comme $U(T)$ est inversé par chaque involution, le produit de deux involutions le centralise, si bien que $U(T)$ est le centralisateur de chacun de ses points $\neq 1$: c'est un groupe commutatif. **Fin**

Lemme 1.2. (i) *Si un groupe fini a deux sous-groupes malnormaux, chacun intersecte non trivialement un conjugué de l'autre.*
(ii) *Dans un groupe de Frobenius fini, les sous-groupes malnormaux minimaux sont conjugués.*
(iii) *Soient* T *malnormal dans* F *fini, et* G *un sous-groupe de* F *contenant* T *; alors tout conjugué de* T *qui intersecte* G *non trivialement est inclus dans* G , *et conjugué de* T *dans* G *;* $G \cap U(T)$ *est formé de* 1 *et des points de* G *qui ne sont dans aucun conjugué de* T *au sens de* G *; si* G *est engendré par* A *et* T *, il est aussi engendré par* T *et les* $T^a = a.T.a^{-1}$ *, où* a *parcourt* A .

Démonstration. (i) Si les conjugués de T étaient tous disjoints de ceux de T_1 , le nombre d'éléments conjugués d'un point de T ou d'un point de T_1 vaudrait $1 + 2f - f/t - f/t_1 \geq 2f - 5 > f$, car $f \geq 6$ puisque F n'est pas commutatif.
(ii) L'intersection de deux sous-groupes malnormaux est triviale ou malnormale.
(iii) Soit T_1 un conjugué de T coupant G non trivialement ; d'après (i), cette intersection est conjuguée de T à l'intérieur de G . Si un point $g \neq 1$ de G n'appartient pas à $U(T)$, il est dans un conjugué de T au sens de G . Le groupe H engendré par T et T^a contient a : en effet, T^a est conjugué de T par un h de H , et a est dans $h.T$. **Fin**

Lemme 1.3. *Soit* F *un groupe fini avec un sous-groupe malnormal* T *; on suppose que les centralisateurs de deux points de* $U(T)$ *ne sont jamais disjoints ; alors* $U(T)$ *est un groupe et* T *est malnormal maximal.*

Démonstration. Prenons u et $v \neq 1$ dans $U(T)$, et $w \neq 1$ qui commute avec chacun d'eux ; comme w commute avec u , il est dans $U(T)$, ainsi que $u.v$ qui commute avec w . Soit G un surgroupe propre de T ; comme ce n'est pas un mauvais groupe, il doit contenir un point u de $U(T)$ non trivial ; si a est hors de G , G^a contient $v = u^a$, et si G est malnormal aucun point $\neq 1$ de peut commuter avec u et v . **Fin**

Remarque. D'après les théorèmes de Frobenius et de Thompson, l'hypothèse du Lemme 1.3 est toujours vérifiée, si bien que, dans un groupe de Frobenius fini F , les sous-groupes malnormaux T sont tous maximaux, et donc aussi tous minimaux, et tous conjugués ; le groupe nilpotent $U(T)$ est uniquement déterminé (c'est le plus grand sous-groupe nilpotent normal dans F).

La proposition suivante précise les p. 207-208 de B&N ; elle donne l'espoir qu'il reste quelques épis à glaner dans la relecture des œuvres de nos glorieux précurseurs. Il s'agit typiquement d'un argument fondé sur un comptage brutal dans le cas des groupes finis, mais qui est aussi susceptible d'une analyse locale se généralisant aux groupes de rang de Morley fini, principalement lorsqu'il est question d'involutions ; le premier résultat de ce genre est la conjugaison des 2-Sylows, montrée dans BOROVIK-POIZAT 1990.

Nous qualifions de *points réels* les produits de deux involutions.

Proposition 1.4. *Soit* F *un groupe de Frobenius de rang de Morley fini, avec un sous-groupe malnormal* T *contenant une involution* i .
(i) T *ne contient pas de deuxième involution : il est le centralisateur de* i *; deux involutions de* F *sont conjuguées par une unique involution ; tout point de* F *s'écrit de manière unique comme produit d'une involution et d'un élément de* T *; les points réels sont dans* $U(T)$ *, et ce sont les commutateurs d'involutions.*
(ii) *Si le symmétron* I *des involutions n'est pas connexe,* i *n'est pas dans* $F°$ *;* $RM(T) \leq RM(I)$ *;* $RM(F) = RM(T) + RM(I)$ *;* $d°M(F) = d°M(T) \times d°M(I)$.
(iii) *Les centralisateurs des points réels* $\neq 1$ *sont commutatifs et autocentralisants ; ce sont les sous-groupes définissables maximaux contenus dans* $U(T)$ *et normalisés pat une involution.*
(iv) *Si le groupe engendré par les involutions est* 2*-résoluble,* $U(T)$ *est un groupe commutatif formé des points réels, qui sont tous inversés par chaque involution, et* F *est le produit semi-direct de* $U(T)$ *et de* T *. Si* T *est infini,* $U(T)$ *est connexe.*
(v) *Dans le cas contraire, il n'y a aucun sous-groupe définissable non trivial contenu dans* $U(T)$ *et normalisé par toutes les involutions ;* F *et* T *sont infinis ;* F *a un plus petit sous-groupe définissable normal, qui est un groupe de Frobenius simple.*

Démonstration. (i) Soit j une involution qui n'est pas dans T , c'est-à-dire qui est dans $U(T)$ ou dans un autre conjugué de T ; i comme j inversent leur produit ij , qui ne peut être dans un conjugué T^a de T , car cela forcerait i et j à être dans ce conjugué : il est donc dans $U(T)$, et le plus petit sous-groupe définissable $A(ij)$ le contenant est inclus dans $U(T)$, car il est commutatif ; il est normalisé par i , qui inverse chacun de ses points, si bien qu'il ne contient pas d'involutions. Il est donc uniquement 2-divisible, et la racine carrée $(ij)^{1/2}$ de ij est inversée par i : elle est de la forme ik , où k est une involution, et $ik.ik = ij$, soit $kik = j$; comme j est conjuguée de i (par une involution), elle ne peut être dans $U(T)$.

Si i et i' sont deux involutions de T et j est une involution dans un autre conjugué de T , il existe une involution k qui conjugue i et j , et une involution k' qui conjugue i' et j ; le produit $k'.k$ conjugue i et i' ; s'il est $\neq 1$, il doit être dans T , et comme il est inversé par k et par k' , ces derniers doivent aussi être dans T , ce qui est une situation absurde. Donc $k = k'$ et $i = i'$; i , étant la seule involution de T , est centrale dans T .

Le produit de deux involutions est toujours dans $U(T)$, soit qu'elles soient égales, soit qu'elles appartiennent à des conjugués de T différents. Si deux involutions k et k' conjuguent i et j , leur produit k.k' est dans U(T) et commute avec i ; donc k.k' = 1 , k = k' . Comme T est le centralisateur de i , tout point a est congru modulo T à l'involution qui conjugue i et aia^{-1} .

Quel que soit a , le commutateur $[a,i] = aia^{-1}.i$ est bien produit de deux involutions ; réciproquement, toute involution j est conjugué de i par une involution k , si bien que ji = kik.i = [k,i] .

(ii) Dire que deux involutions sont conjuguées par une unique involution signifie précisément qu'elles forment un *symétron* (POIZAT 2021) ; beaucoup de propriétés liées aux types génériques, qui sont bien connues pour les groupes, sont aussi valables pour les symétrons de rang de Morley fini ; c'est ainsi que, s'il est de degré de Morley d , I se décompose de manière unique en d sous-symétrons deux-à-deux disjoints de même rang de Morley, qu'on appelle ses *composantes connexes*. L'involution i normalise sa propre composante connexe et échange les autres par paires (d est donc impair). Comme F permute les composantes connexes de I , F° les fixe, ce que ne fait pas i . (Ou plus simplement : si i est dans F° , ce dernier est un groupe de Frobenius dont chaque point s'écrit de manière unique comme produit d'un point de T° et d'un point de I).

Aucun point ≠ 1 de T ne commute avec une involution j ≠ i , si bien que les conjuguées de j par les points de T sont toutes distinctes ; le reste suit de la décomposition F = I.T .

(iii) Soit A un sous-groupe définissable, normalisé par i et contenu dans U(T) ; il n'a pas d'involutions, et, pour chacun de ses points a , i commute avec le milieu de a et de i.a.i ; ce milieu vaut donc 1 , ce qui signifie que A est un groupe abélien inversé par i ; il en est de même de son centralisateur.

Notons au passage que toutes ces propriétés s'expriment en termes de la relation ternaire entre involutions " i.j.k est une involution".

(iv) Dire que les involutions engendrent un groupe 2-résoluble, c'est précisément dire que les points réels forment un groupe commutatif R , inversé par chaque involution, ou encore que le produit de trois involutions est toujours une involution. Dans ce cas F = T.I = Ti.iI = T.R = R.T . Il sera très bientôt expliqué, dans la section suivante, pourquoi la commutativité de R implique que U(T) = R .

A propos de la connexité de U(T) , nous renvoyons notre lecteur à l'argument très simple, mettant en œuvre le quotient F/U(T)° , utilisé dans la Proposition 3.2.(ii) qui va suivre.

(v) D'après le point (ii), un sous-groupe définissable normal et contenu dans U(T) doit être abélien et inversé par toutes les involutions, et donc centralisé par tous les points réels ; si ces derniers ne commutent pas, il est trivial. Si F est fini, nous sommes dans le cas précédent d'après le Lemme 1.1.(vi) ; si F est infini et T est fini, comme tous ses points ≠ 1 ont un centralisateur fini il est disjoint de F° (Corollary 4.18 de ABC 2008 ; on peut faire plus simple), si bien que F° est inclus dans U(T) .

Pour la fin nous prenons également un peu d'avance, et invitons nos lectrices à consulter notre Proposition 4.5 : le radical de $F°$ est trivial, et son socle est composé d'un unique groupe de Frobenius simple. **Fin**

Notre symétron nous renvoie à un autre classique de la théorie des groupes finis, le Théorème Z* de Glauberman (voir la Question B.5, p. 355 de B&N) ; s'il n'est pas abélien, il contredit ce théorème, et contrarie violemment la Conjecture d'Algébricité, en nous faisant cadeau d'un groupe de Frobenius simple, qui ou bien est sans involutions, ou bien est un contre-exemple extrême au Théorème de Glauberman quand il en contient.

Section 2. Obstruction à la netteté des scissions

Nous examinons ici des problèmes causés par les quotients qui n'apparaissent pas chez les groupes finis, mais qui tourneront à l'obsession dans l'étude des groupes de Frobenius de rang de Morley fini. Nous sommes bien sûr incapables de donner des exemples de leur nuisance, pour la raison qu'elle ne se manifeste que dans des contextes infirmant la Conjecture d'Algébricité.

Etant donné un groupe d'automorphismes $T \neq \{Id.\}$ du groupe V, nous déterminons tout d'abord les circonstances qui font que T est malnormal dans le produit semi-direct F de V par T.

Pour cela nous calculons à quelle condition $(v.s)^{-1}$ conjugue $u.t$ dans T, lorsque u et v sont dans V et s et t dans T : $s^{-1}v^{-1}.ut.vs$ est dans T, soit encore $v^{-1}.ut.v$ est dans T, soit encore $v^{-1}.ut.v.t^{-1} = v^{-1}.u.tvt^{-1}$ est dans T, c'est à dire vaut 1 puisqu'il s'agit du produit de trois éléments de V : la condition est donc donc que $u^{-1} = t.v.t^{-1}.v^{-1} = [t,v]$.

Dire que T est malnormal signifie que, quand $u = 1$ et $t \neq 1$, cela se produit seulement si $v = 1$; autrement dit 1 est le seul point de V qui commute avec t, le seul point fixe de l'action de t sur V par automorphisme intérieur. Cela veut dire aussi que, à $t \neq 1$ fixé, l'application $[t,v]$ de V dans V est injective, car $[t,v] = [t,w]$ équivaut à $[t,v^{-1}.w] = 1$.

Par contre, dire que tout $t.u$ à un conjugué dans T, soit encore que la scission est nette, signifie que cette application est surjective ; on remarque que, dans ce cas, $t.u$ est conjugué de t par un point de V.

Si V est fini, l'injectivité implique la surjectivité (et réciproquement d'ailleurs), ce qui donne une autre explication des points (iii), (iv), (v) du Lemme 1.1, mais l'Exemple 1 montre que ce n'est pas une vérité universelle ; il n'est pas certain que ce soit toujours le cas dans un contexte de rang de Morley fini, bien qu'aucun contre-exemple ne soit connu.

Par contre *c'est vrai dans un contexte localement fini*, c'est-à-dire si, pour chaque t de T, chaque partie finie de V est contenue dans un groupe fini normalisé par t.

Nous avons besoin de trois faits de pure théorie des groupes.

Si s est un endomorphisme du groupe V, l'*adjointe* de s est l'opération $a(x) = s(x).x^{-1}$; elle est soumise à la loi $a(x.y) = a(x).a(y)^{x}$; réciproquement, si $a(x)$ obéit à cette loi, c'est l'adjointe de l'endomorphisme $a(x).x$. L'endomorphisme s agit sur V sans point fixe (autre que 1) si et seulement si son adjointe est injective. Le fait suivant permet de faire des récurrences.

Fait 2.1. *Soient* s *un automorphisme sans points fixes du groupe* V *, et* W *un sous-groupe normal de* V *normalisé par* s *; si l'adjointe de* s *restreinte à* W *est surjective, alors l'endomorphisme* s' *induit par* s *sur* V/W *est sans points fixes.*

Démonstration. Si s fixe v modulo W, $s(v) = w.v = s(w').w'^{-1}.v$, si bien que v est congru modulo W à un point fixe de s , c'est-à-dire est dans W . **Fin**

En conséquence *un groupe* V *résoluble par fini ne donne que des scissions nettes si le contexte est de rang de Morley fini* (nous voulons dire que, pour chaque t dans T , la structure formée de V et de l'automorphisme s induit par t est de rang de Morley fini). En effet, $V°$ a un sous-groupe définissable commutatif caractéristique A , qui est normalisé par s ; l'adjointe de la restriction de s à A est un endomorphisme injectif de A dans A , et est donc surjective ; on conclut par induction sur la classe de solvabilité.

La netteté des scissions est ce qui permet de faire des quotients propres :

Fait 2.2. *Soient* F *un groupe de Frobenius quelquonque,* T *un de ses sous-groupes malnormaux, et* V *un sous-groupe normal de* F *strictement contenu dans* $U(T)$. *On suppose que le produit semi-direct* $V.T$ *est nettement scindé. Alors l'image* T_1 *de* T *dans* F/V *(qui est isomorphe à* T *) est malnormale dans* F/V *, et* $U(T_1)$ *est l'image de* $U(T)$.

Démonstration. Supposons que, modulo V , a conjugue t et t' dans T , et mettons en œuvre la surjectivité des commutateurs : $a.t.a^{-1} = t'.v = t'.[t'^{-1},u] = u.t'.u^{-1}$; on en déduit que $u^{-1}.a$ est dans T , que modulo V a est dans T .

Supposons que, modulo V , x soit dans T^{a} : $a^{-1}.x.a = t.v = t.t^{-1}utu^{-1} = u.t.u^{-1}$; on en déduit que x est bien dans un conjugué de T . **Fin**

En s'inspirant du Lemme 1.1, on en déduira que :

Fait 2.3. *Soient* F *un groupe de Frobenius quelconque, et* T *un de ses sous-groupes malnormaux.*
(i) *Si* $U(T)$ *est un groupe,* F *est scindé (nettement), ou bien* $F/U(T)$ *est un mauvais groupe.*
(ii) F *est engendré par* T *et* $U(T)$ *, ou bien* $U(T)$ *est un groupe et le quotient* $F/U(T)$ *est un mauvais groupe.*

Section 3. Groupes de Frobenius de rang de Morley fini pseudo-localement-finis

Un groupe F est *pseudo-localement-fini* si tout énoncé du langage des groupes qu'il satisfait l'est aussi dans un groupe localement fini. Il est facile de constater que toute structure définissable dans un corps algébriquement clos est pseudo-localement-finie (voir par exemple POIZAT 2021). La Conjecture d'Algébricité a été montrée pour les groupes localement finis dans THOMAS 1983, mais il a été ensuite remarqué par Simon Thomas lui-même que son résultat s'étendait aux groupes pseudo-localement-finis. Les groupes simples de rang de Morley fini et pseudo-localement-finis sont exactement les groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos, le travail de Thomas consistant en somme à déduire la classification de ces groupes à partir de la classification des groupes simples finis.

Cette pseudo-finitude-locale est la clef de certains transferts immédiats de propriétés des groupes finis aux groupes algébriques (précisons-le : de corps de base algébriquement clos). Pour les groupes de Frobenius, plutôt que de reproduire des techniques de groupes finis comme dans HERTZIG 1961, et le Lemma 11.39 p. 218 de B&N, nous pouvons effectuer, grâce à la la proposition suivante, un transfert brutal de nature modèle-théorique.

Proposition 3.1 (B&N, Proposition 11.19, p. 206)**.** *Dans un groupe de Frobenius* F *de rang de Morley fini, tout sous-groupe malnormal est définissable (par une formule du langage des groupes, avec paramètres).*

Démonstration. C'est vrai si T est fini. Sinon chaque point de $T \cap F°$ a un centralisateur infini (ABC 2008, Corollary 4.18 p. 270 ; on peut s'en passer pour montrer simplement qu'au moins un point $\neq 1$ de $T \cap F°$ a un centralisateur infini), qui est inclus dans T ; le groupe engendré par les composantes connexes des centralisateurs de ses points est un groupe définissable connexe non trivial, et T est son normalisateur. **Fin**

Dans un contexte pseudo-localement-fini, les groupes de Frobenius définissables scindés le sont nettement : c'est un cas particulier de ce qu'on appelle le *Principe de Surjectivité d'Ax*.

Proposition 3.2. *Dans un groupe de Frobenius* F *de rang de Morley fini et pseudo-localement-fini :*
(i) *Tous les sous-groupes* T *malnormaux sont conjugués.*
(ii) $U(T)$ *est un sous-groupe nilpotent non trivial, qui est connexe quand* T *est infini, et* F *est le produit semi-direct de* $U(T)$ *par* T .
(iii) *Si* T *contient une involution* i *, il n'en contient qu'une et* $U(T)$ *est un groupe commutatif sans involutions inversé par* i .

Démonstration. Considérons, dans un groupe de Frobenius Φ localement fini, un sous-groupe malnormal Θ , et montrons que $U(\Theta)$ est un groupe et que Φ est le produit semi-direct de $U(\Theta)$ par Θ . En effet, si $t \neq 1$ est dans Θ , t' est dans un autre conjugué de Θ , et u et v sont dans $U(\Theta)$, ils engendrent un groupe de Frobenius fini φ , dont $\varphi \cap \Theta$ et ses conjugués dans φ sont les sous-groupes malnormaux ; ce sont aussi les traces sur φ des conjugués de Θ qui intersectent φ non trivialement, si bien que le produit $u.v$ est aussi dans $U(\Theta)$. On voit de la même façon que tout point de Φ est produit d'un point de $U(\Theta)$ et d'un point de Θ .

Si Θ' est un autre sous-groupe malnormal, une vérification locale permet de voir que $U(\Theta) = U(\Theta')$; il existe donc un conjugué Θ'' de Θ' non disjoint de Θ ; mais alors $\Theta \cap \Theta''$ est aussi malnormal, si bien que Φ est engendré par $U(\Theta)$ et $\Theta \cap \Theta''$, par $U(\Theta)$ et Θ , et par $U(\Theta)$ et Θ'' , ce qui nécessite que $\Theta = \Theta''$; autrement dit Θ et Θ' sont conjugués.

Le groupe $U(\Theta)$ est localement nilpotent. Il est même nilpotent d'après un théorème de KEGEL-WEHRFRITZ 1973, mais notre contexte, où il y a partout des bornes aux chaînes de centralisateurs, va nous permettre d'éviter l'emploi d'un résultat aussi sophistiqué.

Revenons à F ; soit $\theta(x,\underline{a})$ une formule définissant T ; c'est un énoncé élémentaire qui déclare que, si $\theta(x,\underline{y})$ définit un sous-groupe malnormal, alors $U(\theta(x,\underline{y}))$ est un groupe et chaque point de F est produit d'un point satisfaisant $U(\theta(x,\underline{y}))$ et d'un point satisfaisant $\theta(x,\underline{y})$; comme il est vrai dans tout groupe localement fini, il l'est aussi dans F . On voit semblablement que deux sous-groupes malnormaux sont conjugués.

Reste à voir que $U(T)$ est nilpotent, alors que pour l'instant il ne l'est que pseudo-localement. On est assuré que, étant donnés u_1 , ... u_n dans $U(T)$, il existe $v \neq 1$ qui commute avec chacun d'eux. Comme $U(T)$ vérifie la condition de chaîne sur les centralisateurs, il a un centre non trivial ; $U(T)/Z(U(T))$ vérifie aussi cette condition, si bien que $U(T)$ est abélien ou bien a un deuxième centre non trivial.

Si $U(T)$ est connexe, il n'est pas possible que son centre soit fini, car alors il serait égal à son deuxième centre. Dans ce cas, on le divise par son centre et on conclut par récurrence sur le rang.

Si $U(T)$ n'est pas connexe, comme la scission de $U(T)°.T$ est nette, l'image T_1 de T dans le quotient $F/U(T)°$ est malnormale, et $U(T_1) = U(T)/U(T)°$; $U(T_1)$ est donc centralisé par la composante connexe de T_1 , ce qui est impossible si T est infini. Par conséquent T est fini, $F/U(T)°$ est un groupe de Frobenius fini, $U(T)/U(T)°$ est nilpotent, $U(T)$ est résoluble. Pour éviter de nous fatiguer d'avantage, nous concluons en faisant appel au Theorem 11.29 démontré dans les p. 211-214 de B&N, dont le cas pénible est justement quand T est fini.

Le point (iii) se vérifie localement. **Fin**

Le résultat suivant nous permettra de vérifier dans la Section 4 qu'en fait la Conjecture d'Algébricité suffit à éliminer les groupes de Frobenius non scindés connexes, ou plus généralement de T infini.

Proposition 3.3. *Soient* F *un groupe de Frobenius de rang de Morley fini,* T *un sous-groupe malnormal de* F *, et* G *un sous-groupe définissable de* F *qui soit isomorphe à un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos. Alors ou bien* G *est contenu dans un conjugué de* T *, ou bien* G *ainsi que son normalisateur sont inclus dans* $U(T)$.

Démonstration. Comme G n'est pas un groupe de Frobenius, ou bien il est contenu dans un conjugué de T , ou bien il est disjoint de tous (Lemme 0 : pas besoin de Logique). S'il est inclus dans $U(T)$, on nomme Θ l'intersection de T et du normalisateur de G .

On fait alors intervenir une des conséquences les plus subtiles de la structure d'un groupe algébrique simple : si H est un groupe d'automorphismes de G telle que l'action de H sur G reste de rang de Morley fini, alors chaque point de H est un automorphisme rationnel, définissable dans le corps de base de G (et en fait dans la structure de groupe de G), et $H°$ est formé d'automorphismes intérieurs (ABC 2008 p. 134, B&N p. 124). Comme les automorphismes intérieurs ont une infinité de points fixes, Θ est fini, et $G.\Theta$ est algébrique ; comme il ne peut pas être un groupe de Frobenius algébrique, Θ est trivial. Le même raisonnement vaut pour les conjugués de T . **Fin**

Cependant, il est une propriété des groupes de Frobenius algébriques qui ne semble pas déductible de la pseudo-finitude locale : $T°$ est un groupe abélien (B&N, Lemma 11.39 p. 218). Nous en discuterons dans la Section 5.

Section 4. Groupe de Frobenius connexes de rang de Morley fini

Lemme 4.1. *Soit* F *un groupe de rang de Morley fini ayant un sous-groupe malnormal* T .
(i) F *est connexe si et seulement si* T *est connexe.*
(ii) $T°$ *est l'intersection de* $F°$ *et de* T .
(iii) *Si* T *est infini,* $T°$ *est malnormal dans* $F°$.
(iv) *Si* T *est fini,* $F°$ *est contenu dans* $U(T)$.
(v) *Si* T *remplit* F *,* $T°$ *remplit* $F°$.
(vi) $2.RM(T) \leq RM(F)$ *; de plus, si* T *ne remplit pas* F *,* $RM(T) \leq RM(U(T))$ *et* $RM(F) \leq 2.RM(U(T))$.

Démonstration. (i) Si F est connexe, T est infini car chacun de ses points $\neq 1$ a un centralisateur infini ; la réunion des conjugués de T est une partie générique de F ; si T n'était pas connexe, elle serait partitionnée en deux sous-ensembles génériques, la réunion des conjugués de $T°$ et son complément.

Si T est connexe, $T^a = a.T.a^{-1}$ l'est aussi, ainsi que le groupe G engendré par T et T^a ; à l'intérieur de G, la réunion des conjugués de T et celle des conjugués de T^a sont des parties génériques, qui ne peuvent être disjointes ; par conséquent T et T^a sont conjugués par un g de G, et $g^{-1}.a$ est dans G, qui est donc aussi le groupe engendré par T et a. On en conclut que tout surgroupe de T est définissable et connexe, et c'est vrai de F en particulier.

(ii) C'est vrai si F est fini ; quand $F°$ est infini et T est fini, leur intersection est un groupe fini qui ne peut pas être malnormal dans $F°$, si bien que T est disjoint de $F°$; si T est infini, l'intersection de T et de $F°$ est malnormale dans $F°$: elle est par conséquent connexe, et égale à $T°$.

(iii) L'intersection de T et de $F°$ est non-trivale, donc malnormale dans $F°$.

(iv) D'après (ii), T est disjoint de $F°$, et ses conjugués aussi.

(v) F est infini, et recouvert par les conjugués de T, qui ne peuvent être disjoints de $F°$, et sont donc infinis ; $F°$ est recouvert par les conjugués de $T°$ au sens de F ; mais ce sont des sous-groupes malnormaux de $F°$ deux-à-deux disjoints, qui ne peuvent former qu'une seule classe de conjugaison dans $F°$.

(vi) Dans l'action de F sur les conjugués de T, ce dernier ne fixe que T, si bien qu'il agit injectivement sur ses autres conjugués.

Si a est un point non trivial de $U(T)$, aucun point $\neq 1$ de T ne commute avec lui, si bien que tous ses conjugués par des points de T sont distincts ; par ailleurs, comme son centralisateur est inclus dans $U(T)$, $RM(a^F) \geq RM(F) - RM(U(T))$. **Fin**

Proposition 4.2. *On considère un groupe de Frobenius* F *connexe de rang de Morley fini.*

(i) *Deux sous-groupes malnormaux de* F *ont des conjugués non disjoints.*

(ii) *Les sous-groupes malnormaux minimaux de* F *sont conjugués.*

(iii) *Quels que soient le sous-groupe malnormal* T *et le point* a *de* F *, le groupe engendré par* T *et* a *est le groupe (définissable et connexe) engendré par* T *et* T^a.

(iv) *Si* H *est un sous-groupe de* F *contenant un sous-groupe malnormal* T *, il est définissable, connexe et autonormalisant ; les conjugués de* T *dans* F *qui ont une intersection non-triviale avec* H *sont inclus dans* H *, et conjugués de* T *dans* H *;* $H \cap U(T)$ *est formé de* 1 *et des points de* H *qui ne sont pas dans un conjugué de* T *au sens de* H.

Démonstration. (i) Le contraire est incompatible avec la connexité de F.

(ii) L'intersection de deux groupes malnormaux est triviale ou malnormale.

(iii) Voir le lemme précédent.

(iv) Comme H est engendré par des conjugués de T, il est connexe, et les intersections avec H des conjugués de T non disjoints de H sont nécessairement conjuguées dans H. **Fin**

Proposition 4.3. *On considère un groupe de Frobenius* F *connexe de rang de Morley fini, et un de ses sous-groupes malnormaux* T.
(i) *Tout groupe* V *contenu dans* $U(T)$ *et normalisé par* T *est définissable et connexe.*
(ii) *Si* V *est un sous-groupe normal de* F *contenu dans* $U(T)$*, ou bien* $F = V.T$*, ou bien l'image de* T *reste malnormale dans le quotient* F/V.
(iii) *Si* V *et* W *sont des sous-groupes normaux contenus dans* $U(T)$*, et si* $V.T$ *est nettement scindé,* $V.W$ *est inclus dans* $U(T)$ *; si* $W.T$ *est aussi nettement scindé,* $V.W.T$ *l'est également.*
(iv) *Il y a dans* $U(T)$ *un plus grand sous-groupe résoluble* $R(T)$ *normal dans* F *;* $R(T)$ *est en fait le plus grand sous-groupe nilpotent normal dans* F *(il est indépendant du choix du sous-groupe malnormal* T *) ; si* $F \neq R(T).T$*, le quotient* $F/R(T)$ *est un groupe de Frobenius semi-simple (sans sous-groupe* $\neq \{1\}$ *normal commutatif).*

Démonstration. (i) Le groupe $G = V.T$ est définissable et connexe ; les classes de conjugaison (au sens de G) des points de V sont incluses dans V, et on considère le plus petit sous-groupe $V°$ définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre elles (voir POIZAT 2018 & 2021) ; $V°$ est normal dans G, et on sait que chaque point de V a une classe de conjugaison finie modulo $V°$; comme $G/V°$ est connexe, V est central modulo $V°$.

Soit alors H le groupe $V°.T°$; pour tout v de V, $T^{°v}$ est inclus dans $V°.T° = H$, et est donc conjugué de $T°$ dans H ; on en déduit que v est dans H, de la forme $t.u$ avec t dans $T°$ et u dans $V°$, soit encore qu'il est dans $V°$. En conclusion $V = V°$.
(ii) Considérons un point a tel que T et T^a ne soient pas disjoints modulo V. L'intersection S de T^a et de $V.T$ n'est donc pas triviale ; elle est par conséquent malnormale dans $V.T$, comme l'est T ; comme $V.T$ est connexe, S et T y ont des conjugués non disjoints, et on trouve v dans V, t et t' non triviaux dans T, tels que $a.t.a^{-1} = v.t'.v^{-1}$; par conséquent $v^{-1}.a$ est dans T, a est dans T modulo V.
(iii) Si V est net, W reste disjoint de T et de ses conjugués dans le quotient F/V. Si W est net lui aussi et $t \neq 1$, on considère v dans V et w dans W ; $t.vw = t^u.w = u.t(u^{-1}wu).u^{-1}$ si $v = t^{-1}utu^{-1}$, et $t(u^{-1}wu)$ est conjugué de t par un point de W.
(iv) Si F n'est pas semi-simple, il contient un sous-groupe abélien normal A, dont on sait qu'il est définissable, connexe et contenu dans $U(T)$, et que $A.T$ est bien scindé ; si $F \neq A.T$, en divisant par A on obtient un groupe de Frobenius dans lequel on peut répéter l'opération, jusqu'à obtenir une expression

de F comme la bonne scission R(T).T ou bien le groupe de Frobenius semi-simple F/R(T) .

Pour voir que R(T) est nilpotent, nous redémontrons le cas facile du Theorem 11.29 p. 211 de B&N : on considère un sous-groupe abélien définissable connexe infini A de T ; pour tout $a \neq 1$ de A , le commutateur $[a,x] = axa^{-1}.x^{-1}$ définit une bijection de R(T) dans R(T) , si bien que R(T) est le dérivé du groupe résoluble connexe R(T).A ; d'après un théorème dû à Ali Hoca Effendi, il est nilpotent (POIZAT 1987, p. 94).

Enfin, d'après le Lemme 0, quel que soit T , un groupe nilpotent normal dans F est inclus dans U(T) . **Fin**

Note. La démonstration du point (ii) est empruntée à B&N, Lemma 11.37 p. 217, qui est plus général car il se passe de la connexité. Si le rang de Morley est fini, T reste malnormal dans le quotient, mais la surjectivité des commutateurs reste nécessaire si on ne veut pas que des points de U(T) rentrent dans T . On méditera également sur le Corollary 11.24 p. 209 et l'Exercise 5 p. 71 et 380.

Proposition 4.4. *Soient* F *un groupe de Frobenius de rang de Morley fini connexe semi-simple, et* T *un de ses sous-groupes malnormaux.*
(i) *Tout* $a \neq 1$ *de* F *a une infinité de conjugués par les points de* U(T) .
(ii) *Tout sous-groupe abélien* V *, contenu dans* U(T) *et normalisé par ce dernier, est trivial.*
(iii) *Le socle de* F *est composé soit d'un seul groupe de Frobenius simple, non disjoint de* T *, soit d'un nombre fini de groupes simples contenus dans* U(T) *; aucun de ces groupes n'est isomorphe à un groupe algébrique.*

Démonstration. (i) Chaque $b \neq 1$ de U(T) a un centralisateur infini C(b) (pas besoin du Corollary 4.18 de ABC 2008 : U(T) n'est pas générique car son complémentaire l'est), qui est inclus dans U(T) ; si a n'a qu'un nombre fini de conjugués sous l'action de C(b)° , il est centralisé par ce dernier, et il est donc dans U(T) ; l'intersection C des centralisateurs C(C(b)°) est un groupe définissable, contenu dans U(T) , et normal dans F ; il est donc connexe. Si $c \neq 1$ est dans C , la composante connexe de son centralisateur est centrale dans C . Par conséquent, si $C \neq \{1\}$, il a un centre non-trivial, ce qui contredit la semi-simplicité de F .
(ii) Si V est un contre-exemple, on peut le supposer définissable, en le remplaçant par le centre de son centralisateur. Si on le prend minimal, il est infini d'après (i), et connexe. La semi-simplicité de F interdit à V d'être normal dans F ; comme F est connexe, V a une infinité de conjugués sous son action. Si W est un conjugué de V distinct de V , ils sont disjoints, si bien qu'ils commutent (comme ils se normalisent l'un l'autre, le commutateur d'un point de V et d'un point de W est dans leur intersection) ; par la condition de chaîne sur les centralisateurs, le centralisateur du groupe H engendré par les conjugués de V est celui d'un nombre fini d'entre eux, et contient un conjugué

de V . H est donc un groupe commutatif, normal dans F , ce qui contredit la semi-simplicité.
(ii) Le socle d'un groupe semi-simple est formé d'un produit de groupes simples (POIZAT 1987, p. 97). Si l'un d'entre eux coupe T , c'est un groupe de Frobenius simple, qui ne peut être algébrique. Comme il coupe chaque conjugué de T , il est le seul groupe du socle, car il ne peut commuter avec un groupe de même espèce, ni avec un point non trivial de $U(T)$.

Dans le dernier cas le socle de $F/R(T)$ est un produit de groupes simples contenus dans $U(T)/R(T)$; comme ils commutent, il en est de même de leur produit ; ce ne sont pas non plus des groupes algébriques (Proposition 3.3). **Fin**

Dans le deuxième cas, comme nous ne savons pas si les groupes du socle donnent des sections nettes, nous ne pouvons plus poursuivre notre analyse par un quotient, mais du moins nous avons précisé la localisation des contre-exemples minimaux des p. 215-219 de B&N.

Par ailleurs, la Proposition 4.3.(ii) nous assure de l'existence d'un plus grand sous-groupe normal net contenu dans $U(T)$; quand nous quotientons par ce dernier, nous obtenons un groupe de Frobenius, dont le $U(T)$ ne contient pas de sous-groupes non triviaux normaux dans F et donnant une scission nette avec T . Nous qualifierons *d'imbons* ceux d'entre eux dont le $U(T)$ ne contient pas du tout de sous-groupes non triviaux normaux dans F (on dira alors que T est *pervers*). Un groupe de Frobenius simple, ou mauvais, est imbon ; il en est de même d'un F non scindé dont le T contient une involution.

Des pires d'entre eux nous pouvons dire quelques menues choses :

Proposition 4.5. *Soit* F *un mauvais groupe connexe de rang de Morley fini.*
(i) *Si* H *est un sous-groupe propre de* F *contenant un groupe malnormal remplissant* T *, il est lui-même remplit par* T *, et c'est un sous-groupe malnormal dans* F *qui le remplit.*
(ii) *L'intersection de deux sous-groupes malnormaux non disjoints* T *et* T' *est remplissante si et seulement si* T *et* T' *le sont.*
(iii) *Les sous-groupes malnormaux remplissants minimaux sont conjugués ; ce ne sont pas des mauvais groupes.*
(iv) F *n'a pas d'involutions, et chacun de ses sous-groupes finis est contenu dans un sous-groupe malnormal remplissant minimal.*
(v) *Chaque sous-groupe* G *définissable et connexe de* F *non contenu dans un groupe remplissant minimal est un mauvais groupe ;* F *a un unique sous-groupe normal définissable minimal (son socle), qui est un mauvais groupe simple.*
(vi) F *a des sous-groupes* G *connexes définissables tel que* $G \cap T$ *soit un groupe malnormal remplissant minimal de* G *, et que tout sous-groupe définissable de* G *soit contenu dans un de ses conjugués ;* G *est un mauvais groupe simple, qui n'a pas d'automorphisme involutif définissable non trivial.*

Démonstration. (i) H est un groupe définissable connexe, qui est rempli par les conjugués de T qui l'intersectent non trivialement ; ces derniers sont tous conjugués de T dans H. Comme $U(T) \cap H = \{1\}$, H est malnormal dans F, et comme F est rempli par T il est aussi rempli par H.
(ii) Si $T \cap T'$ remplit F, nous avons vu que T et T' aussi. Réciproquement, si T' remplit F, $T \cap T'$ remplit T ; si de plus T remplit F, $T \cap T'$ aussi.
(iii) Deux sous-groupes malnormaux remplissants ont des conjugués qui se coupent non trivialement. Si T a lui même un sous-groupes malnormal le remplissant, ce dernier remplit F, et T n'est pas minimal.
(iv) Soient i et j des involutions situées dans des conjugués différents du groupe malnormal remplissant T ; le produit ij, étant inversé par i comme par j, ne peut être dans un conjugué de T ; donc $ij = 1$, $i = j$, ce qui ne se peut.

Soit T un sous-groupe remplissant minimal, et φ un groupe fini non trivial qui n'est pas contenu dans un conjugué de T ; comme φ n'est pas un mauvais groupe, les intersections non triviales de φ avec un conjugué de T se répartissent en au moins deux classes de conjugaisons, celle de θ et de θ', et le calcul fait dans le Lemme 2.1.(i) rend la chose impossible.
(v) Si T est malnormal remplissant et G n'est pas inclus dans T, il est rempli par toutes les intersections $G \cap T^a$ qui ne sont pas triviales ; comme il est connexe, elles sont toutes conjuguées dans G.

Si F est simple, il est égal à son socle. Sinon il a un sous-groupe normal propre, nécessairement infini, et par hypothèse d'induction sa composante connexe a un socle ; comme ce dernier est caractéristique, il est normal dans F. Donc un groupe normal définissable minimal est simple, et il coupe non trivialement tous les conjugués d'un groupe T remplissant ; il ne peut pas y en avoir deux, car ils commuteraient l'un l'autre.
(vi) Dans une première étape, on considère T_1 remplissant minimal de F, et G_1 connexe minimal non disjoint de T_1 et non inclus dans T_1 ; si H est un sous-groupe définissable propre de G_1, il est contenu dans un conjugué de T_1 : c'est vrai s'il est fini, et sinon c'est parce que c'est vrai pour $H°$; si T_1 n'est pas remplissant minimal dans G_1, on considère T_2 minimal inclus dans T_1, et on recommence ; ça s'arrête parce que tous ces groupes sont connexes.

Nous avons donc obtenu un mauvais groupe G, avec un sous-groupe remplissant minimal T, tel que tout sous-groupe définissable propre de G soit contenu dans un conjugué de T. Il est clair que les sous groupes définissables propres de G ne sont pas normaux. Soit s un automorphisme involutif de G ; comme G n'a pas d'involutions, il est uniquement 2-divisible, et chaque point de G s'écrit de manière unique comme produit d'un point fixé par s et d'un point inversé par s (voir par exemple POIZAT 2018) ; comme G n'est pas commutatif s a des points fixes non triviaux, et si s n'est pas l'identité il a des points inversés non triviaux. Par ailleurs s permute les conjugués de T, qui sont les sous-groupes malnormaux de G minimaux pour le remplir.

Si s est définissable et différent de l'identité, à conjugaison près son groupe de points fixes est contenu dans T, qui est fixé par s ; il est nécessaire qu'il y ait d'autres points inversés que ceux de T ; si un autre conjugué T' de T en contient un, il est fixé par s, et comme il n'a pas de points fixes c'est un groupe commutatif inversé par s. Comme T et T' sont conjugués, un point fixe non trivial a un conjugué inversé, si bien qu'il est conjugué de son inverse, ce qui produit des involutions. **Fin**

Remarque. La carence d'un mauvais groupe minimal en automorphismes involutifs est la partie facile, et de portée générale, de l'argumentation par contradiction de FRECON 2018. La partie délicate, et de portée limitée, réside dans l'étude du symétron de ce groupe.

Nous ne restons pas complètement muets sur le sort des groupes imbons :

Proposition 4.6. *Soient* F *un groupe de Frobenius imbon, de rang de Morley fini et connexe, et* T *un de ses sous-groupes pervers. Alors tout sous-groupe* V *inclus dans* $U(T)$ *et normalisé par ce dernier est trivial.*

Démonstration. Considérons $a \neq 1$ dans V ; nous savons que l'ensemble $X(a)$ des conjugués de a par des points de $U(T)$ est infini. Le plus petit groupe connexe elliptiquement engendré par les $X(a)$ n'est donc pas trivial, et comme c'est un sous-groupe caractéristique de V, il est normalisé par $U(T)$.

Nous trouvons donc un contre-exemple V définissable et connexe, et nous le prenons minimal. Comme V n'est pas normal dans F, il a une infinité de conjugués ; si W est un autre conjugué de V, ces deux groupes sont disjoints, et chacun commute avec l'autre ; le centre du groupe H, définissable et connexe, engendré par les conjugués de V, est le centralisateur d'un nombre fini d'entre eux, et contient un conjugué de V ; H est donc un groupe commutatif, inclus dans $U(T)$ et normal dans F, ce qui contredit la semi-simplicité. **Fin**

Et nous concluons par un lemme qui montre que, dans l'affaire, ce qui est essentiel n'est pas la connexité de T, mais son infinité.

Lemme 4.7. (voir B&N, Proposition 11.24, p. 208)**.** *Soit* F *un groupe de rang de Morley fini ayant un sous-groupe définissable malnormal infini* T.
(i) *Tout groupe* V *inclus dans* $U(T)$ *et normalisé par* T *est définissable et connexe.*
(ii) *Si* F *est scindé relativement à* T*, étant produit semi-direct de* V *par* T*, ce groupe* V *est définissable et connexe, et* $F°$ *est le produit semi-direct de* V *et de* $T°$*,*
(iii) *Si* $U(T)$ *est un groupe, il est connexe, et* $F = U(T).T$*, ou bien* $F/U(T)$ *est un mauvais groupe.*

Démonstration. (i) Nous supposons que $V \neq \{1\}$. Le groupe engendré par V et T est le produit semi-direct $V.T$; donc le groupe $V.T°$ ne contient pas de points de son normalisateur $T°$ autres que les siens, si bien que $T°$ est malnormal dans $V.T°$. Si v est dans V , le groupe engendré par $T°$ et $T^{°v}$ est définissable et connexe, et on montre comme dans la Proposition 2.1 que c'est le groupe engendré par $T°$ et v . Le groupe G engendré par V et $T°$ est donc définissable et connexe, et on conclut comme dans la proposition précédente.
(ii) Si F est scindé, le complément V de T vérifie les hypothèses ; comme c'est un groupe définissable connexe, il est inclus dans $F°$, qui est égal à $V.T°$.
(iii) La connexité vient de ce que $U(T)$ est normalisé par T , et la suite n'a rien à voir avec la finitude du rang (Fait 2.2). **Fin**

Note. Si le groupe F de rang de Morley fini a un sous-groupe T malnormal fini, son intersection avec $F°$ est triviale d'après la Proposition 4.1, si bien que $F°$ est inclus dans $U(T)$. Il est montré p. 210 de B&N que F est alors scindé, de la forme $V.T$, et, comme le groupe V contient $F°$, il est définissable. On peut d'ailleurs, en s'appuyant éventuellement sur B&N, obtenir d'autres résultats sur les groupes de Frobenius qui ne sont pas connexes ; nous ne le faisons pas ici pour ne pas ajouter de la confusion à une situation déjà passablement embrouillée, car le but de cet article est plus de poser des problèmes que d'en résoudre.

Section 5. Où on retrouve quelques vieux amis

Dans cette section de conclusion, nous allons rappeler quelques problèmes, le plus souvent ouverts, liés aux comportement des corps dans une situation de rang de Morley fini. Nous commençons par l'étude des groupes de Frobenius où $U(T)$ est un groupe abélien, comme nous avons eu l'occasion d'en rencontrer lors des précédents paragraphes.

Proposition 5.1. *Soit* T *un groupe agissant sans points fixes sur un groupe abélien* U *, de sorte que le produit semi-direct* $U.T$ *soit un groupe connexe de rang de Morley fini ; alors on peut définir à l'intérieur de ce groupe un ou plusieurs corps infinis, de sorte que* U *soit une somme directe d'espace vectoriels sur ces corps. Quand* $U.T$ *est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos* K *, tous ces corps sont isomorphes à* K *, et* U *est un* K*-espace vectoriel sur lequel* T *agit* K*-linéairement, comme un tore de dimension un (* T *est alors un groupe commutatif, isomorphe à* K^* *).*

Démonstration. Nous notons additivement la loi de groupe de U et multiplicativement l'action de T sur ce dernier ; choisissons un de ses sous-groupes M abélien infini définissable.

Soit V le plus grand sous-groupe de U définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini de $M.a$; si b est hors de V, $M.b$ est fini modulo V, si bien que dans le quotient $U.T/V$ b commute avec des points de M, ce qui n'est pas conforme à la surjectivité des adjoints $m.x - x$. Par conséquent $U = M.a_1 + ... + M.a_m - M.a_{m+1} - ... - M.a_n$, ce qui permet de définir l'anneau commutatif $R = Z(M)$ des endomorphismes de U engendré par M ; en effet, tout point de U se représente dans le système générateur des a_i par une colonne de coordonnées de longueur n à valeur dans M, deux colonnes étant dite équivalentes si elles représentent le même vecteur ; les endomorphismes de U sont représentés par les matrices $n{\times}n$ à valeur dans M qui respectent l'équivalence, propriété qui se définit en utilisant les a_i comme paramètres.

La même démonstration montre que tout sous-R-module de U est connexe et finiment engendré ; un R-module minimal est engendré par chacun de ses points non nuls, si bien que R agit sur lui comme un corps. Comme par ailleurs U est une somme directe de sous-modules minimaux, R est un sous-anneau d'un produit de corps.

Quand le groupe est algébrique, tous ces corps sont définissablement isomorphes au corps de base K (POIZAT 1987, Théorème 4.15, p. 150), si bien que U est un K-espace vectoriel, et que l'action de T est linéaire (POIZAT 1987, p. 76-77) ; aucun de ses éléments ne peut avoir 1 comme valeur propre, si bien que T est sans unipotents ; c'est donc un tore, qui ne peut se décomposer en un produit de sous-tores : il est de dimension un. **Fin**

Si le groupe de notre Proposition 3.2 est algébrique, en divisant par l'avant-dernier centre de $U(T°)$ on obtient une action sans points fixes de $T°$ sur un groupe abélien, ce qui montre que $T°$ est abélien, mais je ne vois pas comment montrer cela sous la seule hypothèse de pseudo-finitude locale, ne serait-ce parce qu'il peut y avoir plusieurs corps, pour la simple raison que le produit de deux corps algébriquement clos est un anneau pseudo-localement fini.

Nous terminons cet article par une illustration de ses résultats au cas minimal des groupes de Frobenius de rang de Morley fini qui ne sont pas mauvais.

Proposition 5.2. *Soit* F *un groupe infini de rang de Morley fini connexe, avec un sous-groupe malnormal* T, *tel que* $RM(F) = 2.RM(T)$ *; alors* $U(T)$ *est un groupe abélien connexe d'exposant premier, ou bien sans torsion et divisible, et* $F = U(T).T$. *Le groupe* F *contient des involutions ; si* T *est commutatif,* F *est isomorphe au produit semi-direct de* K^+ *par* K^* *, où* K *est un corps (algébriquement clos) définissable.*

Démonstration. Il est connu depuis la nuit des temps que T n'est pas remplissant : en effet, si a n'est pas dans T, T et T^a sont disjoints, si bien que $RM(T.aTa^{-1}) = RM(T.a.T) = 2.RM(T)$, et tous les points hors de T sont dans la même classe double, ce qui produit des involutions. En effet, $T.a.T = T.a^{-1}.T$, $t.a = a^{-1}.t'$, $ta.ta = tt'$, $(ta)^2$ est dans T , et comme $t.a$ ne peut pas commuter avec un point de T non trivial, $(t.a)^2 = 1$.

On en conclut que $RM(U(T)) = RM(T)$. Si $a \neq 1$ est dans $U(T)$, sa classe de conjugaison C est un ensemble de degré de Morley 1 inclus dans $U(T)$, et $RM(C) = RM(T)$ car tous les conjugués de a par des points de T sont distincts. $U(T)$ se répartit donc en un nombre fini de classe de conjugaison $C = C_0$, ... C_d , sans compter l'élément neutre ; le centralisateur $Z(a)$ de a est inclus dans $U(T)$, et, comme $RM(Z(a)) = RM(T)$, il doit couper génériquement au moins une classe de conjugaison C' . Le centralisateur de C est celui d'un nombre fini de ses points, qui tous commutent avec le générique de C' ; comme il est normal il doit contenir C' , et sa composante connexe est égale à une classe de conjugaison C'' , augmentée de l'identité.

Il ne peut pas y avoir deux groupes composés d'une seule classe de conjugaison, car leur intersection devrait êre triviale, et ils commuterait l'un l'autre, si bien que $U(T)$ devrait contenir leur produit de dimension $2.\dim(T)$. Donc l'une des classes de conjugaison, augmentée de 1 , est un groupe A commutatif ; le quotient F/A est un groupe connexe de même dimension que T , si bien que $F = A.T$; comme la scission est nette, $A = U(T)$, qui n'est donc composé que d'une classe de conjugaison dans F .

Comme T agit transitivement sur $U(T)$, ou bien il n'a pas de torsion, et dans ce cas il est divisible, ou bien c'est un groupe abélien d'exposant p , pour un certain nombre premier p ; comme il faut que F ait des involutions, T en contient une et une seule si $p \neq 2$.

Comme dans la proposition précédente, nous définissons l'anneau R des endomorphismes de A engendré par un sous-groupe abélien définissable infini de T . Si T lui-même est commutatif, comme il a même rang que A , nous avons affaire à un espace vectoriel de dimension 1 sur un corps K , $A = K^+$, $T = K^*$. **Fin**

Scolie finale. En caractéristique 0 , l'application x/n est dans R : on obtient sa matrice en exprimant les a_i/n en fonction des a_i ; si nous notons R_1 la clôture définissable de Q dans R , T agit de façon R_1-linéaire, mais il n'y a pas de raison que R_1 soit un corps. Par exemple, si $U(T)$ est somme de deux R-modules minimaux, $R = K{\times}L$ peut être le produit de deux corps, dans lequel Q est plongé diagonalement ; s'il n'y a pas d'isomorphisme définissable entre K et L , la clôture de Q sera $K{\times}L$ tout entier. Et quand bien même il n'y aurait qu'un seul corps K , le groupe T agissant K-linéairement sur le K-espace vectoriel $U(T)$, T ne contiendrait pas d'unipotents (POIZAT 2001), mais pourquoi devrait-il être commutatif ?

Dans les années '70, était répandue la croyance optimiste, ou naïve, que tous les problèmes concernant les corps dans un environnement de rang de

Morley fini étaient règlés par MACINTYRE 1971. On sait aujourd'hui qu'il n'en est rien, malgré les travaux de Frank Wagner (WAGNER 2001). Certaines pathologies criantes, comme le groupe additif muni de deux structures de corps différentes décrit dans la Proposition 3.12 p. 117 de POIZAT 1987 (elle met en jeu un mauvais groupe), sont incompatibles avec la pseudo-finitude locale ; mais il n'est pas clair que cette propriété empêche l'existence de tores non-algébriques en caractéristique nulle, ni qu'elle assure la linéarité des groupes d'automorphismes additifs en caractéristique p . Notons enfin qu'un certain nombre de paradoxes décrits ici dépendent de l'existence de mauvais corps en caractéristique p , qui, si l'on en croit WAGNER 2003, semble très peu probable.

Références

ABC 2008 Tuna Altinel, Aleksandr Borovik et Gregory Cherlin, **Simple Groups of Finite Morley rank,** American Mathematical Society

BOROVIK-NESIN 1994 Aleksandr Borovik et Ali Nesin, **Groups of Finite Morley Rank**, Oxford, Clarendon Press (cité comme B&N)

BOROVIK-POIZAT 1990 Aleksandr Borovik et Bruno Poizat, *Tores et* p*-groupes*, **The Journal of Symbolic Logic**, 55, 478-491

DEBONIS-NESIN 1994 Mark DeBonis et Ali Nesin, *On split Zassenhaus groups of mixed characteristic and finite Morley rank*, **J. London Math. Soc.**, 50, 430-439

DELAHAN-NESIN 1993 Franz Delahan et Ali Nesin, *Sharply 2-transitive groups revisited*, **Doğa, TheTurkish Journal of Mathematics**, 17, 70-83

DELAHAN-NESIN 1995 Franz Delahan et Ali Nesin, *On Zassenhaus groups of finite Morley rank*, **Comm. Algebra**, 25, 455-466

EPSTEIN-NESIN 1994 David Epstein et Ali Nesin, *On Frobenius groups of finite Morley rank(II),* **Automorphisms of first-order structures** (Kaye-Macpherson ed.), 341-350, O.U.P.

FEIT-THOMPSON 1963 W. Feit et J.G. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, **Pacific Journal of Mathematics**, 13, 775-1029

FRECON 2018 Olivier Frécon, *Simple groups of Morley rank three are algebraic,* **Journal of the American Mathematical Society**, 31, 643-659

FROBENIUS 1901 G. Frobenius, *Uber auslöbare Gruppen IV*, **Berl. Sitz.**, 1223-1225

HERTZIG 1961 D. Hertzig, *The structure of algebraic Frobenius groups,* **American Journal of Mathematics**, 83, 421-431

JALIGOT 2001 Eric Jaligot, *Full Frobenius groups of finite Morley rank and the Feit-Thompson theorem*, **Bulletin of Symbolic Logic**, 7, 315-328

KEGEL-WEHRFRITZ 1973 O. Kegel et B. Wehrfritz, **Locally Finite Groups**, North Holland

MACINTYRE 1971 Angus Macintyre, *On omega-one-catgorical theories of fields,* **Fund. Math.**, 71, 1-25

NESIN 1989 Ali Nesin, *Non solvable groups of Morley rank 3*, **Journal of Algebra**, 124, 199-218

NESIN 1992 Ali Nesin, *Notes on sharply 2-transitive groups revisited*, **Doğa, The Turkish Journal of Mathematics**, 16, 39-54

NESIN 1994 Ali Nesin, *On Frobenius groups of finite Morley rank (I),* **Automorphisms of first-order structures** (Kaye-Macpherson ed.), 325-339, O.U.P.

OLSHANSKII 1982 Aleksandr Ol'shanskii, *Groupes d'exposant fini dont les sous-groupes sont d'ordre premier* (en russe), **Algebra i Logika**, 21, 553-618

POIZAT 1987 Bruno Poizat, **Groupes Stables***,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah ; traduit en anglais par Moses Klein, **Stable Groups**, American Mathematical Society, 2001

POIZAT 2001 Bruno Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner,* **The Journal of Symbolic Logic**, 66,1637-1648

POIZAT 2018 Bruno Poizat, *Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions,* **Journal of Algebra**, 497, 143-163

POIZAT 2021 Bruno Poizat, *Symétries et transvexions, principalement dans les groupes de rang de Morley fini,* **The Journal of Symbolic Logic**, 86, 965-990

THOMAS 1983 Simon Thomas, *The classification of simple periodic linear groups*, **Arch. Math.**, 41, 103-116

THOMPSON 1959 J. G. Thompson, *Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order*, **Proc. Nat. Acad. Sci.,** 45, 578-581

WAGNER 2001 Frank Olaf Wagner, *Fields of finite Morley Rank*, **the Journal of Symbolic Logic**, 66, 703-706

WAGNER 2003 Frank Olaf Wagner, *Bad fields in positive characteristic,* **Bulletin of the London Mathematical Society**, 35, 499-502