Compacité en logique positive

Mohammed Belkasmi
Université de Lyon
Université Lyon 1
CNRS UMR 5208 Institut Camille Jordan
43 blvd du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

16 novembre 2009

La logique positive a été introduite par Itaï Ben Yaacov et Bruno Poizat dans [1]. Dans [2], Bruno Poizat a étudié en particulier les propriétés des extensions et sous-structures positivement élémentaires, et il a posé la question suivante :

Question : *Est-ce qu'une restriction élémentaire d'une structure séparée est séparée ?*

Dans cette note nous proposons la preuve d'une réponse positive à cette question. La preuve du résultat principal (le théorème 1) fait usage des amalgamations dans certaines classes de structures, qui apportent une clarification à de telles techniques déjà utilisées dans les travaux de Ben Yaacov et Poizat. En particulier, le lemme 2 de la section 3 est d'intérêt indépendant.

1 Logique positive : généralités

La logique positive est une branche de la logique du premier ordre dont la spécifité est la non utilisation de la négation. Le premier impact de cette caractérisation est la réduction de l'ensemble des formules à l'ensemble des formules positives qu'on obtient à partir des formules atomiques grâce à l'emploi des symboles $\vee$, $\wedge$, $\exists$. Une formule positive se met donc sous la forme $\exists \bar{y} f(\bar{x}, \bar{y})$, où $f(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule libre positive c'est à dire sans négation. Comme il n'y a pas de formule positive contradictoire, un symbole spécial $\perp$ dénotant l'antilogie est ajouté au langage. Dans le reste de cette section, nous rappellerons certaines définitions et notions de la logique positive. Pour plus de détails, [1] est une source suffisamment complète.

Comme dans la logique du premier ordre avec négation, un énoncé est une formule sans variables libres. Un énoncé est dit h-universel s'il est la négation d'un énoncé positif ; il est donc de la forme $\neg(\exists \bar{x}) f(\bar{x})$, soit encore $(\forall \bar{x})\neg f(\bar{x})$, où $f(\bar{x})$ est libre et positive. La conjonction de deux énoncés h-universels est équivalente à un énoncé h-universel ; en effet $\neg(\exists \bar{x}) f(\bar{x}) \wedge \neg(\exists \bar{y}) g(\bar{y})$ se met sous la forme $\neg(\exists \bar{x}, \bar{y})(f(\bar{x}) \vee g(\bar{y}))$. De même, la disjonction de deux énoncés h-universels est h-universelle.

Un énoncé positif est h-inductif simple s'il s'écrit sous la forme

$$(\forall \bar{x})[(\exists \bar{y}) f(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (\exists \bar{z}) g(\bar{x}, \bar{z})] \ ,$$

où f et g sont libres et positives. Sous forme prénexe il devient

$$(\forall \bar{u})(\exists \bar{v})(\neg\varphi(\bar{u}) \vee \psi(\bar{u}, \bar{v})) \ ,$$

où φ et ψ sont libres et positives. Par conséquent, la disjonction de deux énoncés h-inductifs simples l'est aussi. Un énoncé h-inductif est la conjonction d'un nombre fini d'énoncés h-inductifs simples ; ces énoncés forment une famille close par disjonction et conjonction.

Soient M et N deux structures avec la même signature correspondant à un langage L. Une application h de M vers N est un homomorphisme si pour tout uple $\bar{m}$ extrait de M, toute L-formule positive ϕ, $M \models \phi(\bar{m})$ implique $N \models \phi(h(\bar{m}))$. Dans ce cas, la structure N est dite une continuation de M. L'homomorphisme h est dit une immersion si $\bar{m}$ et $h(\bar{m})$ satisfont exactement les mêmes formules positives dans M et N respectivement.

Dans la logique positive le théorème de compacité est aussi vrai pour les énoncés qui y sont propres, et nous nous référerons au théorème suivant comme "compacité positive".

Fait 1 ([1, Corollaire 4]) *Une théorie h-inductive* (*ensemble d'énoncés h-inductifs*) *est consistante pourvu que chacun de ses sous-ensembles finis le soit.*

Deux théories h-inductives sont dites compagnes si elles ont les mêmes conséquences h-universelles [1]. Le compagnonage des modèles se caractérise en utilisant une notion clé à la logique positive, définie dans [1], celle de modèle existentiellement clos. Un élément M d'une classe C de L-structures C est dit existentiellement clos dans C si tout homomorphisme de M dans un élément de C est une immersion.

Fait 2 ([1, lemme 7]) *Deux théories h-inductives sont compagnes si et seulement si elles ont les mêmes modèles existentiellement clos.*

L'étude dans [1] des théorie h-inductives ainsi que le fait 4 ci-dessous montrent qu'une théorie h-inductive Ti a une compagne maximale Tk , qui est la théorie h-inductive de ses modèles existentiellement clos ; les compagnes de Ti sont les théories inductives comprises entre sa compagne minimale Tu formée de ses conséquences h-universelles et sa compagne maximale Tk . La théorie Tk est appelée enveloppe de Kaiser de Ti. En présence des paramètres provenant d'un ensemble A, on notera $Tu(A)$ et $Tk(A)$.

2 Extensions élémentaires en logique positive

La notion d'extension élémentaire en logique positive a été introduite et étudiée dans [3] :

Définition 1 ([3]) *Une continuation N de M est une extension élémentaire de M, notée $M \preceq_+ N$, si N est un modèle existentiellement clos de la classe des modèles de la théorie h-universelle $Tu(M)$ de M dans le langage $L(M)$.*

Nous utiliserons l'expression extension élémentaire au sens positif.

En utilisant le théorème 1 de [1], on déduit que, si M est immergé dans N, ce dernier se continue en une extension élémentaire de M.

Dans [3], Poizat donne la caractérisation suivante des extensions élémentaires en logique positive.

Fait 3 ([3, Lemme 1]) *Une continuation N de M en est une extension élémentaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
1. M est immergé dans N.
2. pour tout $\bar{b}$ de N et toute L-formule existentielle positive $f(\bar{x})$ non satisfaite par $\bar{b}$ dans N, il existe une formule existentielle positive $g(\bar{x}, \bar{a})$, à paramètres $\bar{a}$ dans M, qui est satisfaite par $\bar{b}$, et qui est contradictoire avec $f(\bar{x})$: l'énoncé $\neg(\exists \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{a}))$, fait partie de la théorie universelle $Tu(M)$, avec $f(\bar{x}, \bar{y})$ et $g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{a})$ des formules libres.

La preuve de ce résultat dépend de la propriété suivante qui sera cruciale dans la preuve du lemme 2.

Fait 4 ([1]) *La classe des modèles d'une théorie h−inductive est inductive.*

En fait, d'après le théorème 23 de [1], cette propriété caractérise les modèles d'une théorie h-inductive.

Une classe de structures est dite inductive si elle est close par limite inductive d'homomorphismes.

3 Amalgamations

La preuve du théorème 1 utilise les liens entre la compacité et les diverses formes d'amalgamation. Cette section est consacrée à leur étude. Un point qui mérite d'être souligné est le lemme 2 qui clarifie la question d'amalgamation des immersions.

Une des formes d'amalgamation est l'amalgamation dite asymétrique démontrée dans le lemme 8 de [1]. Le lemme suivant en donne une version légèrement modifiée qui convient mieux pour la suite :

Lemme 1 (cf. [1, Lemme 8]) *Soient A, B, C, D des L-structures. Si g est une immersion de A dans B et h un homomorphisme de A dans C , on peut trouver une structure D, modèle de $Tk(C)$, un homomorphisme g' de B dans D et une immersion h' de C dans D tels que $g' \circ g = h' \circ h$.*

Preuve.

Nommons les éléments de A dans B et C par les mêmes symboles de constantes. La preuve consiste à montrer que l'ensemble d'énoncés

$$Tk(C) \cup diag^{+}(B) \tag{1}$$

est consistant. En effet, si $f(\bar{a}, \bar{b})$ est dans le diagramme positif de B avec $\bar{a}$ et $\bar{b}$ extraits de A et de B respectivement, alors $A \models \exists \bar{y} f(\bar{a}, \bar{y})$ puisque A s'immerge dans B. Ainsi, on peut interpréter $\bar{b}$ par un élément de A. La formule obtenue appartient à $T_k(C)$. $\square$

Le lemme suivant montre que l'amalgamation asymétrique peut être symétrisée pourvu qu'on commence avec des immersions, celles-ci s'amalgament. Le corollaire 1 sera crucial dans la preuve du théorème 1 dans le cas particulier où M s'immerge dans N élémentairement.

Lemme 2 (Amalgamation des immersions) *Soient A, B et C trois L-structures telles que A s'immerge dans B et dans C. Alors il existe un modèle D de $Tk(B) \cup Tk(C)$ et des immersions de B et de C dans D tels que le* *diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B \arrow[d, "im"] \\ C \arrow[r, "im"'] & D \end{tikzcd}$$

Preuve.

La stratégie de la preuve repose sur la construction de suites altérnées (B_i) et (C_i) de modèles de $Tk(B)$ et de $Tk(C)$ respectivement.

Les premiers pas de la construction sont les suivants. Par hypothèse, A s'immerge dans B et C. D'après le lemme d'ammalgamation asymétrique, il existe C_1, modèle de $Tk(C)$, qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B \arrow[d, "ho"] \\ C \arrow[r, "im"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

Nous avons noté "im" toute application qui est une immersion et "ho" toute application qui n'est qu'un homomorphisme.

Maintenant nous construirons B_1. Il découle de la première étape de la construction que A s'immerge dans C_1. La structure A s'immerge aussi dans B par hypothèse. D'après le lemme d'amalgamation asymétrique, il existe $B_1 \models Tk(B)$ tel que C_1 se continue dans B_1. Ceci est schématisé comme suit :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B \arrow[d, "im"] \\ C_1 \arrow[r, "ho"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

Ces étapes amorcent la construction par récurrence des deux suites susmentionnées.

Supposons donc B_i et C_i ($i \geq 1$) construits tels que $B_i \models Tk(B)$ et que $C_i \models Tk(C)$. Posons $B_0 = B$ et $C_0 = C$ pour cohérence de notation. Par construction, A s'immerge dans B_i et C_i. Par amalgamation asymétrique, il existe C_{i+1} modèle de $Tk(C_i)$, donc aussi modèle de $Tk(C)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B_i \arrow[d, "ho"] \\ C_i \arrow[r, "im"'] & C_{i+1} \end{tikzcd}$$

Une autre application du lemme d'amalgamation asymétrique nous permet de deduire l'existence de B_{i+1}, modèle de $Tk(B_i)$, par conséquent de $Tk(B)$, qui réalise la commutativité du diagramme ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "im"] \arrow[d, "im"'] & B_i \arrow[d, "im"] \\ C_{i+1} \arrow[r, "ho"'] & B_{i+1} \end{tikzcd}$$

De cette façon, on obtient la suite recherchée d'homomorphismes :

$$B \longrightarrow C_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_{i+1} \longrightarrow B_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

La limite commune des deux suites (B_i) et (C_i) est un modèle de $Tk(B)$ et de $Tk(C)$ car la classe des modèles d'une théorie h-inductive est inductive d'après le Fait 4. La limite D de cette suite, dans laquelle B et C s'immergent suivant par le biais des applications qui nomment les constantes de B et de C dasn D, est la structure recherchée. $\square$

Corollaire 1 *Soient M, M_1 et N trois L-structures. Si M s'immerge dans M_1 et N est un modèle de $Tk(M)$, alors M_1 s'immerge dans un modèle de $Tk(N)$.*

Preuve. On applique le lemme 2 en remplaçant A par M, B par M_1 et C par N. La limite D est le modèle de $Tk(N)$ recherché. $\square$

4 Restrictions élémentaires des structures séparées

Dans cette section, nous démontrerons le théorème principal de cet article. Nous commençons par le rappel des notions principales de la preuve.

Les propriétés des types en logique positive ont été étudiées dans [1] et [2].

Définition 2 ([1], [2]) *Soit Ti une théorie h-inductive dans un langage L. Un n-type est un ensemble maximal de formules positives en n variables, qui est consistant avec Ti.*

Un n-type à paramètres dans M est un ensemble maximal de formules positives en n variables, à paramètres dans M, qui est consistant avec $Ti(M)$ (ou de façon équivalente, avec $Tk(M)$.)

On note $S_n(A)$ l'espace des n-types à paramètres dans A. Un n-type de $S_n(M)$ a une réalisation dans une extension élémentaire de M. On définit sur $S_n(A)$ une topologie dont la base des fermés est l'ensemble des F_f ou f parcourt l'ensemble des formules positives et

$$F_f = \{p \in S_n(A) | p \vdash f\}$$

L'espace des types (positifs) est quasi-compact d'après le fait 1, mais pas nécessairement séparé. Dans [2], Poizat étudie des conséquences du manque de séparation et introduit la définition suivante :

Définition 3 *Une structure M est dite séparée si, pour chaque entier n, l'espace de types $S_n(M)$ est un quasi-compact séparé.*

Dans [1], est démontrée la caractérisation suivante de la séparabilité :

Fait 5 ([1, Théorème 20]) *Les espaces de types d'une théorie h-inductive Ti sont séparés si et seulement si on peut amalgamer les homomorphismes entre les modèles de son enveloppe de Kaiser Tk .*

L'énoncé suivant est aussi vérifié dans [2] :

Fait 6 *Une extension élémentaire N d'une structure séparée M est séparée.*

Par souci de complétude, nous reprenons ici sa preuve simple qui utilise le fait suivant dont nous aurons besoin dans la preuve de théorème 1 aussi :

Fait 7 ([1, lemme 3]) *Soit Ti un ensemble d'énoncés h-inductifs, et soit Tu l'ensemble des énoncés h-universels qui sont conséquences d'un fragment fini de Ti . Alors tout modèle existentiellement clos de Tu est modèle de Ti.*

Preuve. Soient N_1, N_2, N_3, trois modèles de $Tk(N)$ tels que N_1 se continue respectivement dans N_2 et dans N_3. Comme N est une extension élémentaire de M, d'après le fait 7, N est aussi modèle de $Tk(M)$. Par conséquent, N_1, N_2 et N_3 sont aussi modèles de $Tk(M)$. En utilisant le fait 5 on les amalgame dans la classe des modèles de $Tk(M)$. On continue ensuite l'amalgame ainsi obtenu dans un modèle de $Tk(N)$ en utilisant le lemme d'amalgamation asymétrique. □

Le théorème principal de ce travail est une réponse affirmative à la question mentionnée dans l'introduction posée par Poizat dans [2]. Nous fixons le langage L et une paire de L-structures M et N telles que $M \preceq_+ N$. Un point principal de la preuve du théorème 1 est de se ramener de $Tk(M)$ à $Tk(N)$ pour pouvoir utiliser la propriété d'amalgamation, le fait 5.

Théorème 1 *Une restriction élémentaire d'une structure séparée est séparée.*

Preuve.

Soient M_1, M_2, M_3 trois modèles de $Tk(M)$, φ_2 (resp. φ_3) homomorphisme de M_1 dans M_2 (resp. de M_1 dans M_3). Par le corollaire 1, il existe N_1, modèle de $Tk(N)$, tel que M_1 s'immerge dans N_1. Ensuite en appliquant le lemme d'amalgamation asymétrique , on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_1"'] & M_2 \arrow[d, "i_2"] \\ N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_2"'] & M' \end{tikzcd}$$

où M' est modèle de $Tk(M_2)$. Par conséquent, il est aussi modèle de $Tk(M)$. Une deuxième application du corollaire 1 immerge le modèle M' dans ${M'}_2$ modèle de $Tk(N)$. Quitte à remplacer M' par M'_2, on obtient alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "i_1"'] & M_2 \arrow[d, "i_2"] \\ N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_2"'] & {M'}_2 \end{tikzcd}$$

On remarque que ${\varphi'}_2$ est un prolongement de φ_2, tandis que i_2 est une immersion. Par un raisonnement analogue, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "i_1"'] & M_3 \arrow[d, "i_3"] \\ N_1 \arrow[r, "{\varphi'}_3"'] & {M'}_3 \end{tikzcd}$$

Ensuite, par amalgamation des modèles de $Tk(N)$ (le fait 5) on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\varphi_2'} & M'_2 \\ {\scriptstyle\varphi_3'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2} \\ M_3' & \xrightarrow[\psi_3]{} & N' \end{array}$$

avec N', modèle de $Tk(N)$, donc aussi de $Tk(M)$ (le fait 7). Il s'ensuit de cela que

$$\psi_2 \circ \varphi_2' \circ i_1 = \psi_3 \circ \varphi_3' \circ i_1 \ .$$

Ceci implique

$$\psi_2 \circ i_2 \circ \varphi_2 = \psi_3 \circ i_3 \circ \varphi_3$$

et on obtient le diagramme d'amalgamation suivant dans la classe des modèles de $Tk(M)$:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_2 \\ {\scriptstyle\varphi_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2\circ i_2} \\ M_3 & \xrightarrow[\psi_3\circ i_3]{} & N' \end{array}$$

Le théorème suit du fait 5. □

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Altinel et Monsieur Poizat, qui m'ont éclairé par leurs remarques et suggestions. Je tiens à remercier Monsieur Poizat particulièrement pour m'avoir suggéré l'énoncé du lemme 2.

Références

[1] Itaï Ben Yaacov, Bruno Poizat. *Fondements de la logique positive. Journal of Symbolic Logic*, 72, 4, 1141–1162, 2007.

[2] Bruno Poizat. *Quelques effets pervers de la positivité. Preprint.*

[3] Bruno Poizat. *Univers Positifs. Journal of Symbolic Logic*, 71, 3, 969–976, 2006.