THEORIE POSITIVE DES ENSEMBLES

Bruno Poizat[1]

A Paris, l'est une barbière
qu'on dit plus belle que le jour.
Et puisqu'on dit qu'elle est si belle,
eh bien, j'irai la voir un jour !

Résumé. Nous construisons des structures ensemblistes dont chaque élément est l'ensemble des points vérifant une certaine formule ; un problème typique lors de ces constructions, de nature linguistique, est de décider si un ensemble de cette sorte appartient à lui-même ou pas, dans le cas où la formule associée ne l'impose pas ; par exemple l'ensemble vide ne s'appartient pas, l'ensemble plein le fait, mais il y a une incertitude pour l'ensemble des ensembles qui appartiennent à eux-mêmes. Nous utilisons les ressources de la Logique Positive pour lever ces ambigüités, et obtenir des structures canoniques enrobant celle des ensembles héréditairement finis, qui vérifient l'axiome d'extensionnalité et les axiomes de collection pour chaque formule booléenne positive.

Abstract. We construct structures of a set-theoric flavour, whose every element is the set of points satisfying a certain formula ; a typical problem in this kind of constructions, of a linguistic nature, is to decide wether such a set belongs to itself or not, in the case where the associated formula does not force it ; for instance the empty set does not belong to itself, the full set does it, but the case of the set of sets belonging to themselves is uncertain. We use the ressources of Positive Logic to settle these ambiguities, and obtain canonical structures sheltering the hereditarily finite sets, satisfying the axiom of extensionality and the axioms of collection for each positive boolean formula.

Mots-clefs. Paradoxes des Fondements, Théorie des Ensembles, Logique Positive, modèles positivement clos.

Key-words. Paradoxes of Foundations, Set Theory, Positive Logic, positively closed models.

A. Un paradoxe à la mord-moi-le-nœud

Le plus célèbre énoncé contradictoire, dans le langage d'une relation binaire $x \in y$, est $(\exists\ y)\ (\forall\ x)\ [\ x \notin x \Leftrightarrow x \in y\ ]$.

Cette pourtant si évidente contradiction a semé le désordre dans l'esprit de nos aïeux, qui y voyaient le nœud de ce qu'ils ont appelé la *Crise des Fondements*. Une de ses conséquences moins catastrophique est qu'elle a inspiré les arguments de diagonalisation qui, du Théorème de Cantor affirmant l'impossibilité de dénombrer les nombres réels (antérieur à la découverte des paradoxes) au Théorème d'Incomplétude de Gödel, en passant par tous les résultats de hiérarchisation, ont modelé le paysage de la Logique Mathématique au cours du siècle dernier[2].

---

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

[2] Parmi les innombrables ouvrages consacrés à la Crise, très recommandable est MOORE 1982.

Pour pouvoir explorer de façon méthodique les questions de fondement, je propose la définition suivante, dont je tais pour l'instant les déficiences ; je m'écarte de celle de BOURBAKI 1966, qui est relative à une théorie fixée, car il me semble que, depuis l'élection présidentielle américaine de 2020, il est de nouveau permis d'accorder à la cohérence logique une certaine attention (ce qu'a oublié de faire Nikolaï Visarionovič dans son Théorème xx, p. xx).

Nos formules sont toutes du premier ordre, ce qui signifie que leurs quantifications ne portent que sur les individus des structures (toujours de base non vide) dans lesquelles est testée leur satisfaction ; nous gardons présent à l'esprit que la Théorie des Ensembles est l'outil moderne permettant au mathématicien de traduire les ordres supérieurs en termes du premier. Leur langage comprend toujours un symbole binaire $x \in y$, à propos duquel nous employerons le vocabulaire ensembliste ; je dirai à l'occasion que y *possède* x pour signifier que x *appartient* à y, ce qui n'est pas usuel[3].

Définition 1. (i) *Une formule en une variable libre* $\varphi(x)$ *est dite* collectivisante *si l'énoncé* $(\exists\, y)\ (\forall\, x)\ [\ \varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\ ]$ *est consistant ; nous notons* $\mathrm{Col}(\varphi)$ *cet énoncé, et le qualifions d'énoncé de* collection *de la formule* $\varphi(x)$.
(ii) *Un ensemble* Φ *de formules en une variable libre est dit* simultanément collectivisant *si l'ensemble* $\mathrm{Col}(\Phi)$ *des énoncés* $\mathrm{Col}(\varphi)$, *où* φ *parcourt* Φ *, est consistant.*

Après avoir remarqué que, si chaque partie finie de Φ est simultanément collectivisante, Φ l'est également d'après le Théorème de Compacité, et qu'on peut fabriquer, en agrégeant à la formule $x \notin x$ des énoncés contradictoires, des paires de formules collectivisantes individuellement, mais pas simultanément, comme $x \notin x \vee (\forall\, u)\ u = x$ et $x \notin x \vee (\exists\, u)\ u \neq x$, nous donnons quatre exemples de formules collectivisantes, suivis d'un commentaire.

Exemple 1. Une formule φ dont le langage £ ne mentionne pas $\in$ est collectivisante : si M est une £-structure, et a un de ses points, on obtient un modèle de $\mathrm{Col}(\varphi)$ en définissant sur M la relation $\in$ dont les seules instances sont les $x \in a$ pour les x qui vérifient $\varphi(x)$.

Exemple 2. Nous dirons que la formule $\varphi(x)$ est *bornée* par une constante b de son langage £ si elle s'écrit $x \in b \wedge \psi(x)$ où les quantifications de ψ sont restreintes aux éléments de b , étant de la forme $(\forall\, u)\ [\ u \in b \Rightarrow \dots\ ]$ ou $(\exists\, v)\ [\ v \in b \wedge \dots\ ]$. Une formule bornée est collectivisante : à la £-structure M on ajoute un nouveau point a auquel n'appartiennent que les points de M qui satisfont à φ (en particulier $a \notin b$, et $a \notin a$).

[3] Je me demande bien pourquoi.

Exemple 3. Nous définissons ainsi la suite croissante d'ensembles K_n de formules en une variable libre, par induction sur l'entier n ; K_0 est formé de la tautologie $x=x$ et de l'antilogie $x \neq x$; K_{n+1} est formé des combinaisons booléennes des $(\exists\, y)\,[\varphi(y) \wedge y \in x]$ et des $(\exists\, y)\,[\varphi(y) \wedge y \notin x]$, où φ parcourt K_n et y est une variable distincte de x . En s'aidant au besoin de POIZAT 1986, on montrera que la réunion K des K_n est simultanément collectivisante.

Exemple 4. La formule $x \in x$ est collectivisante, car l'énoncé $Col(x \in x)$ est satisfait dans les deux modèles ayant pour support un singleton $\{a\}$. Dans le premier, noté U^i , $a \notin a$, et dans le second, noté U^f , $a \in a$.

Commentaire. La trivialité de l'Exemple 1 nous laisse sans voix. A propos de l'Exemple 2, à peine moins trivial, nous serons plus bavard, car il est la base des réponses classiques aux paradoxes des fondements, postulant qu'il y a cercle vicieux à vouloir définir un objet en considérant son existence comme acquise dans sa propre définition. Cela mène à un principe constructiviste vague, à savoir qu'un ensemble doit être d'une espèce différente, voire supérieure, à celle de ses éléments[4], qu'il ne peut être défini que postérieurement à chacun d'eux. Son implémentation la plus fruste est la Théorie des Types, où l'on divise les structures $M = \cup M_n$ en parties disjointes indexées, par exemple, par les entiers naturels ; on introduit pour chaque n une relation d'appartenance $\in_n$ entre éléments de M_n et de M_{n+1} ; la théorie affirmant que toute formule limitée au niveau n est collectée par un point de M_{n+1} est évidemment consistante, mais ne permet de rendre compte que d'un fragment misérable des mathématiques.

Cette Théorie des Types est cependant le moteur silencieux de théories des ensembles plus puissantes, celle de Zermelo, et ses raffinements de Zermelo-Fraenkel et de Bernays-Gödel, issues de la contemplation du modèle intérieur des ensembles bien fondés obtenu, en partant de l'ensemble vide, par itération de l'opération $X \cup \wp(X)$ au delà de tous les ordinaux (ce n'est pas un ensemble au sens de la théorie, qui affirme qu'un ensemble ne peut contenir tous les ordinaux ; rien à voir avec Gödel !). D'une façon implicite, ces théories limitent l'emploi de la négation, puisqu'elles renoncent à l'idée que les ensembles forment une algèbre de Boole, soit encore que le complément d'un ensemble est un ensemble (notre parti-pris positif nous y fera renoncer également !).

---

[4] Il faut dire, à la décharge des fondateurs de la Théorie des Ensembles, qu'il y a une résistance linguistique à mettre ensembles et éléments sur un même plan (un point est situé sur une droite, qui passe par ce point ; un militant est membre d'un syndicat, qui peut aussi admettre des personnes morales parmi ses adhérents ; un individu possède certaines propriétés, qui le caractérisent) ; en langage formalisé, l'énoncé ci-dessus est manifestement contradictoire, mais il est assez acrobatique de lui associer des illustrations concrètes lui donnant l'apparence d'un paradoxe, qui sont toutes des versions plus ou moins élaborées du barbier de Russell (Que se passe-t-il le jour où les associations qui refusent d'être leur propre membre décident de former un syndicat pour mieux défendre leur conviction ? Probablement rien, car le secrétaire qui tient le registre des associations n'est pas au fait du paradoxe !).

Elle est aussi sous-jacente à une théorie de nature très différente, qui ne renonce pas à cette idée ; il s'agit de New Foundations de Quine, qui affirme que chaque formule typable est collectivisante ; comme elle n'est pas motivée par un modèle, mais par une analyse de la nature des formules pouvant provoquer la contradiction, sa consistance est bien plus problématique (CRABBE 1982)[5].

L'Exemple 3 est le point de départ du Définitionisme de Marc Krasner (KRASNER 2019), qui produit une vaste famille de formules collectivisantes, close par combinaisons booléennes et prise de singletons. Il consiste en la construction d'une structure canonique, dite modèle adéquat minimal, où chaque point est associé à une formule qui le définit.

L'Exemple 4 dénonce une autre propriété évidente de la formule $x \notin x$ qui apporte la contradiction : elle est brutalement négative. Elle nous donne l'idée de lancer la machinerie de la Logique Positive (BEN-YAACOV & POIZAT 2007, YESHKEEV & POIZAT 2018), dans l'espoir d'obtenir des modèles positivement clos dont certains auront peut-être des propriétés canoniques. La formule $x \in x$ ne correspond à aucun ensemble dans les structures considérées dans les Exemples 2 et 3.

B. La jolie barbière et la Contreverse du filioque

Nous montrons dans cette section que l'ensemble des formules positives du langage de l'appartenance est simultanément collectivisant.

Il nous faut d'abord rappeler en quelques mots les principes de la Logique Positive. Le langage £ contient au moins l'égalité $u=v$, l'appartenance $u \in v$, et l'antilogie $\perp$, qui est un symbole propositionnel permettant de définir positivement l'ensemble vide (il n'est pas indispensable d'introduire un symbole dédié à la tautologie $\top$, car on peut la représenter par $(\exists\, x)\ x=x$).

Une application σ de la £-structure M vers la £-structure N est dite *homomorphisme* si, pout tout $\overline{a}$ extrait de M , toute formule atomique satisfaite par $\overline{a}$ dans M l'est aussi par $\sigma(\overline{a})$ dans N ; cette propriété s'étend alors automatiquement aux *formules positives* que nous allons définir.

Une formule est dite positive si elle s'écrit $(\exists\, \overline{y})\ \psi(\overline{x},\overline{y})$, où ψ est une combinaison booléenne positive (n'utilisant que des $\vee$ et des $\wedge$) de formules atomiques. Un énoncé est dit *h-inductif* s'il passe aux limites inductives d'homomorphismes : il est équivalent à une conjonction d'énoncés de la forme $(\forall\, \overline{x})\ [\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})]$, où φ et ψ sont positives ; un cas particulier est formé des énoncés *h-universels,* de la forme $(\forall\, \overline{x})\ [\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \perp]$, soit encore $(\forall\, \overline{x})\ \neg\varphi(\overline{x})$, c'est-à-dire $\neg(\exists\, \overline{x})\ \varphi(\overline{x})$; sont également h-inductifs les énoncés

[5] Dans notre jeunesse, Crabbé et moi-même avons fait connaissance d'un logicien qui présentait des relations binaires choisies selon des principes connus de lui, et par ailleurs décrites sans beaucoup de précision, et qui sommait ses interlocuteurs de montrer que *ce n'étaient pas* des modèles de New Foundations !

$(\forall\ \bar{x})\ (\exists\ \bar{y})\ \psi(\bar{x},\bar{y})$, où ψ est booléenne positive, car on peut les écrire $(\forall\ \bar{x})\ [\top \Rightarrow (\exists\ \bar{y})\ \psi(\bar{x},\bar{y})]$.

Tout modèle d'une théorie h-inductive Θ se continue par homomorphisme en un modèle M *positivement clos* de cette théorie, ce qui signifie que, pour tout $\bar{a}$ de M et tout homomorphisme σ de M dans un modèle N de Θ , $\bar{a}$ dans M et $\sigma(\bar{a})$ dans N satisfont les mêmes formules positives. Les modèles positivement clos sont caractérisés par la propriété suivante : si $\bar{a}$ dans M ne satisfait pas à la formule positive $\varphi(\bar{x})$, alors il en satisfait une autre $\psi(\bar{x})$ qui est contradictoire avec la première au sens de Θ , ce qui signifie que l'énoncé h-universel $\neg(\exists\ \bar{x})\ \varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})$ est conséquence de Θ .

Les énoncés de collection, même dans les cas les plus simples, ne sont pas h-inductifs, comme le montrent $(\exists\ y)\ (\forall\ x)\ x{\in}y$ et $(\exists\ y)\ (\forall\ x)\ x{\notin}y$. Par contre, si nous ajoutons au langage de la formule positive φ une nouvelle constante a_φ , nous obtenons l'énoncé $(\forall\ x)\ [\varphi(x) \Leftrightarrow x{\in}a_\varphi]$ équiconsistant à $\mathrm{Col}(\varphi)$ mais qui, lui, est h-inductif ; nous le nommons $\mathrm{Colt}(\varphi)$ (énoncé de collection *témoignée*). Si Φ est un ensemble de formules positives, nous notons $\mathrm{Colt}(\Phi)$ la théorie inductive formée de ces énoncés, avec une assignation bijective de témoins a_φ étrangers au langage de Φ (dans un modèle de cette théorie, les différents symboles a_φ ne sont pas nécessairement interprétés par des points distincts)[6].

Parmi les modèles de $\mathrm{Colt}(x{\in}x)$, nous en avons distingué deux ; le premier, U^i , est initial, c'est-à-dire se continue dans tous les autres ; le second, U^f , est final, c'est-à-dire continue tous les autres ; c'est aussi l'unique modèle positivement clos de $\mathrm{Colt}(x{\in}x)$, et aussi, d'ailleurs, de la théorie vide.

L'unique point a de U^f satisfait à toutes les formules atomiques non-contradictoires, c'est-à-dire $x{=}x$ et $x{\in}x$, et il satisfait en fait à toute formule positive $\varphi(x)$ à moins qu'elle ne soit contradictoire ; par conséquent il est un modèle de $\mathrm{Colt}(\varphi(x))$ pour chaque formule positive non contradictoire, en interprétant a_φ par a . Et quand $\varphi(x)$ est contradictoire, étant équivalente à la contradiction $\perp$, c'est le modèle initial U^i qui répond à la question ; il vérifie l'axiome h-universel $\neg\ (\exists\ x)\ x{\in}a$, dont l'unique modèle positivement clos est composé de deux points $\{a, c\}$, où $a \in c$ et $c \in c$. C'est donc un fait peut-être surprenant de prime abord, mais assez évident, que toute formule positive soit collectivisante ; on vérifie sans grande peine que la formule $(\exists\ y)\ y{\notin}x$, qui n'est pas positive, est cependant collectivisante, mais exige au moins deux points.

Dans un premier temps, nous vérifions que les formules positives libres sont simultanément collectivisantes ; elles sont équivalentes à l'une des trois formules $\perp$, $x{\in}x$, $\top$ (ou $x{=}x$!) ; pour faire bref, nous notons les témoins $a_\perp$

---

[6] Si vous ne croyez pas à l'Axiome de choix, jetez $\mathrm{Col}(\Phi)$ et remplacez-le par $\mathrm{Colt}(\Phi)$.

$= a$, $a_{x\in x} = b$ et $a_\top = c$; la théorie Colt($\perp$, $x\in x$, $\top$) implique que a , b et c sont distincts : $a \neq b$ car $c \in b$, $a \neq c$ pour la même raison, puisque $a\notin a$ et $a\notin b$, et enfin $b \neq c$ car $a \in c$. Elle a deux modèles définis sur $\{a, b, c\}$, le modèle initial M^i dans lequel $b \notin b$, et le modèle final M^f dans lequel $b \in b$. Ce dernier est bien final, car si dans un modèle M de cette théorie on envoie sur c tout x différent de a et de b , on obtient un homomorphisme de M sur M^f ; mais ce n'est pas en général la seule façon de continuer M sur le modèle positivement clos.

Il nous reste à montrer que M^f , modulo un choix adéquat, mais en fait univoque, des a_φ , est modèle de Colt($\varphi(x)$) pour chaque formule positive φ ! Une telle formule s'écrit comme une disjonction de $(\exists\, \overline{u})\ \varphi_i(x,\overline{u})$ où chaque φ_i est une conjonction de $\perp$, $x=x$, $x=u$, $u=v$, $x\in x$, $u\in x$ ou $x\in u$, dont on peut éliminer les égalités en renommant les variables. Nous dirons que φ est de classe A si chaque φ_i contient la contradiction $\perp$: elle est alors contradictoire dans toute structure. Si l'un des φ_i ne contient ni $\perp$, ni $x\in x$, ni de formule du type $u\in x$, nous lui attribuons la classe C : elle est alors tautologique dans toute structure comportant un ensemble plein, auquel tout le monde appartient. Les autres formules sont mises dans la classe B ; elles sont satisfaites par tout x vérifiant $x\in x$, mais pas par les ensembles vides. De cette analyse suit que toute formule $\varphi(x)$ positive équivaut dans M^f , suivant sa classe, à l'une des trois formules $\perp$, $x\in x$, $\top$, ce qui permet d'interpréter a_φ par a , b ou c , sans qu'on ait le choix de ce témoin.

On remarque que M^i ne convient pas, car il n'a pas de témoin pour la formule $(\exists\, y)\ y \in x$.

Le théologien sera transporté aux cieux par la révélation de ce nécessaire modèle final trinitaire, qui donne raison aux Orthodoxes dans la querelle du filioque, la grande cause de rupture entre les Grecs et les Latins ; en effet, il confirme les prescriptions des Pères du Concile de Nicée, pour qui le Fils est consubstantiel au Père, et l'Esprit procède du Père, mais pas du Fils (elles distinguent clairement le Fils du Père ; DTC 1899-1950).

L'épistémologue, qui n'admet que des arguments positifs, constatera plus froidement qu'il n'y a pas d'obstacle logique à l'existence de l'ensemble des ensembles qui appartiennent à eux-mêmes, et qu'on a d'excellentes raisons (parce que positives !) de penser qu'il s'appartient ; et même que tout un chacun se rase lui-même, sauf s'il ne rase personne, c'est-à-dire que chaque barbier se rase lui-même, ce qui sème le doute sur l'existence de la jolie barbière de Paris[7] !

[7] Rappelons que, dans une langue sexuellement ambigüe comme l'anglais, le turc ou le tibétain (et en fait la grande majorité des langues de l'Humanité, dans lesquelles le sexuellement correct est un concept informulable), le paradoxe du barbier se résoud facilement : the barber is a woman ; berber bir kadın dır ; Degkhan pomo jig dig. "The baker

Le mathématicien sera plus réticent à tirer des conclusions ambitieuses de l'existence d'un modeste modèle de Théorie des Ensembles qui n'a que trois points. Mais, comme il aime pinailler sur les détails, il essayera de démontrer quelque chose qui mérite peut-être le beau nom de théorème.

Théorème 1. M^f *, muni de l'assignation de témoins adéquate, est l'unique modèle positivement clos de la théorie de collection avec témoins des formules positives du langage* $\{\perp, =, \in\}$.

Démonstration. Nous divisons un modèle M de cette théorie en trois parties : A formé de ses ensembles vides, C formé de ses points auxquels appartient au moins un point vide, et B constitué du reste. On vérifie sans peine que le témoin a_φ de la formule φ doit être dans la même classe que φ .

Nous qualifions de *liens* les instances de l'appartenance dans M ; si $x\in y$ est un lien, que x et y soient témoins ou pas, alors x et y sont dans $B\cup C$, ou bien x est dans A et y est dans C ; en conséquence l'application de M sur M^f qui envoie A sur a , B sur b et C sur c est un homomorphisme pour la relation d'appartenance, qui respecte les assignations de témoins.

Si donc M est positivement clos, chacun de ses points x satisfait à $x=a \vee x=b \vee x=c$; par ailleurs nous avons vu que la théorie impose à a , b et c d'être distincts. **Fin**

On remarque enfin que M^f est *extensionnel,* c'est-à-dire satisfait à l'axiome d'extensionnalité $(\forall x,y)(\exists z) [x=y \vee (z\in x \wedge z\notin y) \vee (z\in y \wedge z\notin x)]$. En fait, M^f satisfait à un principe définitioniste plus fort que la simple extensionnalité : il vérifie $(\exists! y) (\forall x) [\varphi(x) \Leftrightarrow x\in y]$ pour chaque formule positive $\varphi(x)$, et chacun de ses points est témoin d'une formule positive. Ces propriétés, bien sûr, le caractérisent.

Lemme 1. *L'extensionnalité ne s'exprime pas h-inductivement.*

Démonstration. Il faut vérifier que cette condition ne passe pas les limites inductives d'homomorphismes. Pour cela, on considère des structures formées des entiers, pour lesquels $x\in y$ équivaut a $x<y$, et de deux autres points α et β qui se possèdent eux-mêmes et l'un l'autre ; dans la structure M_n , les entiers qui appartiennent à α sont ceux qui sont strictement inférieurs à n , tandis que ceux qui appartiennent à β sont ceux qui sont inférieurs ou égaux à n . Dans la

---

is a woman" est probablement une phrase grammaticale en anglais, mais en français on ne peut s'exprimer à propos du sexe de la personne qui fait le pain (et qui n'en mange pas !) que de façon contournée, car "le boulanger est une femme" comme "la boulangère est une femme", et encore plus "la boulangère est un homme", seront vraisemblablement rejetés par une majorité de franco-phones ; c'est encore plus dur dans une langue sémitique, où il faut accorder en genre non seulement les noms, mais aussi les verbes.

limite inductive M des M_n , α et β restent distincts, mais sont tous les deux pleins. **Fin**

Cette démonstration n'utilise que des homomorphismes bijectifs : M_{n+1} est un *renforcement* de M_n , obtenu en lui ajoutant des liens.

Comme le laisse prévoir ce lemme, l'extensionnalité nous causera bien du tracas ; mais il n'est pas possible de la négliger, car cette propriété est le seul garde-fou qui nous préserve de la tentation d'introniser n'importe quelle relation binaire comme "le modèle naturel" de la Théorie des Ensembles.

C. Une brève visite chez Robinson

La Logique Positive a été précédée par une de ses variantes moins performante, la Théorie des Modèles de la Côte Est, promue par Abraham Robinson, où l'on considère des plongements au lieu d'homomorphismes, des formules existentielles au lieu de formules positives, et des énoncés inductifs, qui sont plus généraux que les h-inductifs, car ils ne franchissent que les limites inductives de plongements. La notion de clôture correspondante est celle de modèle existentiellement clos. Les axiomes de collection sans témoins ne sont pas inductifs, mais, pour une formule $\varphi(x)$ existentielle ou universelle l'énoncé $(\forall x)\ [\varphi(x) \Leftrightarrow x \in a]$ l'est, même s'il est consistant.

La théorie $Colt(\Pi)$ de collection avec témoins des formules positives, étant h-inductive, est a fortiori inductive, et nous pouvons partir à la chasse de ses modèles existentiellement clos. Une différence importante avec la Logique Positive, c'est que le choix des témoins, une fois fait, ne peut converger, puisque les plongements sont injectifs : si des témoins sont différents au départ, ils le restent pour toujours, même si les formules dont ils témoignent deviennent équivalentes. On n'oubliera pas que rien n'impose à des formules équivalentes d'avoir le même témoin.

Décrivons les modèles de $Colt(\Pi)$ qui sont extensions de M^f . Comme les formules $(\exists y)\ y \in x$ et $x \in x$ ont le même témoin b , elles sont équivalentes ; notons B l'ensemble des points qui appartiennent à b , et A son complément, qui est formé des ensembles vides ; les points de B s'appartiennent à eux-mêmes ; et par ailleurs tout le monde appartient à c , qui est le témoin de la tautologie. Ces conditions suffisent à faire de la structure un modèle de $Colt(\Pi)$, dans lequel toute formule positive est équivalente à $\perp$, $x \in x$ ou $\top$.

Il est existentiellement clos quand il vérifie les conditions de généricité suivantes, dans lesquelles X et Y sont deux quelconques sous-ensembles finis disjoints, et y un point qui ne leur appartient pas : il existe y auquel appartiennent tous les points de X et aucun de Y ; il existe y appartenant à tous les points de X qui ne sont pas dans A , et n'appartenant à aucun point de Y différent de c .

Nous abandonnons notre chasse à peine commencée, car ces arguties combinatoires laissent peu d'espoir de rencontrer des structures signifiantes.

D. Un lemme de consistance trop général

Jusqu'à présent, notre étude donne l'impression que la Théorie des Ensembles est la discipline mathématique qui assure l'existence de seulement trois objets (et encore, deux d'entre eux sont rarement mentionnés !). Bien qu'il ait beaucoup de sympathie pour cette conclusion, l'auteur de ces lignes va s'efforcer de la contredire et d'envisager la possibilité qu'il y en ait d'autres.

Le modèle M^f a bien des qualités positives, mais aussi quelques insuffisances ; par exemple, il n'a pas de singleton pour l'ensemble vide, témoin de la formule $x=a$; et même, en attribuant le même témoin aux formules $x \in x$ et $(\exists\ y)\ y \in x$, il s'oppose à cette existence. En d'autre termes, il ne peut satisfaire aux axiomes de collection des formules positives à paramètres dans lui-même. Voici une construction très simple permettant de remédier à ce défaut (ou, si vous préférez, de le pallier).

Théorème 2. *Soit* T *une théorie h-inductive, ayant des modèles infinis, dans un langage* £ *ne comprenant pas le symbole* $\in$ *; alors la théorie* $T \cup \mathrm{Col}(\Pi)$ *, où* Π *est l'ensemble des formules positives en une variable du langage* £ $\cup \{u \in v\}$ *, est consistante.*

Démonstration. Soit M_0 un modèle de T de cardinal supérieur à celui de Π . Nous associons à chaque formule φ de Π un point a_φ de M (deux formules équivalentes, ou même identiques, peuvent avoir chacune leur témoin ; ce qui importe, c'est qu'un témoin ne soit témoin que d'une seule formule). Nous partons d'une relation d'appartenance définie sur M_0 , qui a la propriété que, si $x \in a_\varphi$, alors x vérifie $\varphi(x)$: la relation vide convient. Nous définissons ensuite par induction une suite de structures M_n qui ont toute même restriction au langage £ , l'interprétation de $\in$ sur M_{n+1} étant formée des paires $x \in a_\varphi$ où $\varphi(x)$ est satisfaite dans M_n . Montrons par récurrence que M_{n+1} renforce M_n ; c'est clair si $n = 0$; pour $n \geq 1$, si $x \in a_\varphi$ au sens de M_n , c'est que $\varphi(x)$ est vérifiée dans M_{n-1} , et comme c'est une formule positive elle l'est également dans M_n qui, par hypothèse de récurrence, est une continuation de M_{n-1} ; donc $x \in a_\varphi$ est aussi vrai dans M_{n+1} . Soit M la limite inductive des M_n ; comme une formule positive est satisfaite dans M si et seulement si elle l'est dans chaque M_n à partir d'un certain seuil, M est modèle de $T \cup \mathrm{Colt}(\Pi)$. **Fin**

Remarques. (i) On peut partir d'une structure M_0 dont le seul lien est $b \in b$ **,** b étant témoin de la tautologie ; de fait, $b \in b$ ne peut se manifester à l'arrivée que s'il est déjà présent au départ. On peut ainsi introduire deux témoins de la tautologie, un qui s'appartient et un autre qui ne le fait pas.

(ii) Quand le langage £ est réduit à l'égalité, et qu'on fait cette construction en partant d'un ensemble M_0 infini sans liens, avec une assignation de témoins, dans M , à la fin, tous les témoins des formules de classe A sont vides, tous les témoins des formules de classe C sont pleins, et chaque témoin d'une formule

de classe B ne contient aucun ensemble vide, mais contient tous les ensembles pleins et aussi tous les témoins des formules de classe B . Autrement dit, si on part du modèle M_0 des trois témoins basiques a , b et c sans aucun lien, on arrive (en deux étapes) au modèle M^i , et jamais au modèle M^f .
(iii) En morleysant, on peut supposer que les formules du langage £ sont closes par négation, soit encore que toutes les formules du langage £ sont positives. Par exemple, pour introduire la négation de l'égalité, on ajoute au langage un nouveau symbole de relation binaire $r(x,y)$, et à la théorie les axiomes h-inductifs $(\forall\, x,y)\ (\ r(x,y) \vee x=y\ )$ et $\neg\ (\exists\, x)\ r(x,x)$; dans ce cas on se permet de noter $x\neq y$ la relation $r(x,y)$. Cette relation $x\neq y$ positivement définie nous permet de déclarer positivement que x a au moins deux éléments distincts ; par contre il n'y a pas moyen de définir positivement les singletons.
(iv) On peut introduire des constantes dans le langage £ , ce qui veut dire qu'on peut faire la même construction avec les formules positives à paramètres dans M_0 , chacune d'elles ayant un témoin dans M_0 , et qu'on obtient à la fin un modèle M de $(\forall\, x_1, \ldots x_n)(\exists\, y)(\forall\, x)\ [\varphi(x_1, \ldots x_n,x) \leftrightarrow x\in y]$, pour chaque formule positive en plusieurs variables. La physionomie du modèle est sensible à la façon d'assigner les témoins ; c'est ainsi que, si la formule $x=\alpha$ reçoit α pour témoin, elle produit un urélément, c'est-à-dire un ensemble égal à son propre singleton.
(v) Pour transformer les n-uplets en des points, on peut aussi introduire une fonction de couplage dans £ , c'est-à-dire une injection - et pourquoi pas une bijection ? - de $M\times M$ dans M ; cela est conforme à l'idéologie krasnérienne, qui distingue soigneusement les couples des propriétés. Là encore, beaucoup de choses dépendront de la nature de cet accouplement.
(vi) La difficulté est d'obtenir par ce biais des structures extensionnelles, ou même des modèles de $Col(\Pi)$ qui se transforment de manière unique en modèles de $Colt(\Pi)$; il est nécessaire pour cela d'associer à deux formules synonymes le même témoin, mais le problème est de prévoir ce qui fera que deux formules seront équivalentes dans le modèle finalement construit.

E. Extensionnalité : un départ laborieux

Pour chaque ensemble Φ de formules positives en une variable x , le Théorème 2 nous donne des modèles de $Col(\Phi)$ qui ont en outre la propriété que tout point est témoin d'une formule de Φ ; nous notons $Loc(\Phi)$, cette dernière propriété, qui s'exprime au premier ordre quand Φ est fini (à équivalence logique près). Nous allons décrire des situations où chaque formule de Φ a une forme canonique qui lui est équivalente dans tout modèle de $Loc(\Phi)$, tandis que deux formules canoniques distinctes ne sont équivalentes dans aucun modèle de $Col(\Phi)$. Si donc nous reprenons la construction du Théorème 2 en introduisant un témoin par formule canonique, nous obtenons une structure qui est extensionnelle et modèle de $Col(\Phi)$, pour la simple raison qu'elle est modèle de $Loc(\Phi)$! Dans tous les cas que nous pourrons traiter avec succès, Φ sera composé de formules booléennes positives (fbp), c'est-à-dire sans quantifications existentielles.

Nous traitons ici un premier exemple, qui a pour langage l'appartenance et les trois constantes a , b et c ; la théorie Θ_0 de base déclare qu'elles sont témoins respectifs de $\perp$, $x \in x$ et $\top$, si bien qu'elles engendrent une sous-structure isomorphe à M^f ou à M^i , suivant que $b \in b$ ou non. L'ensemble Φ est celui des fbp à paramètres a , b ou c , qui, à équivalence logique (équivalence dans toute structure) près, est fini. D'après le Théorème 2, la théorie $\Theta_0 \wedge Col(\Phi) \wedge Loc(\Phi)$ est consistante avec $b \in b$.

Nous augmentons le langage en introduisant une nouvelle constante a_φ par formule de Φ , et nous considérons la théorie h-inductive $\Theta_0 \wedge Colt(\Phi)$ correspondante, qui est consistante, et dont nous étudions dans cette section les modèles positivement clos.

Comme le montre le Lemme 3 qui suit, la même constante $a_\varphi = a_\psi$ peut servir, sans dommages aux positivement clos, pour deux formules $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ absolument équivalentes (c'est-à-dire qui reçoivent la même interprétation dans toute structure), mais on doit introduire des symboles a_φ même pour $\perp$, $x \in x$ et $\top$, malgré la présence de a , b et c . Nous porterons une attention inhabituelle aux énoncés, à qui nous attribuerons des témoins bien qu'ils doivent être interprétés par $\perp$ ou $\top$ dans une structure donnée.

Lemme 2. *Dans un modèle positivement clos de* $\Theta_0 \wedge Colt(\Phi)$ *, tout point est de la forme* a , b , c *ou* a_φ *; par conséquent ce modèle vérifie* $Loc(\Phi)$.

Démonstration. Les formules atomiques en une variable sont $\perp$, $\top$, $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x \in x$, $a \in x$, $b \in x$, $c \in x$, $x \in a$, $x \in b$, $x \in c$, et des énoncés du type $a=b$, $b \in b$, etc. Dans un modèle de Θ_0 , $x \in a$, $x \in b$ et $x \in c$ peuvent être remplacés par les formules $\perp$, $x \in x$ ou $\top$, et un énoncé atomique est décidé, c'est-à-dire peut se remplacer par $\perp$ ou $\top$, à l'exception de $b \in b$. Toute fbp $\varphi(x)$ se met sous forme disjonctive, et s'écrit $\varphi_1(x) \vee (b \in b \wedge \varphi_2(x))$ où φ_1 et φ_2 sont des fbp ne mentionnant pas l'énoncé $b \in b$; dans un modèle donné de Θ_0 , φ est équivalente à $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ou à φ_1 , suivant que $b \in b$ est satisfait ou pas.

Si une conjonction de formules atomiques contient $x=a$ et pas $b \in b$, on peut effacer les autres formules si elles sont satisfaites par a , ou bien remplacer la conjonction par $\perp$ si ce n'est pas le cas : cela donne un équivalent dans tout modèle de Θ_0 ; on fait de même pour $x = b$ et $x=c$.

En conséquence, dans un modèle fixé de $\Theta_0 \wedge Loc(\Phi)$, une fbp équivaut à une disjonction de formules du type : $\perp$, $\top$, $x=a$, $x=b$, $x=c$, une combinaison booléenne positive de $x \in x$, $a \in x$, $b \in x$, $c \in x$. Ces formules sont donc la disjonction d'une formule *ensembliste*, qui ne peut être satisfaite que par a , b ou c , et d'une formule *prédicative,* combinaison booléenne positive des quatre prédicats $x \in x$, $a \in x$, $b \in x$, $c \in x$. On remarque que c satisfait chaque formule prédicative non contradictoire, tandis que la seule formule prédicative satisfaite par a est la tautologie.

Soient M un modèle de $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$, et N sa restriction aux constantes a , b , c , ... a_φ , ... du langage ; comme les formules considérées n'ont pas de quantifications, N est modèle de $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$. Un point α de M-N ne peut appartenir ni à a ni à aucun a_φ où φ est ensembliste, et ne peut donc appartenir à un point β de N que si c appartient à β ; par conséquent on obtient un homomorphisme rétractif de M sur N en expédiant sur c tous les points de M-N . Comme rien de positif ne s'oppose à ce que ces points soient égaux à c , ils ne peuvent exister quand M est positivement clos. **Fin**

Lemme 3. *Un modèle positivement clos de* $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ *est fini. Il est extensionnel, sauf s'il satisfait* $b \notin b$ *et* $a_\varphi \in a_\varphi$ *pour une formule* $\varphi(x)$ *équivalente en ce qui le concerne à* $x \in x$ *(par exemple* $x \in x \vee b \in b$ *). Il existe des modèles positivement clos non extensionnels de* $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$.

Démonstration. Soit M un modèle de $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi) \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$; considérons deux points distincts α et β de M , différents de a , b et c , qui ont les mêmes éléments ; cela signifie que, quand $\alpha = a_\varphi$ et $\beta = a_\psi$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ont même interprétation sur M (rappelons que α et β sont des témoins, mais peuvent être témoins de plusieurs formules différentes). Ils peuvent jouer des rôles symétriques, quand $\alpha \in \alpha$, $\beta \in \beta$, $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \alpha$, ou bien $\alpha \notin \alpha$, $\beta \notin \beta$, $\alpha \notin \beta$ et $\beta \notin \alpha$; ou encore dissymétrique, quand $\alpha \in \alpha$, $\beta \notin \beta$, $\alpha \in \beta$ et $\beta \notin \alpha$ ou l'inverse. Supposant que α est celui qui s'appartient en cas de dissymétrie, nous observons que pour chaque z de M , $\beta \in z \Rightarrow \alpha \in z$; c'est vrai si $z = a$, b ou c , et si $z = a_\varphi$, comme β ne peut satisfaire une formule ensembliste, c'est qu'il satisfait à la composante prédicative de φ , qui est aussi satisfaite par α puisqu'il vérifie d'avantage de prédicats atomiques que β . Si donc N est la restriction de M aux points $\neq \beta$, la rétraction de M sur N qui envoie β sur α est un homomorphisme pour l'appartenance ; si a_φ est dans N , il reste témoin de φ sur N car la formule est sans quanteurs ; et si $a_\varphi = \alpha$ et $a_\psi = \beta$, φ et ψ sont équivalentes sur M , et le restent sur sa sous-structure N , si bien que α est un témoin de ψ sur N . Autrement dit N est un modèle de $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ image homomorphe de M .

On voit donc que, si M est positivement clos, il vérifie l'extensionnalité pour les points différents de a , b et c . Il est par conséquent fini, car il n'a pas plus de points différents de a , b et c qu'il n'existe de fbp, à équivalence logique près.

S'il y a un α vide, $\alpha \notin \alpha$ et on peut l'identifier à a par la même méthode ; s'il y a un γ plein, $\gamma \in \gamma$ et on peut l'identifier à c . Dans le cas où M vérifie $b \in b$, on peut identifier à b tous les β qui ont les mêmes éléments que b , et alors le modèle M est extensionnel.

Le seul obstacle à l'extensionalité pour un modèle M positivement clos est $b \notin b$ combiné avec l'existence d'un β qui s'appartient et a les mêmes éléments que b ; toutes les paires de points distincts, sauf $\{b, \beta\}$, se distinguent par leurs éléments.

Un modèle positivement clos ne s'abstient de faire quelque chose de positif que si cette chose est incompatible avec une autre chose positive qu'il satisfait. Par la méthode du Théorème 2, on peut construire un modèle de $\Theta_0 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ où $a_\perp = a_{b\in b}$ et $a_{x\in x} \in a_{x\in x}$; ces égalités resteront vraies dans chacunes de ses continuations positivement closes, ainsi que $b \notin b$ car $b \in b$ est incompatible avec la première égalité. **Fin**

Nous notons Θ_1 la théorie Θ_0 augmentée de la condition $b \in b$; comme $\Theta_1 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ est une théorie h-inductive consistante, elle a des modèles positivement clos, qui sont donc tous extensionnels.

Lemme 4. *A toute fbp à paramètres dans* M^f *il est possible d'associer une forme canonique qui lui est équivalente dans tout modèle extensionnels de* $\Theta_1 \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$ *, de manière à ce que deux formules canoniques distinctes ne soient équivalentes dans aucun modèle de* $\Theta_1 \wedge \mathrm{Col}(\Phi)$ *. Un modèle positivement clos de* $\Theta_1 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ *a pour cardinal le nombre de formules canoniques.*

Démonstration. Nous nous plaçons d'abord dans un modèle extensionnel de $\Theta_1 \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$ pour déterminer les formules canoniques. Comme Θ_1 lève les ambigïtés de Θ_0 à propos du comportement de b , en permettant de remplacer $b \in b$ par la tautologie, la théorie $\Theta_1 \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$ permet de réduire nos fbp à l'une des formes suivantes :

1. une formule ensembliste, y compris la contradiction ;
2. $x=a \vee \pi(x)$, où $\pi(x)$ est prédicative non contradictoire et non tautologique ;
3. $x=b \vee [a \in x \wedge \pi(x)]$ ou $x=a \vee x=b \vee [a \in x \wedge \pi(x)]$ où π est une formule prédicative non contradictoire ;
4. une formule prédicative non contradictoire, y compris la tautologie.

Une formule ensembliste non contradictoire équivaut modulo Θ_1 à une disjonction d'égalités $x=a$, $x=b$, $x=c$, ce qui lui donne une forme canonique par énumération de ses points dans l'ordre alphabétique.

Un modèle de $\Theta_1 \wedge \mathrm{Col}(\Phi)$ comprend des témoins des ensembles $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, qui sont distincts parce que a , b et c le sont.

Il n'est pas possible que les témoins de ces ensembles appartiennent à eux-mêmes ; c'est clair pour $\varnothing$, et dans les autres cas a et c ne peuvent être témoins car le premier est vide et le second possède au moins neuf éléments distincts ; donc le seul point délicat est $b \neq \{b, c\}$, qui vient de ce qu'un témoin β de $c \in x$ s'appartient, c'est-à-dire appartient à b , tout en étant différent de b puisque $\{c\}$ lui appartient, et de c puisque a ne lui appartient pas. Comme β satisfait à toutes les formules prédicatives satisfaites par b , nous le qualifierons de *fantôme* de b : ces fantômes sont légions. Comme le point c a aussi des fantômes - par exemple un témoin de $x=a \vee c \in x$ - une formule ensembliste non contradictoire ne peut être équivalente à une formule prédicative, ni à une formule de deuxième ou troisième sorte : les formules non-ensemblistes sont celles qui sont satisfaites par des points en dehors de $\{a, b, c\}$.

Les formules prédicatives ni contradictoires ni tautologiques sont aussi caractérisées par les propriétés suivantes : elles sont satisfaites par c , elles ne sont pas satisfaites par a , et si elles sont satisfaite par b elles le sont aussi par son fantôme β , témoin de $c \in x$.

Par contre a , lui, n'a pas de fantôme. En effet, comme toutes les formules prédicatives non contradictoires possèdent c , modulo $\mathrm{Loc}(\Phi)$ tout point non vide possède a , b ou c ; s'il y a unicité du témoin de la contradiction, la formule $x=a \vee a \in x \vee b \in x \vee c \in x$ est tautologique, soit encore $x \neq a$ est positivement défini par $a \in x \vee b \in x \vee c \in x$. Par conséquent, une formule du deuxième type dans laquelle $\pi(x)$ est équivalente à $a \in x \vee b \in x \vee c \in x$ est tautologique ; sinon, $\pi(x)$ est la formule prédicative maximale qui implique $x=a \vee \pi(x)$.

Pour les formules du troisième type, les fantômes de b montrent de même que la partie prédicative de la formule lui est canoniquement associée.

Il reste à déterminer la forme canonique des formules prédicatives. Une formule non satisfaite par c est ensembliste, et un de ses témoins ne peut s'appartenir à lui-même. Il en est de même pour une formule ensembliste non satisfaite par b ; les autres formules qui ne sont pas satisfaites par b sont de la forme $a \in x \wedge \psi(x)$ ou $x=a \vee (a \in x \wedge \psi(x))$, où ψ est prédicative ; dans le premier cas un témoin ne peut s'appartenir à lui même car a ne lui appartient pas ; la théorie $\Theta_1 \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$ impose donc les deux contraintes booléennes suivantes : $x \in x \Rightarrow c \in x$ et $x \in x \Rightarrow (a \in x \vee b \in x)$.

Chaque assignation de valeurs de vérité permise par elles est représentée :

- $a \in u \wedge b \in u \wedge u \in u$ est satisfait par $u = \{x / x=a \vee x=b \vee a \in x\}$
- $a \notin u \wedge b \in u \wedge u \in u$ est satisfait par $u = \{x / b \in x\}$
- $a \in u \wedge b \notin u \wedge u \in u$ est satisfait par $u = \{x / x=a \vee a \in x\}$.

D'autre part l'existence de témoins pour les sous-ensembles de $\{a, b, c\}$ montre que les prédicats $x=a$, $x=b$ et $x=c$ sont libres sous la condition $x \notin x$.

Comme nous connaissons toutes les valeurs de vérité possibles pour les prédicats atomiques, nous pouvons faire un choix canonique pour les formules prédicatives. **Fin**

Les modèles positivement clos de $\Theta_1 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ satisfont donc aussi aux égalités h-inductive $a_\varphi = a_\psi$ quand φ et ψ ont même forme canonique. En introduisant un témoin a_φ pour chaque formule canonique, avec $a = a_\perp$, $b = a_{x\in x}$, $b \in b$, $c = a_{x=x}$, nous obtenons grâce au Théorème 2 une structure M_0 extensionnelle, satisfaisant à $\Theta_1 \wedge \mathrm{Col}(\Phi) \wedge \mathrm{Loc}(\Phi)$, et qui se transforme en un modèle de $\mathrm{Colt}(\Phi)$ quand on interprète a_φ par le témoin de la forme canonique de φ ; si M est positivement clos, l'application qui associe a_φ à a_φ définit un homomorphisme bijectif entre M_0 et M , ce dernier apparaissant donc comme un renforcement de M_0 ; en fait, M est un renforcement maximal de M_0 qui soit modèle de $\mathrm{Colt}(\Phi)$.

Définition 2. *On se place dans les extensions d'une* $\in$*-structure* A *, et on considère les fbp* $\varphi(x)$ *à paramètres dans* A *qui s'écrivent* $x=\alpha_1 \vee \ldots \vee x=\alpha_m \vee \varphi_1(x) \vee (x\in x \wedge \varphi_2(x))$ *, où les* α_i *sont dans* A *et* φ_1 *et* φ_2 *sont des combinaisons booléennes positives de prédicats* $\alpha_j \in x$ *; on considère l'ensemble des conditions* $\alpha \in x$ *où* α *est un point de* A *qui satisfait à* φ *, et* $\beta \notin x$ *où* β *est un point de* A *qui n'y satisfait pas. On distingue trois cas :*
- *ces conditions impliquent* φ_1 *; la formule* φ *est alors dite* contrainte, *car chacun de ses témoins* a_φ *est contraint de s'appartenir ;*
- *ces conditions impliquent* $\neg\varphi_1$ *et* φ_2 *; la formule est dite* indécise *; grâce au Théorème 2, on peut lui construire des témoins qui s'appartiennent et d'autres qui ne le font pas ;*
- *ces conditions impliquent* $\neg\varphi_1$ *et* $\neg\varphi_2$ *; la formule est dite* décise[8] *(à ne pas s'appartenir), car un de ses témoins ne peut s'appartenir que s'il est dans* A .

Remarques. (i) Le Théorème 2 permet toujours de construire des témoins qui ne sont pas dans A ; si α est un urélément, la formule $x = \alpha$ est décise mais a un témoin qui s'appartient !
(ii) Si la formule est décise et ne fait pas intervenir l'égalité, ses témoins ne s'appartiennent pas, même s'ils sont dans A .
(iii) Si la formule ne fait pas intervenir le prédicat $x\in x$, c'est-à-dire si $\varphi_2 = \perp$, elle est contrainte ou décise
(iv) Par abus de langage, nous attribuons à un témoin les qualités de sa formule ; dans notre cas particulier, $a_\perp$ est décis, même si $a_\perp \neq a$, tandis que $a_{x=x}$ est contraint de s'appartenir ; $a_{x\in x}$ n'est pas décis, même s'il ne s'appartient pas, car l'exemple de b lui montre qu'il peut le faire. Pour les autres formules

[8] Le choix de ce terme est un hommage à la créativité lexicale de mon collègue et ami Tuna Altinel, citoyen d'honneur de la ville de Villeurbanne.

canoniques, a_φ est différent de a , b et c , si bien que s'il est décis il ne peut s'appartenir dans aucun modèle de Θ_1 : par exemple $\{x / c\in x\}$, $\{x / b\in x\}$, $\{x / b\in x \wedge c\in x\}$ sont contraints, tandis que $\{x / a\in x\}$ est décis. On a pris dans Θ_1 une décision pour b , qui est un témoin de $x\in x$, mais ça n'empêche pas l'existence d'autres témoins qui ne s'appartiennent pas ; de même la formule $x=a \vee x\in x$ est indécise, pouvant avoir des témoins qui s'appartiennent et des témoins qui ne s'appartiennent pas. Dans le modèle initial M_0 , les indécis ne s'appartiennent pas, mais ils devront bien prendre une décision quand ils arriveront dans un modèle positivement clos.

Théorème 3. *La théorie h-inductive* $\Theta_1 \wedge \mathrm{Colt}(\Phi)$ *n'a, à l'isomorphie près, qu'un seul modèle positivement clos, qui est le seul modèle de* $\mathrm{Col}(\Phi)$ *renforçant* M_0 *dans lequel tous les indécis s'appartiennent.*

Démonstration. Soit M_1 un renforcement de M_0 qui soit modèle de $\mathrm{Col}(\Phi)$; considérons un de ses points indécis a_φ ; il est possible qu'il s'appartienne, ce qui est toujours le cas s'il vaut b ou c ; sinon, en ajoutant à M_1 le lien $a_\varphi \in a_\varphi$ on obtient un point de départ pour le Théorème 2 aboutissant à un renforcement M_2 de M_1 qui soit modèle de $\mathrm{Col}(\Phi)$.

Par conséquent, dans M positivement clos, les indécis s'appartiennent et les décis ne s'appartiennent pas. Or les conditions $a_\varphi \in a_\varphi$ qu'il satisfait déterminent un renforcement de M_0 vérifiant $\mathrm{Col}(\Phi)$ à l'isomorphie près ; en effet $a_\varphi \in a_\psi$ est déterminé par ψ si a_φ vaut a , b ou c , et sinon par la satisfaction par a_φ de la composante prédicative de ψ . **Fin**

Dans les derniers paragraphes, nous surmonterons les obstacles qui s'opposent à l'itération de la construction initiée dans le Théorème 3. Pour nous y préparer, nous allons d'abord retrouver un objet familier, puis en découvrir un autre plutôt étrange, grâce à l'itération de constructions plus restreintes, dont la simplicité nous reposera l'esprit avant l'assaut final.

F. Le plein du vide[9]

Dans cette section, nous ne considérons les axiomes de collection seulement que pour les formules positives du langage de l'égalité (dans lesquelles les quanteurs existentiels s'éliminent d'eux-mêmes !).

Celles qui sont sans paramètres sont contradictoires ou tautologiques, ce qui nous donne au départ les deux témoins a et c .

[9] Le titre de cette section est emprunté à NOËL 1648, un pamphlet réfutant avec beaucoup d'esprit les thèses de Mr. Pascal jeune sur une prétendue pesanteur de l'air ; les travaux du Père Noël, dont la renommée posthume a été involontairement aggravée par la Coca Cola Company en 1930, ne sont plus guère cités de nos jours que dans les notes érudites des éditions des œuvres de Blaise Pascal.

Dans une première étape, nous considérons les formules égalitaires avec a et c comme paramètres, qui sont la contradiction et la tautologie, déjà pourvues de témoins, et deux nouveaux ensembles $\{a\}$ et $\{a, c\}$, distincts et distincts des précédents, qui appartiennent à c et pas à a et ne s'appartiennent pas entre eux.

A la deuxième étape on ajoute $\{a, \{a\}\}$, $\{a , \{a, c\}\}$, $\{a, c, \{a\}\}$, etc.

On répète à l'infini, et on obtient une structure que je propose d'appeler Ensembles Héréditairement Finis Complétés ; elle est extensionnelle, et satisfait à $(\forall\ x_1, \dots x_n)\ (\exists !\ y)\ (\forall x)\ [\ x=x_1 \vee \dots \vee x=x_n \Leftrightarrow x\in y\ ]$, $(\exists !\ y)\ (\forall x)\ x\notin y$ et $(\exists !\ y)\ (\forall x)\ x\in y$. Chacun de ses points sauf c est un ensemble fini, qui ne s'appartient pas. Ces conditions n'ont en elles-mêmes rien de rare : il suffit de disposer d'une bijection entre un ensemble M et ses parties finies ou pleine, qui évite qu'un ensemble fini possède son représentant, pour en fabriquer un modèle.

Par contre, c'est l'unique modèle positivement clos des axiomes de collection obtenus en introduisant des témoins de la manière suivante : un ensemble μ_0 de témoins pour les formules sans paramètres, un ensemble μ_1 de témoins pour les formules avec paramètres dans μ_0 , ... un ensemble μ_{n+1} de témoins pour les formules avec paramètres dans $\mu_0 \cup \dots \cup \mu_n$, ...

Cette présentation hiérarchisée des témoins conditionne l'aboutissement de la construction, car l'égalité des ensembles $\{x_1, \dots x_m\}$ et $\{y_1, \dots y_n\}$ est décidée par les égalités entre les x_i et les y_j .

Si on se limite aux formules égalitaires non tautologiques, on obtient, en partant de a , la structure bien connue des Ensembles Héréditairement Finis, qui satisfait aux axiomes de Zermelo-Fraenkel à l'exception de l'axiome de l'infini. Cette fois, ce n'est pas l'unique modèle positivement clos de la théorie de collection témoignée associée : on en obtient un deuxième en lui ajoutant un point plein.

Ces deux modèles sont définissables dans l'Arithmétique, et les ordinaux de Von Neumann qu'ils contiennent sont les ordinaux finis, si bien qu'ils interprètent l'Arithmétique.

Chacun est définissable dans l'autre : pour compléter les Héréditairement Finis, on transforme le vide en plein et le singleton du vide en vide, sans toucher aux autres occurences de l'appartenance ; la transformation inverse consiste à changer le plein en vide et le vide en singleton du vide.

F. Des prédicats bien en rang

Dans cette section, nous ne considérons que les fbp du pur langage de l'appartenance, qui ne mentionnent pas l'égalité. Nous ajoutons à notre modèle M^f un témoin pour chacune de ces fbp à paramètres dans ce dernier, mise sous forme disjonctive ; comme les formules sont libres de quantifications, elles conservent leur témoin quand on restreint la structure à ses témoins.

Comme $x\in a$, $x\in b$, $x\in c$ sont équivalentes respectivement à $\bot$, $x\in x$, $\top$, il suffit de considérer les combinaisons booléennes positives des prédicats $x\in x$, $a\in x$, $b\in x$, $c\in x$. Comme dans les modèles que nous étudions l'ensemble des éléments d'un point est défini par une formule prédicative, c appartient à tout le monde sauf à a , tandis que a n'appartient à personne sauf à c ; nous obtenons donc la chaîne stricte d'ensembles suivante : $a \subset \{x / a\in x\} = \{x / x=c\} \subset \{x / b\in x\} \subset \{x / c\in x\} = \{x / x\neq a\} \subset c$; comme ils sont témoins de formules ne mentionnant pas $x\in x$, ils sont tous décis ou contraints, les trois derniers s'appartenant, à la différence des deux premiers. L'information qui manque pour déterminer complètement le modèle, c'est de savoir si b et $\{x / b\in x\}$ sont différents ou égaux ; comme rien de positif ne s'oppose à l'égalité, elle a lieu dans le modèle positivement clos P_1 , dans lequel $b\in x \Leftrightarrow x\in x \Leftrightarrow x\in b$: il n'est donc formé que de ces cinq points !

Pour y voir plus clair nous les renommons $a_0 \subset a_1 \subset b \subset c_1 \subset c_0$.

Que va-t-il se passer à la deuxième étape ? Il nous faut ajouter $\{x / a_1\in x\}$ ainsi que $\{x / c_1\in x\}$, formant un ensemble a_2 s'intercalant entre a_1 et b et un ensemble c_2 s'intercalant entre b et c_1 . On répète, et à la fin on obtient la chaîne d'ensembles ainsi définie :

$$a_0 \subset a_1 \subset a_2 \subset ... \subset a_n \subset ... \subset b \subset ... \subset c_n \subset ... \subset c_2 \subset c_1 \subset c_0$$

où les éléments de a_n sont c_0 , ... c_{n-1} ; ceux de b sont b et les c_i ; et tout le monde appartient à c_n sauf a_0 , ... a_{n-1} .

Quand on renverse la table d'appartenance on obtient : a_n appartient à c_0 , ... c_n ; b appartient à b et aux c_i ; c_n appartient à tout le monde sauf a_0 , ... a_n . On voit bien que a_0 est vide, que $a_{n+1} = \{x / a_n\in x\}$, que $b = \{x / b\in x\} = \{x / x\in x\} = \{x / x\in b\}$, que $c_{n+1} = \{x / c_n\in x\}$, et que c_0 est plein.

Ce modèle P est extensionnel, et satisfait aux axiomes $(\exists!\ y)(\forall\ x)\ x\notin y$, $(\exists!\ y)(\forall\ x)\ x\in y$, $(\exists!\ y)(\forall\ x)\ (x\in x \Leftrightarrow x\in y)$, $(\forall\ z)(\exists!\ y)(\forall\ x)\ (z\in x \Leftrightarrow x\in y)$ et $(\forall\ x, y)\ (x\subseteq y \vee y\subseteq x)$, qui impliquent comme il se doit $(\forall\ x_1, ...\ x_n)\ (\exists!\ y)(\forall\ x)\ (x\in y \Leftrightarrow \varphi(x_1, ...\ x_n, x))$ pour chaque combinaison booléenne positive φ de $x_1\in x$, ... $x_n\in x$, $x\in x$.

Sa linéarité peut surprendre, et ses interprétations théologiques ou épistémologiques restent ouvertes à la spéculation, mais il n'est pas d'avantage mathématiquement évitable que notre modèle trinitaire initial.

Il est vrai que sa puissance d'expression arithmétique est réduite, car il est bi-interprétable avec les entiers naturels munis de l'ordre et de la parité ; mais là n'est pas la question !

G. Les habits neufs du président Mao[10]

Nous allons faire notre possible pour gérer les complications apportées par l'égalité à la lumineuse simplicité de la pure appartenance. Nous apprécierons la ferme décision des formules qui s'abstiennent de mentionner $x \in x$.

Théorème 4. *Il existe une suite* M_n *de structures finies et extensionnelles, dans le langage de l'appartenance, obéissant aux conditions suivantes :*

(i) $M_0 = \{a, c\}$, *où* a *est témoin de* $\perp$ *et* c *témoin de* $\top$ *;*

(ii) *soit* Φ_n *l'ensemble des fbp à paramètres dans* M_n *qui sont ou bien ensemblistes, de la forme* $x=\beta_1 \vee \ldots \vee x=\beta_n$ *, ou bien prédicatives, combinaison booléenne positive de* $\alpha_i \in x$ *;* M_{n+1} *est l'unique extension extensionnelle de* M_n *satisfaisant* $\mathrm{Col}(\Phi_n) \wedge \mathrm{Loc}(\Phi_n)$ *;*

(iii) M_{n+1} *et aussi l'unique modèle positivement clos, pour le seul choix de témoins possible, de la théorie* $\mathrm{Colt}(\Phi_n)$.

Démonstration. Supposons M_n déjà construit ; si un point α de M_n est dans $M_i - M_{i-1}$, on choisit une formule φ_α de Φ_i dont il est le témoin, et on considère la théorie h-inductive Θ_n comprenant le diagramme - positif comme négatif - de M_n et les énoncés déclarant que α est témoin de φ_α (De fait, le choix de φ_α est sans importance et le diagramme est impliqué par les axiomes de collection). Par hypothèse, le prédicat $x \in x$ est absent des formules que nous considérons ici.

On prend pour M_{n+1} un modèle positivement clos de la théorie h-inductive $\Theta_n \wedge \mathrm{Colt}(\Phi_n)$. Comme dans le Lemme 2, on montre qu'il vérifie $\mathrm{Loc}(\Phi_n)$. Comme dans le Lemme 3, on montre qu'il est extensionnel et fini ; quand il s'agit d'identifier un point a_φ hors de M_n avec α dans M_n , et que $a_\varphi \in a_\varphi$, la formule φ , n'étant pas décise, est contrainte : comme α en est témoin, il s'appartient.

Reste l'unicité. Montrons d'abord que *toute formule prédicative non (explicitement !) contradictoire à paramètres dans* M_n *est satisfaite par des points de* $M_{n+1} - M_n$; en effet, le témoin t de la formule $x=\alpha_1 \vee \ldots \vee x=\alpha_\kappa$ où les α_i énumèrent M_n , vérifie $\alpha \in t$ pour chaque α de M_n ; il satisfait donc à toutes les formules prédicatives non contradictoires à paramètres dans M_n ; comme M_n est extensionnel, son seul point qui possède tous les autres est c , et $t = c$ voudrait dire que tous les points de M_{n+1} sont dans M_n , ce qui n'est pas ; en effet, tout sous-ensemble de M_n est témoigné par une formule ensembliste, et la grande majorité de ces $2^{\mathrm{card}(M_n)}$ sous-ensembles de M_n ne peuvent avoir leur témoin dans M_n .

Il en suit que *toute fbp à paramètres dans* M_n *qui n'est satisfaite que par des points de* M_n *est ensembliste* ; son témoin ne s'appartient pas : c'est clair s'il

[10] Cette fois, le titre est emprunté à celui d'un ouvrage de Pierre Ryckmans (LEYS 1971), dont le nom aborde plus heureusement aux époques futures que celui du P. Noël.

n'est pas dans M_n , et sinon on procède par récurrence. Nous obtenons donc une forme canonique pour les formules ensemblistes, qui ne peuvent être prédicatives que si elles sont contradictoires.

Par ailleurs, l'existence de ces sous-ensembles donne une forme canonique aux formules prédicatives : elles ne sont équivalentes dans M_{n+1} que si elles le sont dans l'absolu.

On conclut comme dans le Lemme 4, puisque la contrainte ou la décision des formules prédicatives détermine les appartenances. **Fin**

La limite inductive M des M_n est une espèce d'habillage des ensembles héréditairement fini, qui n'a pas de témoin pour $x \in x$. Il est interprétable dans l'Arithmétique, qui permet de représenter sa construction par récurrence, et interprète l'Arithmétique. Il définit au premier ordre ses parties finies, avec équicardinalité, et ses ordinaux sont finis : son pouvoir d''expression en termes de combinatoire comme de complexité est sans mystère.

Il n'est pas possible de faire cette construction en incluant dans Φ_n toutes les formules libres qui ne mentionnent pas $x \in x$, car certaines d'entre elles bloquent la récurrence ; en effet, comme toute formule prédicative non triviale est satisfaite par c , tout point non vide de M_{n+1} possède un point dans M_n , si bien que les formules $\top$ et $a_1 \in x \vee \ldots \vee a_\kappa \in x \vee x=a$, où $a_1 , \ldots a_\kappa$ énumèrent M_n , ont la même interprétation sur M_{n+1} , mais devront être distinguées au-delà.

Il nous faut donc adopter une stratégie plus globale, en renonçant à l'idée d'obtenir nos modèles comme limites de structures finies extensionnelles.

H. Extensionnalité : on renonce au caractère local

Nous utilisons ici toutes les formules positives libres omettant $x \in x$; nous introduisons les témoins en cascade, $\mu_0 = \{a, c\}$ pour les formules sans paramètres, ... μ_{n+1} pour les formules à paramètres dans μ_n , ...

Comme nous sommes à la recherche de structures extensionnelles, il vaut mieux éviter d'introduire dès le départ une infinité de témoins de la contradiction, qu'il faudra égaler plus tard, ni d'attribuer des témoins différents à des formules visiblement équivalentes ; nous donnerons donc le même témoin à des formules synonymes, si bien que chaque μ_n sera fini. Nous obtenons, grâce au Théorème 2, des structures que nous qualifions de *sveltes* ainsi caractérisées : M est réunion d'une suite M_n de sous-structures finies ; chaque point de M_{n+1} est témoin d'une fbp à paramètres dans M_n , et chaque fbp à paramètres dans M_n a un témoin dans M_{n+1} . La *hauteur* d'un point de M est le plus petit n pour lequel il est dans M_n .

Voici quelques propriétés de ces structures :

1. Suite à notre introduction hiérarchisée des témoins, toute fbp à paramètres dans M équivaut dans M à la disjonction d'une formule ensembliste et d'une

formule prédicative. Si la formule initiale ne fait pas intervenir $x \in x$, il en est de même de son équivalent.

2. M est infini : comme chaque sous-ensemble de M_n a un témoin dans M_{n+1} , $card(M_{n+1}) \geq 2^\wedge card(M_n)$.

3. Etant donnés α_1 , ... α_m , β_1 , ... β_n distincts, il existe une infinité de x vérifiant $\alpha_1 \in x \ldots \wedge \alpha_m \in x \wedge \beta_1 \notin x \wedge \ldots \wedge \beta_n \notin x$: les témoins des parties finies de M y pourvoient. Toute formule prédicative non contradictoire est satisfaite par une infinité de points ; si deux formules prédicatives ne sont pas équivalentes, leur différence symétrique est infinie.

4. Si deux formules $x=\alpha_1 \vee \ldots \vee x=\alpha_m \vee \varphi(x)$ et $x=\beta_1 \vee \ldots \vee x=\beta_n \vee \psi(x)$ sont équivalentes sur M , il en est de même de leur parties prédicatives respectives $\varphi(x)$ et $\psi(x)$; deux formules prédicatives ne sont équivalentes sur M que si elles le sont absolument (modulo les égalités de points dans M), et il n'y a qu'une façon d'écrire une formule $x=\alpha_1 \vee \ldots \vee x=\alpha_m \vee \varphi(x)$ où aucun des α_i ne satisfait à φ .

5. Le témoin a_φ d'un ensemble fini ne s'appartient pas : on choisit la formule φ de sorte que a_φ ne soit égal à aucun a_ψ de hauteur inférieure ; la partie prédicative de φ est contradictoire, et par conséquent les éléments de a_φ sont de hauteur inférieure à la sienne. Finalement, nos ensembles finis sont bien fondés, car ils obéissent aux exigences de la théorie des types.

5'. M contient une infinité de points qui s'appartiennent, par exemple les témoins des formules $x=\alpha \vee \alpha \in x$ où α parcourt les ensembles finis ; comme une formule prédicative est satisfaite par une infinité d'ensembles finis, M n'a pas de témoin de $x \in x$.

6. Tout point non vide de M_{n+1} contient un point de M_n ; en effet il est fini ou possède c . Tout point de M_{n+1} satisfait donc $x=a_1 \vee \ldots \vee x=a_m \vee \alpha_1 \in x \vee \ldots \vee \alpha_k \in x$, où les α_j énumèrent M_n et où les a_i sont ceux d'entre eux qui témoignent de la contradiction. Le témoin de cette formule, qui est dans M_{n+1} , possède tout M_n ; mais il n'est pas tautologique, car il ne possède pas tous les points de M_{n+2} , par exemple le singleton d'un point de $M_{n+1} - M_n$. On voit donc que M_{n+1} n'est pas extensionnel.

7. Considérons une partie positivement définissable de M , défine par une formule $(\exists\, x_1, \ldots x_n)\ \varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_m, x_1, \ldots x_n, x)$, où φ est booléenne positive ; elle finit par s'écrire comme une disjonction de conjonctions de formules atomiques où les variables n'appartiennent pas à des constantes, $x_1 \ldots x_n$ n'étant pas égalées à une constante ; à moins que toutes les branches ne soient satisfaites que par au plus un seul x , la formule est vérifiée en posant $x_1 = \ldots = x_n = x = c$; autrement dit, si elle est satisfaite par une infinité de points, elle est satisfaite

par c , et en fait par tous les témoins de la tautologie, qui se comportent comme des points génériques. On en conclut que ni $x \neq c$ ni $c \notin x$ ne sont positivement définissables, et a fortiori ni $x \neq y$ ni $y \notin x$ ne le sont.

Ce n'est pas parce que nous rêvons d'un modèle qui ne peut être localement extensionnel que nous devons renoncer à le construire pas à pas.

Théorème 5. *Il existe un et un seul modèle svelte extensionnel associé aux fbp qui ne mentionnent pas l'appartenance à soi-même.*

Démonstration. Nous construisons une suite de structures M_n et de théories T_n , en évitant d'introduire des témoins distincts pour des formules dont nous savons qu'elles devront être équivalentes dans le modèle final. L'unicité vient de ce que nous n'avons guère de choix pour le faire.

$M_0 = \{a, c\}$, T_0 déclare qu'ils sont témoins de l'antilogie et de la tautologie. Supposons que M_n et T_n aient été construits ; nous mettons dans $M_{n+1} - M_n$ un témoin par formule $x=\alpha_1 \vee ... \vee x=\alpha_m \vee \varphi(x)$, où φ est une combinaison booléenne positive de $\beta_j \in x$ où les β_j sont dans M_n , et où les α_i sont des points de M_n qui ne satisfont pas à φ ; les formules sont considérées à équivalence près, c'est-à-dire qu'on choisira une forme disjonctive canonique pour sa partie booléenne et un ordre pour ses points exceptionnels. A cette équivalence près, il y a bijection entre les formules et leurs témoins, si bien que nous n'ajoutons pas de témoins pour les formules à paramètres dans M_{n-1} , qui ont déjà leur témoin dans M_n .

La théorie T_{n+1} déclare qui est témoin de quoi, et que les différents points de M_{n+1} sont distincts ; il faut voir qu'elle détermine les liens dans M_{n+1} . Or l'appartenance de x dans M_n à y dans M_{n+1} est déterminée par la satisfaction par x de la formule dont y est le témoin ; tandis que l'appartenance de x dans $M_{n+1} - M_n$ à y dans M_{n+1} est déterminée par la satisfaction par x de la partie prédicative de la formule associée à y , elle-même déterminée par les points de M_n qui satisfont la formule dont x est le témoin (cela vaut en particulier en cas d'égalité de x et de y).

D'après les propriétés établies ci-dessus, la réunion des M_n est le modèle cherché. **Fin**

I. C'est la lutte finale ![11]

Nous franchissons dans cette section finale le deuxième obstacle s'opposant à l'itération du Théorème 3, qui est que les formules prédicatives $x \in x$ et $x \in x \wedge (a \in x \vee b \in x)$ sont équivalentes sur le modèle obtenu à ce stade, ce qui n'est plus vrai dès qu'il y a un témoin de $x=\{a\} \vee \{a\} \in x$.

[11] Paroles de Eugène Pottier, musique de Pierre Degeyter.

Nous utilisons maintenant toutes les fbp ; les propriétés que, dans la section précédente, nous avons établies pour les modèles sveltes restent valables, à l'exception de 5', grâce aux compléments suivants :

3bis. Une disjonction d'un nombre fini de formules prédicatives non tautologiques ne peut être satisfaite par tous les éléments de M sauf un nombre fini ; en effet, quand, on la met sous forme disjonctive on obtient une expression $\varphi(x) \vee (x \in x \wedge \psi(x))$, où φ et ψ ne mentionnent pas $x \in x$, φ n'étant pas (explicitement) tautologique ; cette formule est insatisfaite par une infinité de témoins d'ensembles finis.

3ter. Etant donnés α_1 , ... α_m , β_1 , ... β_n distincts, aucun β_i n'étant plein, il existe une infinité de x vérifiant $x \in x \wedge \alpha_1 \in x \wedge \ldots \wedge \alpha_m \in x \wedge \beta_1 \notin x \wedge \ldots \wedge \beta_n \notin x$: d'après le point précédent, on peut trouver γ différent des β_i et qui n'appartient à aucun d'entre eux ; un témoin de $x=\alpha_1 \vee \ldots \vee x=\alpha_n \vee x=\gamma \vee \gamma \in x$ convient, et on en obtient une infinité en faisant varier γ .

En conséquence, si c est le seul témoin de la tautologie, la seule contrainte qui pèse sur les formules prédicatives est $x \in x \Rightarrow c \in x$, ce qui permet de leur attribuer une forme canonique. Si β est un point de M_n qui s'appartient, on pourra vérifier qu'un point de $M_{n+1} - M_n$ qui s'appartient doit satisfaire à $\alpha_1 \in x \vee \ldots \vee \alpha_m \in x \vee \beta \in x$, où α_1 , ... α_m sont les points de M_n qui n'appartiennent pas à β ; mais, si β n'est pas plein, le nombre de points qu'il ne possède pas augmente à chaque étape, et cette contrainte s'évapore à l'infini.

Théorème 6. *Il existe un et un seul modèle svelte extensionnel, relativement à toutes les fbp, dans lequel tous les indécis s'appartiennent.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du Théorème 5. La seule différence est que, pour déterminer l'appartenance sur M_{n+1} il faut décider quels sont les points de $M_{n+1} - M_n$ qui s'appartiennent ; pour les contraints et les décis, on n'a pas le choix, et on force les indécis à s'appartenir. **Fin**

Ce modèle est le dernier que je voudrais offrir à la méditation de mes lectrices et de mes lecteurs : il est l'aboutissement des techniques employées dans cet article, où il importe de n'utiliser que des formules sans quanteurs. Il satisfait $(\forall x_1, \ldots x_n)(\exists! y)(\forall x) [\varphi(x_1, \ldots x_n, x) \Leftrightarrow x \in y]$ pour chaque formule booléenne positive φ , mais, comme aucune fbp n'y définit un ensemble cofini, il n'a pas de témoin pour $(\exists y)\ y \in x$, qui est un équivalent positif de $x \neq a$.

Si on s'autorise l'emploi de la négation, on y définit au premier ordre ses parties finies, avec l'équicardinalité, ainsi que ses ordinaux de Von Neumann, qui sont les ordinaux finis (il ne peuvent posséder c !).

Je laisse à d'autres la construction et l'étude de modèles ensemblistes positifs plus puissants et plus sophistiqués, car j'ai écrit cet article non pas pour décrire des paradis pouvant héberger les mathématiciens, mais seulement pour convaincre que l'appartenance à soi-même (ou autodespotisme[12]) ne provoquait pas un effondrement de la Logique.

Références

BEN YAACOV & POIZAT 2007 *Fondements de la Logique Positive,* The Journal of Symbolic Logic, 72, 1141-1162

BOURBAKI 1966 Nikolaï Visarionovič Bourbaki, *Eléments de mathématiques,* Vol. XVII, Ch. 2, Paris, Hermann

CRABBE 1982 Marcel Crabbé, *On the consistency of an unpredicative fragment of Quine's NF,* The Journal of Symbolic Logic, 47, 131-136

DTC 1899-1950 *Dictionnaire de Théologie Catholique,* Paris, Letouzay et Ané

KRASNER 1979 Luc Bélair et Bruno Poizat, *Œuvres choisies de Marc Krasner,* Paris, l'Harmattan

LEYS 1971 Simon Leys, *Les habits neufs du président Mao,* Paris, Champ Libre

MOORE 1982 Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice,* Springer, New York

NOËL 1648 Etienne Noël, *Le Plein du Vuide, ou le corps dont le vuide apparent des expériences nouvelles est rempli ...,* Paris

POIZAT 1986 Bruno Poizat, *A l'Ouest d'Eden,* The Journal of Symbolic Logic, 51, 795-816

POIZAT & YESHKEYEV 2018 Bruno Poizat et Aibat Yeshkeyev, *Positive Jonsson Theories,* Logica Universalis, vol. 12, 101-127

13 mars 2021, jour de mon 75ème anniversaire

[12] Mes maîtres m'ont appris à ne pas mélanger le grec et le latin dans les mots prétentieux ; il est plus facile de s'en tenir à des racines germaniques, car Selbstgehörigkeit me semble être un mot acceptable dans la langue de nos glorieux ancêtres ; en anglais, selfbelonging ou selfownership valent peut-être mieux que le très orwellien selfbelongership, puisqu'il faut exclure selfmembership et autobelonging.