Symétries et translations,
principalement dans les groupes de rang de Morley fini sans involutions

6 janvier 2020

Bruno POIZAT[1]

Tuna'ya

Résumé. Les sous-ensembles convexes (c'est-à-dire clos par symérie) d'un groupe sont apparus dans POIZAT 2018, motivés par FRECON 2018 dont la démonstration par contradiction consiste en la construction d'un ensemble convexe de dimension deux ("un plan"), puis à montrer que ce plan ne peut exister. Dans un groupe de rang de Morley fini sans involutions, à un ensemble convexe définissable sont associées des symétries et des translations, qu'on entreprend ici d'étudier dans l'abstrait, sans référence à un groupe qui les enveloppe ; cela nous conduit à introduire axiomatiquement des structures que nous appelons *symétrons.*

Le Z*-Theorem de Glauberman permet d'élucider complètement les symétrons finis : chacun est isomorphe à l'ensemble des symétries associées à une partie convexe d'un groupe fini sans involutions, qui est loin d'être uniquement déterminée : de fait, il existe des groupes finis non isomorphes qui ont les mêmes symétries, et aussi des symétrons finis qui ne sont pas isomorphes aux symétries d'un groupe,.

La situation est plus incertaine dans le cas des symétrons de rang de Morley fini, ou même algébriques, qui sont l'objet d'étude principal de cet article. Mais bien qu'un symétron soit une structure nettement plus faible qu'un groupe, nous pouvons étendre aux symétrons des résultats bien connus à propos des groupes de rang de Morley fini : condition de chaîne, décomposition en composantes connexes, caractérisation des parties définissables génériques, génération elliptique, etc.. En outre, sous l'hypothèse de la Conjecture d'Algébricité, nous généralisons le Théorème de Glauberman au contexte de rang de Morley fini.

Abstract. The convex subsets of a group appeared in POIZAT 2018, motivated by FRECON 2018 whose proof by contradiction consists in the construction of a convex set of dimension two ("a plane"), and then in showing that such a plane cannot exist.

In a group of finite Morley rank without involutions, to a definable convex subset are associated symmetries and translations, that we undertake here to study in the abstract, without mentionning a group envelopping them. For this reason we introduce axiomatically a certain kind of structures that we call *symmetrons.*

Glauberman's Z*-Theorem allows to elucidate completely the finite symmetrons: each of them is isomorphic to the set of symmetries associated to a convex subset of a finite group without involutions, which is far from being uniquely determined. In fact, there exist non-isomorphic finite groups which have the same symmetries, and also finite symmetrons which are not isomorphic to the symmetries of a group.

The situation is not so clear in the case of symmetrons of finite Morley rank, or even algebraic, which are the main objects of study of this paper. But in spite of the fact that a symmetron be a structure much weaker that a group, we can extend to symmetrons some well-known results concerning groups of finite Morley rank: chain condition, decomposition into connected components, characterisation of the generic definable subsets, elliptic generation, etc.. Moreover, assuming the Algebricity Conjecture, we generalize Glauberman's Theorem to the finite Morley rank context.

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

Mots-clefs. Involutions, symétries, groupes finis, groupes de rang de Morley fini.
Key-words. Involutions, symmetries, finite groups, groups of finite Morley rank.

1. Symétrons

Nous appelons *protosymétron* une structure dans le langage d'une fonction binaire $s(x,y)$ satisfaisant aux équations suivantes :

1. $s(x,x) = x$ 2. $s(s(x,y),y) = x$ 3. $s(s(x,z),s(y,z)) = s(s(x,y),z)$.

A y fixé, la fonction unaire $s(x,y)$ est appelée *symétrie de centre* y , $s(x,y)$ étant le *symétrique de* x *par rapport à* y ; nous noterons également $s_y(x)$ cette symétrie de centre y .

Les deux premières équations signifient que chaque symétrie est une application involutive qui fixe son centre, et la dernière que chaque symétrie est un automorphisme de la structure ; elle équivaut, en posant $u = s(x,z)$, à l'équation $s(u,s(y,z)) = s((s(u,z),y)z)$, qui signifie que la symétrie s_z conjugue la symétrie de centre y et la symétrie de centre $s_z(y)$.

Par exemple l'application $s(x,y) = x$ définit un protosymétron sur n'importe quel ensemble, pour lequel chaque symétrie est l'application-identité. Plus substantiellement, n'importe quel groupe est un protosymétron pour l'opération $s(x,y) = y.x^{-1}.y$.

Pour une raison que nous éclaircirons plus tard, les sous-structures d'un protosymétron S , c'est-à-dire ses sous-ensembles clos pour l'opération $s(x,y)$, sont qualifiées de sous-ensembles *convexes* de S .

Les permutations de S qui sont produits de deux symétries sont appelées *translations primaires,* et leur ensemble est noté $T_1(S)$; $T_n(S)$ note l'ensemble des produits de 2^n symétries, et la réunion des $T_n(S)$ est l'ensemble $T(S)$ des *translations* de S ; le groupe engendré par les symétries est $ST(S) = T(S) \cup s_u.T(S)$ pour n'importe quelle symétrie s_u , les produits d'un nombre impair de symétries étant appellés *inversions* de S .

Chaque $T_n(S)$ est normal dans $ST(S)$.

Nous dirons que $T(S)$ est *borné* si $T(S) = T_n(S)$ pour n assez grand ; ce terme est préférable à définissable, car les $T_n(S)$ ne sont pas en général inclus naturellement dans un même ensemble définissable.

Un protosymétron est dit *injectif* si chacune de ses symétries n'a qu'un seul point fixe, c'est-à-dire s'il satisfait à l'axiome universel : $s(x,y) = x \Rightarrow x = y$. Si à un point y du protosymétron injectif S on associe la symétrie de centre y , on obtient un isomorphisme entre S et l'ensemble Σ de ses symétries, où $s(\sigma,\tau)$ est interprétée par la conjugaison $\tau.\sigma.\tau$ de σ par τ , à l'intérieur du groupe des permutations de S .

Un protosymétron injectif non réduit à un point correspond donc à la donnée, dans un groupe, d'un ensemble d'involutions clos par conjugaison et ne commutant pas deux-à-deux. Ce n'est pas a priori une structure bien exigeante car, étant donnés deux points, il peut y avoir plusieurs, ou aucune, symétries qui les échangent.

Un protosymétron est dit *surjectif* si, pour chaque couple de points x et y, il existe une symétrie qui les échange.

Le protosymétron d'un groupe G est injectif si et seulement si G ne contient pas d'involutions, c'est-à-dire pas de points d'ordre deux différents de l'élément neutre ; en effet, $a.u$ est un point fixe de la symétrie $a.x^{-1}.a$ si et seulement si $u^2 = 1$. Il est surjectif si et seulement si tout point de G est un carré ; en effet $a.x^{-1}.a = y$ si et seulement si $(a.x^{-1})^2 = y.x^{-1}$.

Si S est un protosymétron injectif, pour chacun de ses points u nous notons S_u le translaté $s_u.\Sigma = \Sigma.s_u$ de Σ par la symétrie s_u ; il est formé des translations primaires de la forme $s_u.s_v$, où de façon équivalente $s_w.s_u = s_u.(s_u.s_w.s_u)$; S_u est une partie convexe du groupe $T(S)$, sur laquelle l'application $y.x^{-1}.y$ définit un protosymétron isomorphe à S ; elle engendre $T(S)$, tout point de $T_1(S)$ étant produit de deux points de S_u, puisque $s_v.s_w = s_u.s_u.s_v.s_u.s_u.s_w = (s_u.s_u.s_v.s_u).(s_u.s_w)$. Dans Σ, qui se compose d'involutions, les symétries sont des conjugaisons ; mais ce qui est transporté par translation, c'est la symétrie, pas la conjugaison !

On voit donc qu'un protosymétron injectif est isomorphe à celui défini par une partie convexe et génératrice de son groupe de translations.

Remarque. Les groupes $ST(S)$, $ST(\Sigma)$ et $ST(S_u)$ sont isomorphes, mais pas identiques. Si $t = s_1. \ldots .s_n$ est un produit de n symétries de S, chacune agit par conjugaison sur Σ, sur lequel l'action de t est $t.\sigma.t^{-1}$.

Son action sur $S_u = s_u.\Sigma = \Sigma.s_u$ comme composé de symétries est $s_u t s_u.s_u\sigma.t^{-1}$, ou, si on préfère l'autre côté, $t.\tau s_u.s_u t^{-1} s_u$; en particulier, quand t est la symétrie s, c'est $s_u s s_u.s_u\sigma.s = s_u s.(s_u\sigma)^{-1}.s_u s$. Si t commute avec s_u, il agit par conjugaison sur S_u ; c'est ainsi que s_u inverse S_u.

Nous appellerons *symétron* un protosymétron pour lequel, étant donnés x et y, il existe un unique z tel que $s(x,z) = y$; nous qualifions ce point z de *milieu* de x et de y. Un symétron est à la fois injectif et surjectif.

Un simple comptage montre qu'un protosymétron surjectif fini est en fait un symétron, et le Lemme 1(vii) qui suit affirme qu'il en est de même d'un protosymétron injectif fini.

Les symétries du groupe G forment un symétron si et seulement si chaque point de G a une unique racine carrée ; nous dirons qu'un tel groupe est *médial.* Nous dirons aussi qu'un groupe est *sous-médial* si la racine carrée y est unique à condition d'exister, c'est-à-dire si $x^2 = y^2$ implique $x = y$.

En résumé, la donnée d'un symétron équivaut à celle, dans un groupe, d'un ensemble Σ d'involutions vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) pour tous a et b dans Σ, $a.b.a$ est dans Σ ;

(ii) pour tous a et b dans Σ, il existe un unique c dans Σ tel que $c.a.c = b$.

Le groupe $ST(\Sigma)$ est alors le quotient par son centre du groupe engendré par Σ.

Elle équivaut également à la donnée d'une partie convexe X d'un groupe telle que, pour tous a et b dans X, il existe un unique c dans X tel que $c.a^{-1}.c = b$.

Il est avantageux de décrire les symétrons dans le langage des deux fonctions binaires $m(x,y)$ et $s(x,y)$ (milieu et symétrie) ; bien sûr, chacune permet de définir l'autre, mais il faut faire ainsi si nous voulons une classe équationelle, et la stabilité par sous-structure. Dans ce langage, un symétron sera donc une structure satisfaisant aux cinq équations suivantes :

1. $m(x,x) = x$; 2. $m(x,y) = m(y,x)$; 3. $s(x,m(x,y)) = y$; 4. $m(x,s(x,y)) = y$;

5. $s(m(x,y),z) = m(s(x,z),s(y,z))$.

Les équations 3 et 4 signifient que, à x fixé, milieu et symétrie sont des fonctions unaires inverses l'une de l'autre ; la première signifie qu'une symétrie ne fixe que son centre, et la seconde qu'elle est involutive ; quant à la dernière, elle signifie que chaque symétrie est un automorphisme de la structure.

Dans le langage du milieu, les axiomes de symétron sont les suivants :

$m(x,x) = x$; $m(x,y) = m(y,x)$; pour tous x et z il existe un unique y tel que $m(x,y) = z$; quant à la cinquième condition, elle est remplacée par l'*Axiome du losange* : si $z = m(x,u) = m(y,v)$, alors $m(m(x,u),m(y,v)) = z$.

Si X est un sous-ensemble du symétron S, son *symétriseur* $Sym(X)$ est l'ensemble de ses centres de symétrie, c'est-à-dire l'ensemble des u tels que $s_u(X) = X$; X est convexe s'il est inclus dans son symétriseur ; $Sym(X)$ est lui-même convexe, puisque la symétrie de centre $s_u(v)$ est $s_u.s_v.s_u$. On remarque que, si X est non vide, $Sym(X)$ s'injecte dans X ; en effet, fixant a dans X, à chaque y de $Sym(X)$ nous associons $x = s_y(a)$; comme y est le milieu de x et de a, il s'agit bien d'une injection.

Lemme 1. *Dans un protosymétron injectif* S *:*
(i) *Deux symétries ne commutent que si elles sont égales.*
(ii) *Une translation ou une inversion fixe le point* u *si et seulement si elle commute avec* s_u*, et alors elle normalise* S_u.
(iii) *Il n'y a pas de translations primaires involutives (autres que l'identité).*
(iv) *Toute puissance d'une translation primaire est une translation primaire ; plus précisément, si* t *est dans* S_u*,* t^n *aussi.*
(v) *Le centre de* $T(S)$ *est formé des translations qui sont inversées par conjugaison par chaque symétrie ; il ne contient pas d'involutions.*
(vi) S *est un symétron si et seulement si, pour chaque* u*, chaque point de* S_u *a une unique racine carrée dans* S_u.

(vii) *Si* S *est oméga-stable ou si* $T_1(S)$ *est périodique,* S *est un symétron ; de plus chaque point de* $T_1(S)$ *a alors une unique racine carrée dans* $T_1(S)$ *, qui est son unique racine carrée dans* T(S) *si ce dernier n'a pas d'involutions.*

Démonstration. (i) Elles ont même point fixe.
(ii) La conjuguée de s_u par cette application est une symétrie, qui fixe u . Nous avons remarqué que son action sur S_u se fait alors par conjugaison.
(iii) Si $(s_u.s_v)^2$ vaut l'identité, s_u et s_v commutent, et sont égales.
(iv) $(s_u.s_v)^n = s_u.s_v.(s_u.s_v)^{n-1}$; or $s_v.(s_u.s_v)^{n-1}$, étant exprimé par un mot symétrique de longueur impaire, est une symétrie.
(v) Soient t une translation centrale et s_u une symétrie ; posons $t' = s_u.t.s_u$; comme t commute avec $s_v.s_u$, chaque symétrie s_v échange t et t' ; les symétries induisent donc un même automorphisme involutif σ sur le centre de T(S) ; t.σ(t) est fixé par σ , commute avec tous les s_u , et vaut donc l'identité, si bien que $\sigma(t) = t^{-1}$. Réciproquement, si la translation t est inversée par chaque symétrie, elle commute avec chaque translation, et si de plus $t = t^{-1}$ elle fixe chaque point de S et vaut l'identité.
(vi) $s_v = s_w.s_u.s_w$ si et seulement si $s_u.s_v = s_u.(s_w.s_u.s_w) = (s_u.s_w)^2$.
(vii) Nous considérons $a = s_u.s_v$ et l'ensemble C des points de S_u qui commutent avec tous les points de S_u qui commutent avec a ; C est un ensemble convexe commutatif qui contient a et 1 , si bien que ses carrés forment un groupe ; comme il ne contient pas d'involutions, ce groupe est 2-divisible : c'est évident dans le cas périodique, et dans le cas oméga-stable cela vient de ce qu'il est définissable. Par conséquent, si α est dans C , on trouve β dans C tel que $\alpha^2 = \beta^4$, si bien que, puisque α et β commutent, $\alpha^{-1}.\beta^2$ est d'ordre 2 ; comme c'est un point de $T_1(S)$, qui ne contient pas d'involutions, $\alpha = \beta^2$; on voit donc que C est en fait un groupe commutatif médial.

Par conséquent a possède une racine carrée b dans C ; si b' est une racine carrée de a dans S_u , b et b' commutent, si bien que $b^{-1}.b'$ est d'ordre deux ; comme c'est un point de $T_1(S)$, b = b' .

Supposons que a ait aussi une racine carrée c dans S_v , ce qui implique que a est dans $S_u \cap S_v$; comme a appartient à un groupe commutatif C inclus dans S_u , et à un autre C' inclus dans S_v , et que $C \cap C'$ est définissable dans le cas oméga-stable, ce dernier est 2-divisible, et l'unique racine carrée b de a dans S_u est aussi son unique racine carrée c dans S_v .

Comme $T_1(S)$ est normal, tout point de ST(S) qui commute avec un point a de $T_1(S)$ commute aussi avec son unique racine carrée b située dans $T_1(S)$, et les autres racines carrées de a sont de la forme b.i , où i est une involution qui commute avec a . **Fin**

Lemme 2. *Dans un symétron* S *:*
(i) *Une inversion ou translation involutive a au moins un point fixe, et si elle n'en a qu'un seul c'est une symétrie.*

(ii) *Si une translation primaire a un point fixe, elle vaut l'identité.*
(iii) *Etant donné trois points* u *,* x *et* y *de* S *, il existe un unique* v *dans* S *tel que* $s_u.s_v(x) = y$.
(iv) *Les translations primaires sont les commutateurs des symétries ;* $T(S)$ *est le groupe dérivé de* $ST(S)$.
(v) *Le centre de* $T(S)$ *est l'intersection des* S_u .
(vi) *Une inversion ou translation inversée par* s_u *est produit d'un point de* S_u *par un élément d'ordre deux qui commute avec ce dernier.*

Démonstration. (i) Soit t involutif dans $ST(S)$; pour chaque x de S , t échange x et $t(x)$, et fixe leur milieu u ; si u est son unique point fixe, t est égale à s_u .
(ii) Supposons que $s_u.s_v$ fixe x , dont nous notons y l'image par s_v ; ces deux symétries échangent x et y , ont toutes deux pour centre le milieu de x et de y , et sont donc égales.
(iii) Cela signifie encore que $s_v.s_u(y) = x$, soit encore que v est le milieu de $s_u(y)$ et de x .
(iv) $s_u.s_v = s_u.(s_w.s_u.s_w) = [s_u.s_w]$, où w est le milieu de u et de v .
(v) Soient t une translation centrale et u un point de S ; comme s_u inverse t , $s_u.t$ est une involution ; si v est un de ses points fixes, $s_v.s_u.t = s_u.t.s_v$, soit encore, en faisant commuter t et $s_v.s_u$, $s_v.s_u.s_v = t^{-1}.s_u.t$, si bien que v est le milieu de u et du centre $t^{-1}(u)$ de la symétrie $t^{-1}.s_u.t$; l'involution $s_u.t$, n'ayant qu'un seul point fixe, est donc une symétrie, ce qui signifie que t est dans S_u . Réciproquement, si t est dans chaque S_u , il est inversé par toutes les s_u .
(vi) Si la conjugaison par s_u inverse t , $s_u.t$ est une involution, et a un point fixe v , si bien que $s_v.s_u.t = s_u.t.s_v$, soit encore $t.s_v.s_u.t = s_u.s_v$; dans $ST(S)$, $s_u.s_v$ est un point fixe de la symétrie de centre t , et $t = s_u.s_v.i$ où $i^2 = 1$; comme $s_u.t.s_u = t^{-1}$, i commute avec $s_u.s_v$. **Fin**

Corollaire 3. *Dans un symétron* S *:*
(i) *S'il n'y a pas de translations involutives,* S_u *est l'ensemble des translations inversées par* s_u *, et les seules involutions de* $ST(S)$ *sont les symétries.*
(ii) *Si* $T(S)$ *est sous-médial, chaque inversion a au plus un point fixe.*
(iii) *Si* $T(S)$ *est médial, chaque inversion a exactement un point fixe.*
(iv) *Si chaque inversion a au plus un point fixe, il n'y a pas de translations involutives, et même chaque translation a les mêmes points fixes que son carré.*

Démonstration. (i) Le premier point est conséquence du Lemme 2(vi) ; et donc si t est une translation telle que $s_u.t$ soit involutive, t est dans S_u .
(ii) & (iii) Soient s une symétrie et t et θ deux translations ; on suppose que $s.\theta$ est une involution qui commute avec $s.t$: $s.t.s.\theta = s.\theta.s.t = \theta^{-1}.t$, soit encore $t.s.t.s = t.\theta^{-1}.t.\theta^{-1}$, si bien que $t.\theta^{-1}$ est racine carrée dans $T(S)$ de $t.s.t.s$ (lequel est un point de $T(S)$ qui est le carré de $t.s$ dans $ST(S)$). Par ailleurs, si

$t.\theta^{-1}$ est l'unique racine carrée dans $T(S)$ de $t.s.t.s$, elle commute avec $t.s$, si bien que $(t.\theta^{-1})^{-1}.(t.s) = \theta.s$ est une involution, ainsi que sa conjuguée $s.\theta$.
(iv) Si la translation t échange x et $t(x)$, de milieu u , ce sont des points fixes de l'inversion $t.s_u$, qui sont donc égaux. **Fin**

Lemme préparatoire. *Soient* G *un groupe commutatif sans involutions et* X *une partie de* G *contenant l'élément neutre ; on suppose que* G *est périodique, ou bien qu'il est oméga-stable et que* X *est définissable. Alors, si* X *est convexe, ou bien s'il est clos par prise de milieu, c'est un sous-groupe de* G .

Démonstration. Si X est convexe, comme il est commutatif ses carrés forment un groupe H , qui, sous les hypothèses, est clos par extraction de l'unique racine carrée dans G ; donc X = H .

Si X est clos par milieu, il faut montrer que X est clos par somme.

On note G additivement. Si a est dans X , $a/2$ l'est aussi, car c'est le milieu de 0 et de a . Dans le cas périodique, l'intersection de X et du groupe (fini) engendré par a est clos pour l'injection $x/2$, donc aussi pour son inverse, si bien que $2a$ est dans X . Si a et b sont dans X , ce dernier contient également le double de leur milieu, qui est $a+b$.

Dans le cas oméga-stable, comme la division par 2 est injective, et que les types génériques (c'est-à-dire de rang de Morley maximal) de X sont en nombre fini, si x est un point générique de X (pris dans une extension élémentaire de G), $2x$ l'est aussi. Si x est générique sur a , $(x+a)/2$, ayant même rang de Morley que x , est un point générique de X , ainsi que son double $x + a$. Comme à x fixé la relation $z = x + y$ établit une bijection entre le type de z et celui de y , si z et y sont génériques indépendants, $z - y$ est générique. De plus tout générique est de cette forme, et si x est générique dans X , $-x$ l'est aussi. Soient alors a et b deux points de X et x générique sur $\{a, b\}$; $a - x$ et $b + x$ le sont aussi, et le milieu de leurs doubles, qui vaut $a + b$, est dans X . **Fin**

Théorème 4. *On considère une partie non vide* X *du symétron* S *, et on suppose soit que* $T_1(S)$ *est périodique, soit que* S *est oméga-stable et que* X *est définissable (si* S *est fini, chacune des deux hypothèses est vérifiée).*
(i) *Si* X *est convexe, il est clos par prise de milieu, et égal à son symétriseur.*
(ii) *Si* X *est clos par prise de milieu, il est convexe.*

Démonstration. (i) & (ii) On considère u et v dans X ; dans le premier cas, il faut voir que X contient le milieu de u et de v , et dans le deuxième qu'il contient le symétrique de u par rapport à v . On remplace S par Σ , puis on translate par s_u , et on note Y l'ensemble des $s_u.s_w$, où w parcourt X ; posant $a = s_u.s_v$, il faut voir dans le premier cas que le milieu de 1 et de a , c'est-à-dire l'unique racine carrée de a contenue dans S_u , est dans Y , et dans le second cas que a^2 est dans Y .

Nous avons vu, dans la démonstration du Lemme 1(vii), que les points de S_u commutant avec tous les points de S_u qui commutent avec a forment un groupe commutatif médial C, qui est définissable dans le second cas. En posant $Z = C \cap Y$ on est ramené au lemme préparatoire.

Si X convexe il est inclus dans $Sym(X)$; s'il est non vide et clos par prise de milieu, $Sym(X)$ est inclus dans X, chacun de ses points étant au milieu de deux points de X. **Fin**

Nous avons remarqué qu'un symétron peut être vu comme une structure dans le langage de la fonction-milieu $m(x,y)$, ou bien dans celui de la fonction-symétrie $s(x,y) = s_y(x)$, qui sont interdéfinissables ; dans les cas favorables considérés dans Théorème 4, la notion de sous-structure ne dépend pas de ce choix de langage. Mais, dans le cas général, pour obtenir un symétron induit sur une sous-structure X de S, nous devons supposer que X est à la fois convexe et clos par prise de milieu : nous dirons dans ce cas qu'il est un *sous-symétron* de S ; $T(X)$ est alors une section de $T(S)$.

Pour un symétron oméga-stable, nous obtenons la condition de chaîne descendante sur les convexes définissables ; en effet, si X est strictement inclus dans Y, nous prenons a dans $Y\text{-}X$; comme X est close par prise de milieu, la symétrie $s_a(x)$ définit une injection définissable de X dans $Y\text{-}X$, si bien que le rang de Morley de X est strictement inférieur à celui de Y, ou sinon le degré de Morley de X est strictement inférieur à celui de Y.

2. L'exemple primordial : les groupes de rang de Morley fini sans involutions

Soit G un groupe. Nous avons considéré les inversions et les translations associées à son protosymétron, qui sont produits de symétries ; nous notons $ST(G)$ et $T(G)$ les deux groupes qu'elles forment.

Il est par ailleurs des translations et inversions plus générales, associées à la structure de groupe, qui sont les applications de la forme $a.x^{-1}.b$ et $a.x.b$; nous notons $ST_g(G)$ et $T_g(G)$ les groupes correspondants. Un calcul rapide montre que les inversions et translations de groupe sont des automorphismes du protosymétron de G, dont elles permutent les parties convexes.

Le groupe $T_g(G)$ correspond à une action sur G du groupe $G\times G^i$, où G^i est le groupe isomorphe à G par l'application inverse, dans lequel le produit de a par b est $b.a$; comme $a.x.b = a'.x.b'$ pour tout x si et seulement $a' = c.a$ et $b' = c^{-1}.b$ pour un c central dans G, le noyau de cette action est le groupe formé des (c,c^{-1}) où c parcourt le centre de G. L'ensemble $T_1(G)$ est formé des translations qui s'écrivent $ab.x.ba$.

La symétrie de centre y a même sens dans G et dans son groupe inverse G^i, l'opération binaire $y.x^{-1}.y$ étant la même dans ces deux groupes.

Nous notons ε l'automorphisme involutif du groupe $G\times G^i$ qui échange les deux coordonnées, c'est-à-dire que $\varepsilon(a,b) = \varepsilon(b^{-1},a^{-1})$; l'ensemble de ses points fixes est le groupe formé des (a,a^{-1}) , et les points qu'il inverse forment le *convexe diagonal* des (a,a) . Le groupe $ST_g(G)$ correspond à une action du produit semi-direct de $G\times G^i$ par l'échange des coordonnées.

Quand le groupe G est médial et que u représente le passage à l'inverse (qui est la symétrie centrée sur l'élément neutre), S_u est formé des symétries qui s'écrivent $a.x.a$; en posant $x = 1$ on voit que cette écriture est unique, si bien que l'isomorphisme entre S_u et le symétron de G identifie ce dernier au convexe diagonal.

Lemme 5. (i) *Le groupe* $ST(G)$ *est formé des* $a.x^{\pm 1}.b$ *, où* a *et* b *sont congrus modulo le dérivé* G' *de* G .
(ii) *Si* G *est engendré par son dérivé et par les carrés de ses éléments centraux, ce groupe est égal à* $ST_g(G)$ *, étant formé de tous les* $a.x^{\pm 1}.b$.
(iii) *Si* G *est égal à son dérivé et a un centre trivial, ce groupe est isomorphe au produit semi-direct de* $G\times G^i$ *par l'échange des coordonnées.*
(iv) *Si le dérivé* G' *de* G *est définissable,* $T(G)$ *est définissable ; si tout élément de* G' *est produit d'un nombre fixé de commutateurs,* $T(G)$ *est borné. Les réciproques sont vraies quand le centre de* G *est trivial.*
(v) *Le groupe* $T(X)$ *des translations d'une partie convexe définissable* X *d'un groupe de rang de Morley fini* G *est borné (et définissable !).*
(vi) *Dans un groupe de rang de Morley fini, chaque élément du dérivé est produit d'un nombre borné de commutateurs.*

Démonstration. (i) Un produit de symétries s'écrit $a_1.a_2. \ldots .a_n.x^{\pm 1}.a_n. \ldots .a_2.a_1$. Pour la réciproque, $a.b.a^{-1}b^{-1}.x.a^{-1}b^{-1}.b.a = [a,b].x$, si bien que $ab.x^{\pm 1}.ca$ est un produit de symétries si b et c sont dans G' .
(ii) Si $a = \alpha^2\gamma$ et $b = \beta^2\delta$, où α et β sont centraux tandis que γ et δ sont dans le dérivé, $a.x^{\pm 1}.b = (\alpha\beta).\gamma.x^{\pm 1}.\delta.(\alpha\beta)$.
(iii) Dans ces conditions, $a.x.b = c.x.d$ seulement si $a = c$ et $b = d$.
(iv) D'après (i), les translations de $T(G)$ sont celles qui s'écrivent $ga.x.a$, où g est dans G' , si bien que $T(G)$ est définissable si G' l'est. Pour l'aspect borné des choses, nous avons vu lors de la démonstration de (i) qu'une translation par un commutateur est produit de trois translations de la forme $\alpha.x.\alpha$, si bien que, si g est produit de n commutateurs, la translation $ga.x.a$ est produit de $3n + 1$ ou $3n + 2$ symétries suivant la parité de n .

Si le centre de G est trivial, l'écriture de ces translations est unique, et $g.x$ est dans $T(X)$ si et seulement si g est dans G' ; si elle est produit de $n+1$ symétries, g est de la forme $g = a_1. \ldots .a_n.a_{n+1}$ où $a_{n+1}.a_n. \ldots .a_1 = 1$, c'est-à-dire que $g = a_1. \ldots . a_n.a_1^{-1}. \ldots .a_n^{-1}$; en faisant commuter a_n^{-1} et $a_1^{-1}. \ldots .a_{n-1}^{-1}$, on montre alors par récurrence sur n que g est produit de n commutateurs.
(v) Après translation on peut supposer que X contient l'élément neutre ; les couples (a,a) , où a parcourt X , forment une partie convexe définissable du groupe $G\times G^i$ contenant $(1,1)$, qui, d'après la Proposition 13 de POIZAT 2018,

engendre de façon bornée un sous-groupe Γ définissable (il revient au même de considérer les couples (a,a^{-1}) dans $G\times G$) ; vu comme ensemble d'applications de G dans G , le groupe engendré par les symétries centrées en X est formé des $\alpha.x^{\pm 1}.\beta$ avec (α,β) dans Γ ; pour obtenir les translations de X , on quotiente les $\alpha.x.\beta$ par celles d'entre elles qui valent l'identité sur X .
(vi) On reprend les démonstrations précédentes en se plaçant non pas dans le groupe $T_g(G)$, mais dans le groupe $G\times G^i$, et en considérant le groupe engendré par le convexe diagonal. **Fin**

Remarques. (i) Le Lemme 5(vi) est un résultat bien connu de Zil'ber ; on le montre habituellement (POIZAT 1985, p. 89 ; BOROVIK & NESIN 1994, p. 87-88) en s'appuyant sur le fait qu'un groupe qui n'a qu'un nombre fini de commutateurs a un dérivé fini (ROSENLICHT 1961) ; la démonstration offerte ici repose sur le fait plus simple qu'un ensemble convexe fini, contenant l'élément neutre, engendre un groupe fini. La philosophie de l'histoire, c'est que, pour tout groupe G , G' et le groupe engendré par le convexe diagonal sont interdéfinissables.
(ii) Dans un groupe de rang de Morley fini (ou même seulement stable), s'il n'y a qu'un nombre fini de commutateurs, chaque point n'a qu'un nombre fini de conjugués et centralise la composante (centralisateur-)connexe du groupe. Or il est facile de voir que si le centre du groupe G est d'indice fini dans G , le groupe dérivé de G est fini. En effet, dans le groupe $G\times G^i / Z$, ou Z est formé des (γ,γ) où γ est central dans G , le convexe diagonal C a une image finie, engendrant un groupe fini ; il existe donc g_1 , ... g_n dans G' et a_1 , ... a_n dans G tel que tout point du groupe engendré par C soit de la forme $(g_1.a_1.\gamma,a_1.\gamma)$ ou ... ou $(g_n.a_n.\gamma,a_n.\gamma)$ avec γ central, soit encore de la forme $(g_1.x,x)$ ou ... ou $(g_n.x,x)$; $(h,1)$ ne peut être dans ce groupe que si h est l'un des g_i .

Un groupe G médial, ou même seulement sous-médial, ne contient pas d'involutions, puisque 1 y est l'unique racine carrée de 1 ; réciproquement les groupes sans involutions périodiques, et en particulier finis, ou oméga-stables sont médiaux (en effet, dans ces groupes chaque point a une racine carrée de même centralisateur ; voir POIZAT 2018) ; c'est donc le cas des groupes périodiques simples construits dans OLSHANSKII 1982. Nous verrons que la structure de ses symétries, c'est-à-dire la loi binaire $y.x^{-1}.y$, ne détermine pas nécessairement G , même à isomorphie près.

Si le groupe médial G est commutatif, l'inversion $a.x^{-1}.b$ est la symétrie $c.x^{-1}.c$, où c est la racine carrée de ab ; chaque translation est alors produit de deux symétries.

Remarque. Dans le langage des groupes et de la racine carrée, les groupes médiaux forme une variété, définie par les équations : $(x^{1/2})^2 = x$, $(x^2)^{1/2} = x$, $(y.x.y^{-1})^{1/2} = y.x^{1/2}.y^{-1}$; en effet la deuxième équation impose qu'il n'y a pas d'involutions, et la troisième que x et $x^{1/2}$ ont même centraliseur.

Exemple 1. Le produit semi-direct du groupe additif des entiers par lui-même, dont la loi de groupe est $(x,u).(y,v) = (x + (-1)^u.y, u + v)$, n'a pas d'involutions, mais n'est pas sous-médial ; c'est un groupe superstable.

Lemme 6. *Dans un groupe médial* G *:*
(i) *Chaque centralisateur est clos par extraction de racine carrée ; le quotient de* G *par son centre est médial.*
(ii) *Aucun point* $\neq 1$ *n'est conjugué de son inverse.*
(iii) *Le groupe* $T_g(G)$ *de toutes les translations est médial* ; *chaque translation a les mêmes points fixes que son carré ; si* X *est une partie convexe non-vide de* G *, le groupe* $T(X)$ *est sous-médial (en particulier si* $X = G$ *).*
(iv) *Une inversion a un unique point fixe. Si* X *est une partie convexe de* G *, les inversions de* $ST(X)$ *ont au plus un point fixe.*

Démonstration. (i) Si x conjugue y et z , il doit aussi conjuguer leurs uniques racines carrées $y^{1/2}$ et $z^{1/2}$; par conséquent, si x commute avec y , il commute avec $y^{1/2}$.

Supposons que $x^2 = y^2.z$, où z est central ; comme $z^{1/2}$ est aussi central, $x^2 = (y.z^{1/2})^2$, et $x = y.z^{1/2}$.
(ii) $(xa)^2 = a^2$ si et seulement si a conjugue x et son inverse ; en fait, cette condition signifie que G est sous-médial.
(iii) La translation $a^{1/2}.x.b^{1/2}$ est racine carrée de la translation $a.x.b$, et il faut voir que c'est son unique racine carrée ; supposons que $a^2.x.b^2 = \alpha^2.x.\beta^2$ pour tout x ; alors $a^2 = c.\alpha^2$ et $b^2 = c^{-1}.\beta^2$ où c est central ; d'après (i), $c^{1/2}$ est aussi central ; comme les racines carrées sont uniques, $a = c^{1/2}.\alpha$, $b = c^{-1/2}.\beta$, et $a.x.b = \alpha.x.\beta$ pour tout x .

Si $a^2.x.b^2 = x$, x conjugue b^{-2} et a^2 , ainsi que leurs uniques racines carrées respectives b^{-1} et a .

Quitte à la translater, on peut supposer que X contient 1 . Une translation $\alpha.x.\beta$ vaut alors l'identité sur X si et seulement si $\alpha = \beta^{-1}$ et centralise X . Si donc les carrés des deux translations $a.x.b$ et $a'.x.b'$, produits d'un nombre pair de symétries centrées en X , ont même action sur X , il existe c centralisant X tel que $a^2 = a'^2.c$ et $b^2 = c^{-1}.b'^2$; comme c centralise aussi a , b , a' et b' , qui sont produits d'éléments de X , $a^2 = (a'.c^{1/2})^2$ et $b^2 = (b'.c^{1/2})^2$; comme G est médial, $a = a'.c^{1/2}$ et $b = b'.c^{1/2}$, si bien que $a.x.b$ et $a'.x.b'$ ont même action sur X .
(iv) $a.x^{-1}.b = x$ signifie que x est le milieu de a et de b . Si $a.x^{-1}.b$ est involutive, $ab^{-1}.x.a^{-1}b$ vaut l'identité, ce qui implique que $c = ab^{-1}$ est central, et que $a.x^{-1}.b$ est la symétrie de centre $b.c^{1/2}$.

Si i est produit d'un nombre impair de symétries centrées en X , elle a un unique point fixe u , et sa restriction à X a zéro ou un point fixe suivant que u est dans X ou pas. **Fin**

Remarque. Si G est périodique sans involutions, il en est de même de ses sections ; si G est oméga-stable sans involutions, il en est de même de ses sections définissables. Si X est une partie convexe non vide de G, définissable dans le deuxième cas, elle est close par prise de milieu d'après le Théorème 4, et toute inversion produit de symétries ayant leur centre dans X a son point fixe dans X : c'est une conséquence du Corollaire 3(iii) et du Lemme 6.

4. Symétrons abéliens

Nous commençons cette section en vérifiant que, si G est un groupe médial, le centre du groupe des translations $T(G)$ du symétron associé est formé des $a.x.a$, où a parcourt le deuxième centre de G.

En effet, considérons deux translations de $T(G)$, qui sont de la forme $a.x.a.g$ et $\alpha.x.\alpha.\gamma$ avec g et γ dans G' ; elles commutent si et seulement si, pour tout x, $\alpha.a.x.a.g.\alpha.\gamma = a.\alpha.x.\alpha.\gamma.a.g$, soit encore $x^{-1}.\alpha^{-1}.a^{-1}.\alpha.a.x = \alpha.\gamma.a.g.\alpha^{-1}.a^{-1}$, ce qui implique que le commutateur $[\alpha,a]$ est central ; si pour a et g donnés cela se produit pour tout α et γ, a est dans le deuxième centre, et par conséquent commute avec les commutateurs ; comme $\alpha.a = a.\alpha.\beta$ pour un β central, l'égalité se transforme en $a.\alpha.\beta.x.g.a.\alpha.\gamma = a.\alpha.x.a.\alpha.\beta.\gamma.g$, et finalement en $g.a.\alpha.\gamma = a.\alpha.\gamma.g$, ce qui signifie que g est central ; finalement $a.x.a.g = a.g^{1/2}.x.a.g^{1/2}$ a bien la forme indiquée.

Par conséquent $T(G)$ est commutatif si et seulement si G est nilpotent de classe 2 (comme par exemple l'est le groupe $U3(K)$ des matrices triangulaires unipotentes d'ordre 3, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$) ; $T(G)$ est alors isomorphe au groupe G^*, défini sur le même ensemble que G, mais dont la multiplication est $a_*b = a.b.[b,a]^{1/2}$: on voit sans peine que G^* est un groupe commutatif médial qui a les mêmes symétries que G, c'est-à-dire que $a_*b^{-1}{}_*a = a.b^{-1}.a$. Le groupe $ST(G)$ est isomorphe au produit semi-direct de G^* par le passage à l'inverse, et les symétries sont les involutions de $ST(G)$; elles forment une cossette modulo G^*, ce qui signifie que le produit de trois symétries est une symétrie.

Nous observons que le groupe $T(S)$ des translations d'un symétron S ne peut être 2-nilpotent que s'il est commutatif ; en effet, comme le centre de $T(S)$ est médial, on montre comme ci-dessus que $T(T(S))$ est alors commutatif.

Tout cela est un prélude à la caractérisation des symétrons dont le groupe de translations est commutatif, que nous appelons *symétrons abéliens* :

Théorème 7. *Pour un symétron* S *, les choses suivantes sont équivalentes :*
(i) *Tout produit de trois symétries est une symétrie (soit encore que les symétries forment une cossette, ensemble fermé sous l'opération ternaire* $x.y^{-1}.z$ *, dans le groupe qu'elles engendrent).*
(ii) *Tout produit de trois symétries est une involution.*
(iii) $T_1(S)$ *est un groupe (égal à* $T(S)$ *).*

(iv) $T_1(S)$ *est une partie convexe de* $T(S)$.
(v) *Pour un, ou pour chaque* u *de* S *,* S_u *est un groupe.*
(vi) *Pour un, ou pour chaque* u *de* S *,* S_u *est commutatif.*
(vii) *Pour un, ou pour chaque* u *de* S *,* $T_1(S) = S_u$.

Et quand c'est le cas, $T(S) = T_1(S)$ *est un groupe commutatif médial, dont* S *est l'ensemble des symétries, et* $ST(S)$ *est isomorphe au produit de* $T(S)$ *par le passage à l'inverse.*

Démonstration. Ce qui se passe pour un u se passe pour chacun d'eux, puisque les s_u sont conjuguées.

(v) signifie que, pour tous u , v , w il existe t tel que $s_u.s_v.s_u.s_w = s_u.s_t$, ce qui est équivalent à (i) ; (vi) signifie que, pour tous u , v et w , $s_u.s_v.s_u.s_w = s_u.s_w.s_u.s_v$, ce qui est équivalent à (ii).

(i) implique (ii), qui implique (vi), qui implique que $T(S)$ est commutatif, soit encore, puisque S_u agit transitivement, que $T(S) = S_u = T_1(S)$, c'est-à-dire (v) et (vii) ; si (vii) est vérifié, pour chaque u , v et w il existe t tel que $s_v.s_w = s_u.s_t$, et (i) est vérifié.

Reste à voir que (iv) implique (iii) : soient a , b , c , d dans S , et m le milieu de a et de b ; $s_a.s_b.s_c.s_d = s_a.s_m.s_a.s_m.s_c.s_d = s_a.s_m.(s_a.s_m.s_c.s_d.s_m.s_a).s_a.s_m$; comme $T_1(S)$ est clos par conjugaison, il est clos par symétrie si et seulement s'il est clos par produit.

Par ailleurs nous savons que dans S_u il y a existence et unicité de la racine carrée. **Fin**

Lemme 8. *Un symétron engendré par deux points est abélien.*

Démonstration. Si S est engendré par u et v , S_u est engendré par 1 et $a = s_u.s_v$; comme S_u est clos par puissances et extraction d'unique racine carrée, le groupe engendré par les racines 2^n.ièmes de a est commutatif et médial, et en fait égal à S_u . **Fin**

On voit donc que le symétron libre à deux générateurs est celui des symétries du groupe additif des rationnels de la forme $m/2^n$, et qu'un symétron fini engendré par deux points est celui des symétries d'un groupe cyclique d'ordre impair.

Question 1. Est-ce qu'un symétron minimal, c'est-à-dire un symétron infini dont tous les sous-ensembles définissables propres sont finis ou cofinis, est abélien ? Quid d'un symétron fortement minimal ?

La raison pour laquelle les sous-symétrons ont été qualifiés de convexes dans POIZAT 2018 est que ce sont les ensembles dans lesquels deux points quelconques sont reliés par un sous-symétron abélien.

Nous concluons la section par un exemple de symétron non abélien.

Exemple 2. Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, et M un sous-groupe multiplicatif non trivial et médial de K^*. Le produit semi-direct G de K^+ par M est isomorphe au groupe des fonctions affines $x.t + y$, où x parcourt M et y parcourt K, ou encore au groupe des matrices de la forme $m(x,y) = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{vmatrix}$.

C'est un groupe médial ; puisque M est non-trivial, chaque $m(1,y)$ est un commutateur, G' est isomorphe à K^+, et le centre de G est trivial.

Chaque point de $T(G)$ s'écrit de manière unique $m(\mu,a).g.m(\mu,b)$; pour les multiplier, on effectue la multiplication directe sur la première coordonnée et la multiplication inverse sur la seconde ; en remplaçant cette dernière par son inverse, on voit que $T(G)$ est isomorphe au produit semi-direct de l'espace vectoriel $K^+{\times}K^+$ par le groupe des matrices diagonales $\begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{vmatrix}$.

Supposons maintenant que le corps K possède un automorphisme involutif σ qui inverse chaque point de M. Le convexe S des points inversés par l'automorphisme de G induit par σ est défini par la condition $\sigma(y) = -y$; il est clos par prise de milieu : c'est un sous-symétron de G. Vérifions que S engendre G : prenons $\alpha \neq 1$ dans M ; le conjugué de $m(1,y)$ par $m(\alpha,0)$ est $m(1,\alpha^2.y)$; K est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps L des invariants de σ ; l'ensemble E des y tels que $\sigma(y) = -y$ est un espace vectoriel de dimension un sur L, ainsi que $a^2.E$; comme ils sont distincts, leur somme vaut K, si bien que le groupe engendré par S contient toutes les matrices $m(1,y)$, d'où la conclusion.

Par conséquent les translations de S sont les applications de la forme $a.x.\sigma(a^{-1})$ avec a dans G, et le groupe $T(S)$ est isomorphe à G.

Comme exemple d'application, on considère $K = F_{25}$, qui est engendré par une racine cubique de l'unité j ; son automorphisme σ échange j et j^2. On prend pour M le groupe $\{1, j, j^2\}$, qui est d'ailleurs la seule possibilité ; S a quinze points, et son groupe de translations G en a septante-cinq ; S n'est pas isomorphe au symétron d'un groupe médial, car tous les groupes d'ordre quinze sont commutatifs.

4. Symétrons finis et localement finis

Si le symétron S est fini, son nombre d'éléments n est impair, puisque les symétries n'ont qu'un seul point fixe ; si t est une translation primaire, t^m aussi, et elle vaut l'identité dès qu'elle a un point fixe : cela veut dire que tous ses cycles ont même nombre d'éléments, qui est un diviseur de n.

Quand $n = p$ est un nombre premier, chaque translation primaire $t \neq 1$ est d'ordre p ; si $t = s_u.s_v$, les t^m parcourent S_u, et chaque s_w est de la forme $s_u.t^m$; comme s_u inverse t par conjugaison, chaque point de $ST(S)$ est de la forme t^m ou $s_u.t^m$. On voit que S est isomorphe au symétron des symétries du groupe cyclique d'ordre p ; plus généralement, le symétron du groupe cyclique d'ordre n est caractérisé par le fait qu'il a une translation primaire d'ordre n.

En fait, la structure des symétrons finis est totalement élucidée par le résultat suivant, qui s'appuie sur un grand théorème de la théorie des groupes finis : chacun est isomorphe au symétries d'une partie convexe d'un groupe fini sans involutions.

Théorème 9. *Un symétron fini n'a pas de translations involutives.*

Démonstration. Soit s une symétrie du symétron fini S ; dans $G = ST(S)$, elle ne commute avec aucune de ses conjuguées si ce n'est elle-même, si bien que le Z*-Theorem de GLAUBERMAN 1966 affirme qu'elle est centrale modulo le plus grand sous-groupe normal d'ordre impair de G ; dans notre cas particulier où G est engendré par les conjuguées de s, ce dernier est $T(S)$.

Si α est une translation de S, $s.\alpha$ est une involution si et seulement si α est inversée par s, et alors elle conjugue s sur $s.\alpha^2$; comme il y a existence et unicité de la racine carrée dans $T(S)$, S est bien un symétron. **Fin**

Nous dirons qu'un symétron est *localement fini* si chacune de ses parties finies est contenue dans un sous-symétron fini.

Théorème 10. (i) *Un symétron est localement fini si et seulement si son groupe de translations est localement fini.*
(ii) *Un symétron localement fini n'a pas de translations involutives (son groupe de translations est donc médial, et localement résoluble).*
(iii) *Un groupe médial est localement fini en tant que groupe si et seulement s'il l'est en tant que symétron.*

Démonstration. (i) Supposons S localement fini ; des symétries $s_1, \dots s_n$ sont contenues dans une partie convexe finie F de Σ ; comme un produit d'éléments de F, s'il ne vaut pas l'identité, peut s'écrire comme un produit d'éléments de F distincts, F engendre un groupe fini ; $ST(S)$, et son sous-groupe $T(S)$, sont donc localement finis.

Supposons $T(S)$ localement fini ; comme il est d'indice un ou deux dans $ST(S)$, ce dernier est aussi localement fini. Des symétries $s_1, \dots s_n$ engendrent donc un groupe fini G ; l'ensemble des symétries contenues dans G est clos par conjugaison, c'est-à-dire par symétrie, et d'après le Théorème 4 est clos par prise de milieu : c'est un sous-symétron de S, qui est bien localement fini.
(ii) Soit t une translation telle que $t^2 = Id$, engendrée par les symétries $s_1, \dots s_n$, et soit s une symétrie quelconque ; les centres des symétries $s_1, \dots s_n$ et s engendrent un symétron fini, qui, d'après le Théorème 9, n'a pas de translations involutives. La restriction de t à ce dernier vaut l'identité, et t fixe le centre de s ; comme cela a lieu pour tout s, t vaut l'identité. La dernière assertion est conséquence du Théorème de Feit et Thompson.
(iii) Si le groupe G est localement fini, le groupe des translations de son symétron, qui est une section de $G{\times}G$, est localement fini. Si le symétron de G est localement fini, chaque translation $a.x.a$, qui est produit de deux symétries,

est d'ordre fini ; mais, comme il n'y a pas d'involutions dans G , $a^n.x.a^n$ ne peut valoir l'identité que si $a^n = 1$, si bien que G est périodique. Si g est dans le dérivé G' de G , la translation $g.x$ est un produit de symétries, si bien que G' est localement fini ; comme par ailleurs G/G' est localement fini, G est localement fini. **Fin**

Théorème 11. (i) *Toute structure définissable dans un corps algébriquement clos satisfait les énoncés vrais dans chaque structure localement finie (elle est "pseudo-localement-finie").*
(ii) *Soient* G *un groupe algébrique simple (sur un corps algébriquement clos), et* ... σ_i , ... *une famille d'automorphismes de* G *; si la structure* $(G, \dots \sigma_i , \dots)$ *a un rang de Morley fini, elle est pseudo-localement-finie.*
(iii) *Le groupe des translations d'un symétron algébrique, c'est-à-dire définissable dans un corps algébriquement clos, est sous-médial, et chacune de ses inversions a un unique point fixe.*

Démonstration. (i) Un énoncé très semblable est montré dans POIZAT 2001. Par élimination des imaginaires, on peut supposer que la structure est définie sur une partie constructible, c'est-à-dire combinaison booléenne d'ensembles définis par des équations polynomiales, de K^n ; ses relations et ses fonctions sont également constructibles. Pour elle, la satisfaction d'un énoncé φ se traduit par la satisfaction par les coefficients des polynômes mis en jeu d'une formule $\varphi(\underline{a})$ du langage des corps. Comme le corps K algébriquement clos satisfait à $(\exists\ \underline{x})\ \varphi(\underline{x})$, cet énoncé est également vrai, pour un certain nombre premier p , dans la clôture algébrique L des corps finis de caractéristique p . Soient donc $\underline{b}$ dans L satisfaisant à $\varphi(\underline{b})$, et k un sous-corps fini de L contenant $\underline{b}$; comme tout point hors de k peut être déplacé par un k-automorphisme de L , les fonctions de la structure associée à $\underline{b}$ ne peuvent faire sortir de k , et cette dernière est localement finie.
(ii) Ce résultat sera utilisé dans la Section 8. Soit σ un automorphisme de G , qui est un groupe (infini) de matrices $M(K)$ à coefficients dans le corps algébriquement clos K ; comme les borels de G ne sont pas nilpotents, la méthode de Zil'ber permet de définir dans G une copie K_1 de K : il existe un isomorphisme θ_1 , définissable dans K , du corps K sur le corps K_1 ; cet isomorphisme induit naturellement, par un simple transport de structure, un isomorphisme τ_1 entre $G = M(K)$ et $M(K_1)$; par ailleurs, en conjugant par σ , on obtient un isomorphisme $\overline{\sigma}$ entre K_1 et un corps K_2 définissable dans G de façon homologue : il existe aussi un isomorphisme θ_2 , définissable dans K , entre K et K_2 .

D'après la version modèle-théorique du Théorème de Borel-Tits (POIZAT 1988, POIZAT 1987 p.149-153), τ_1 est définissable dans G , si bien qu'il se transporte par σ en un isomorphisme τ_2 entre G et $M(K_2)$, également définissable dans G . On voit que σ se décompose entre l'isomorphisme naturel de $M(K)$ sur $M(K_2)$ induit par $\bar{\sigma}.\theta_1$, suivi de l'isomorphisme semi-algébrique τ_2^{-1} . On voit aussi que (G,σ) est définissable dans (K,θ) , où $\theta = \theta_2^{-1}.\bar{\sigma}.\theta_1$; par ailleurs, comme $\theta_1.\theta_2^{-1}$ est définissable dans G , la copie $(K_1,\theta_1.\theta_2^{-1}.\bar{\sigma})$ de (K,θ) est définissable dans (G,σ) .

Si (G,σ) est de rang de Morley fini, (K,θ) l'est aussi ; en caractéristique nulle le corps des invariants de θ est algébriquement clos, et θ vaut l'identité ; en caractéristique p , l'application de Frobenius est un automorphisme pour (K,θ) , et WAGNER 2001 affirme que le modèle premier de la théorie de cette structure est porté par la clôture algébrique du corps premier ; on conclut comme en (i), et le même argument est valable s'il y a plusieurs automorphismes.
(iii) est conséquence de (i), du théorème précédent et du Lemme 5. **Fin**

Remarque. Une description plus précise, bien connue des géomètres, des automorphismes semi-algébriques d'un groupe algébrique simple est nécessaire pour montrer le fait suivant : *Dans un contexte de rang de Morley fini, si* G *est un groupe algébrique simple et* H *un groupe définissable d'automophismes de* G *,* $H°$ *est formé d'automorphismes intérieurs.* Cela est dû au fait qu'un groupe algébrique simple a très peu d'automorphismes extérieurs (voir POIZAT 1987 p.98, et surtout ABC 2008 p. 134) ; plus précisément, en caractéristique nulle, le groupe des automorphismes intérieurs de G est d'indice fini dans le groupe de ses automorphismes algébriques ; en caractéristique p , il est d'indice dénombrable dans le groupe des automorphismes semi-algébriques, et comme le contexte implique que les automorphismes définissables du corps de base K forment une famille dénombrable (ils sont tous définissables sans paramètres), les automorphismes intérieurs contenus dans H en forment un sous-groupe définissable d'indice dénombrable, même si la structure est saturée.

5. Symétrons oméga-stables et types génériques

Pour la démonstration du Théorème 4, nous avons choisi une méthode plus directe que celle de la Proposition 11 de POIZAT 2018 ; cela nous permet d'expliciter plus simplement le lien entre un symétron oméga-stable S et ses types génériques.

Si p est un 1-type complet sur S , et si a est un point de S , nous notons $s_a(p)$ le type sur S des $s_a(x)$ où x réalise p . Si q est un autre type, l'ensemble $Sym(p\leftrightarrow q)$ des a de S tels que $s_a(p) = q$, qui est aussi celui des a de S tels que $s_a(q) = p$, est définissable puique les types le sont, et c'est un sous-symétron de S : en effet, si a et b sont dans $Sym(p\leftrightarrow q)$, x réalise p sur $\{a, b\}$ et y est le symétrique de x par rapport à b , $s_a(b)$ est le milieu de $s_a(x)$ et de $s_a(y)$. En particulier $Sym(p) = Sym(p\leftrightarrow p)$ est un convexe définissable ; il en est de même, si $p_1 , \dots p_n$ est un ensemble fini de types, de l'ensemble $Sym(p_1, \dots p_n)$ des a de S qui les permutent par symétrie.

Théorème 12. *Dans un symétron oméga-stable, toute partie convexe définissable non vide est le symétriseur de ses types génériques (c'est-à-dire de rang de Morley maximum) ; elle se décompose de manière unique en un nombre fini, qui est impair, de sous-ensembles définissables convexes disjoints de degré de Morley un, que nous appelons ses composantes connexes.*

Démonstration. Notre ensemble convexe X est contenu dans le symétriseur $\mathrm{Sym}(p_1, \ldots p_n)$ de ses types génériques ; par ailleurs, si a est dans ce dernier, il est au milieu de deux réalisations de types génériques, si bien qu'il y a égalité.

Notons X_i l'ensemble des points a de X tels que $s_a(p_1) = p_i$, ce qui équivaut à $s_a(p_i) = p_1$; les X_i forment une partition de X en sous-ensembles convexes. Chacun ne peut contenir qu'un seul type générique : en effet, si a est générique dans X_i et x est une réalisation de p_1 générique sur a , $y = s_a(x)$ est une réalisation de p_i générique sur a , et comme a est le milieu de x et de y , a et y se correspondent par une bijection définissable avec x comme paramètre ; x et y sont donc génériques et indépendants, et le type de a est déterminé. Il faut donc que chaque X_i contienne un type générique.

Si q est le type générique de X_i , ce dernier est le symétriseur de q , et si p est un autre générique, il n'est pas possible que q soit au milieu de deux réalisations de p , si bien que les génériques $\neq q$ sont appariés deux par deux sous l'action de la symétrie par q ; le nombre n est donc impair.

Si $X = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$ est une autre partition de X en ensembles convexes de degré de Morley un, et si $\mathrm{RM}(Y_k) = \mathrm{RM}(X)$, Y_k est le symétriseur de son générique, et c'est donc l'un des X_i ; comme il n'y a rien en dehors de la réunion des X_i , c'est la même partition, à permutation près. **Fin**

On voit qu'on obtient une structure de symétron sur les types génériques de S ; en effet, si x et y sont génériques et indépendants et $z = s_x(y)$, les trois points x , y et z sont deux à deux génériques et indépendants, et les types de x et de y déterminent celui de z ; de même, si x et z sont génériques et indépendants et y est le milieu de x et de z , les trois points x , y et z sont deux à deux génériques et indépendants, et les types de x et de z déterminent celui de y .

Théorème 13. *Si* X *est une partie définissable du symétron oméga-stable* S *, elle est générique (c'est-à-dire* $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(S)$ *) si et seulement si* S *est recouvert par un nombre fini de translatées de* X *par des points de* $T_1(S)$.

Démonstration. Si X vérifie le critère, elle est générique car ses translatées ont même rang de Morley. Supposons réciproquement X générique ; soit x une réalisation d'un de ses types génériques p ; soient q un autre type générique, y une réalisation de q indépendante de x , et z le milieu de x et de y , qui vérifie $s(x,z) = y$; comme x et z d'une part, y et z d'autre part, sont indépendants, $s(p,z) = q$, et comme cette propriété s'exprime grâce aux définitions des types p et q , on trouve a dans S tel que $s(p,a) = q$. En conséquence, une réunion Y des translatées de X par un nombre fini de symétries contient tous les types génériques de S.

Soit maintenant x une réalisation d'un type r quelconque, et y générique sur x ; $s(x,y)$ est générique, et donc satisfait Y ; par conséquent il existe a dans S tel que $s(r,a)$ satisfasse Y. Autrement dit tout type peut être envoyé par symétrie dans Y ; par compacité, cela signifie qu'un nombre fini de symétrisées de Y recouvrent S. **Fin**

6. Génération elliptique

Nous disons qu'un sous-goupe H d'un groupe G est *elliptiquement engendré* par une partie X de G si chaque point de H est produit de n éléments de $X \cup X^{-1}$ pour un entier n fixé (nous n'exigeons pas que H soit tous le groupe engendré par X).

Nous avons fait allusion, dans notre Lemme 5, à la Proposition 13 de POIZAT 2018, qui s'appuie sur une version particulièrement commode du Théorème des Indécomposables de Zil'ber, précisément parce qu'elle ne mentionne pas d'indécomposables, et qui peut être démontrée en adaptant au cas des groupes le Théorème 14 qui suit : *si* X *est une partie définissable du groupe de rang de Morley fini* G *, il existe un plus grand sous-groupe* $e(X)$ *définissable, connexe et elliptiquement engendré par* X *; de plus* X *normalise* $e(X)$ *, et le quotient* $X/e(X)$ *est fini.*

Question 2. Un groupe infini de rang de Morley fini peut-il être finiment engendré ? (Comme ce n'est pas possible pour un groupe abélien ou algébrique, une réponse positive contredirait la Conjecture d'Algébricité).

Dans le cadre d'un symétron S, nous dirons que X engendre elliptiquement le sous-symétron S' si chaque point de S' s'obtient à partir de X par symétries et prises de milieu en moins de n étapes, pour un n fixé. Voici ce que devient le Théorème de Zilber dans ce contexte :

Théorème 14. *Dans un symétron* S *de rang de Morley fini :*
(i) *Deux sous-symétrons définissables connexes non disjoints engendrent un sous-symétron définissable connexe, et ce de façon elliptique.*
(ii) *Une famille arbitraire de sous-symétrons définissables connexes deux-à-deux non disjoints engendre un sous-symétron définissable connexe, qui est en fait elliptiquement engendré par un nombre fini d'entre eux.*
(iii) *Si* X *est un sous-ensemble définissable de* S *, la relation "* x *et* y *appartiennent à un même convexe connexe définissable elliptiquement engendré par* X *" est une relation d'équivalence sur le symétron engendré par* X *, qui n'a qu'un nombre fini de classes sur* X *.*

Démonstration. (i) Soints A et B nos deux convexes, et a un de leurs points communs ; on considère un type p de rang maximal obtenu à partir de points x satisfaisant à la formule définissant $A \cup B$ par symétries et prises de milieu ;

$s_A(p)$ ne contient qu'un nombre fini de types p_1 , ... p_m de même rang que p , si bien qu'on obtient une partition de A en un nombre fini $A_1 \cup ... \cup A_m$ de sous-symétrons définissables, où $A_i = \mathrm{Sym}(p \leftrightarrow p_i) \cap A$: étant connexe, A est en fait l'un d'entre eux. On voit donc que A est inclus dans le symétron définissable S' formé des u tels que $s_u(p) = s_a(p)$; il en est de même de B ; comme chaque point de S' est au milieu d'une réalisation de p et d'une réalisation de $s_a(p)$, S' est elliptiquement engendré par $A \cup B$. Par ailleurs, A comme B sont inclus dans la même composante connexe de S' , si bien que S' est connexe, et que c'est le symétron engendré par A et B .
(ii) C'est le convexe de rang maximal engendré par un nombre fini d'entre eux.
(iii) Si a est dans le symétron engendré par X , un convexe définissable connexe elliptiquement engendré par X , et de rang de Morley maximum, est maximum d'après (i) ; en conséquence la relation E de l'énoncé est bien transitive.

On considère un type p de rang maximal engendré par X ; $s_X(p)$ est un ensemble fini p_1, ... p_m , et X est partitionné par les $X_{ij} = S_{ij} \cap X$, où S_{ij} parcourt l'ensemble des composantes connexes des $\mathrm{Sym}(p \leftrightarrow p_i)$; deux points dans un même X_{ij} sont équivalents. **Fin**

Remarque. Si C est une classe de E , c'est-à-dire un sous-symétron définissable connexe elliptiquement engendré par X , et a est un point de $T(X)$, $s(X,a)$ est aussi une classe de E . Si C et C' sont deux classes de E , les milieux d'un point de C et d'un point de C' forment donc le convexe $\mathrm{Sym}(C \leftrightarrow C')$ des centres des symétries qui échangent C et C' ; par conséquent toutes les classes de E ont même rang de Morley, si bien que $\mathrm{Sym}(C \leftrightarrow C')$ est une classe modulo E ; il en suit que, si a et b sont congrus modulo E , $s(C,a) = s(C,b)$. La conclusion est que symétrie et milieu passent au quotient modulo E , et que $T(X)/E$ est un symétron. On voit que $T(X)$ est elliptiquement engendré par X si et seulement si $T(X)/E$ est fini.

Question 3. Un symétron infini de rang de Morley fini peut-il être finiment engendré ?

8. Une démonstration hypothétique

Traduit dans notre langage, le Théorème 1 de GLAUBERMAN 1966 affirme que si, dans un groupe, S est un symétron fini formé d'involutions, c'est-à-dire un ensemble d'involutions clos par conjugaison et ne commutant pas deux-à-deux, les produits des paires d'éléments de S engendrent un groupe sans involutions ; c'est un peu plus fort que de dire que S n'a pas de translations involutives, car $T(S)$ est le quotient de ce groupe par le centralisateur de S . La question de l'extension de ce résultat au contexte de rang de Morley fini est posée dans BOROVIK-NESIN 1994 p. 355, mais il est remarquable que ce théorème ne soit pas mentionné dans ABC 2008.

Si on ajoute au cocktail le Théorème de Feit et Thompson, on obtient un corollaire indifférent à l'existence d'un centre : le groupe $ST(S)$ est résoluble ; c'est sous cette forme édulcorée (qui néanmoins s'oppose à l'existence de groupes finis simples sans involutions) que nous allons tout d'abord généraliser le Théorème de Glauberman sous l'hypothèse de la Conjecture d'Algébricité, c'est-à-dire en admettant que tout groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique (sur un corps algébriquement clos).

Nous commençons par quelques préliminaires, en considérant un groupe de rang de Morley fini ayant une partie définissable S clos par conjugaison et formé d'involutions ne commutant pas deux-à-deux. Le groupe G engendré par S est définissable ; en effet, si $G°$ est le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par S , G/S est fini et clos par conjugaison, et engendre un groupe fini puisque dans un produit d'éléments de G/S on peut éliminer les répétitions. Notons $H°$ le plus grand sous-groupe définissable connexe engendré par les paires d'éléments de S ; comme $S.S$ est normalisé par S , $H°$ aussi, et $S/H°$ est fini, si bien que $H° = G°$, que le groupe engendré par $S.S$ est définissable et a même composante connexe que celui engendré par S .

Nous devons aussi reprendre brièvement la description bien connue des sous-groupes diédraux d'un groupe oméga-stable, qui reproduit ce qui se passe dans un groupe périodique (voir BOROVIK-POIZAT 1990, BOROVIK-NESIN 1994 p. 173) ; cela contribuera d'ailleurs à éclairer les démonstrations des premières sections de cet article, basées sur le fait que deux symétries d'un symétron oméga-stable sont toujours contenues dans un groupe définissable. Soient i et j deux éléments de S distincts ; nous notons $d(i, j)$ le plus petit sous-groupe définissable contenant i et j , et $d(i.j)$ le plus petit sous-groupe définissable contenant leur produit $i.j$; du simple fait que i et j sont des involutions, $d(i.j)$ est le produit d'un groupe cyclique d'ordre 2^n et d'un groupe commutatif D_{ij} divisible par 2 ; comme i inverse $d(i.j)$ par conjugaison, ses conjugués dans $d(i, j)$ sont les points de la forme $i.\alpha^2$, où α est dans $d(i.j)$, si bien que si $d(i.j)$ contenait une involution k , $i.k$ serait conjugué de i ou bien de j , ce que contredit la condition de non-commutativité. Dans notre contexte, cette condition équivaut donc au fait que, pour tous i et j dans S , $d(i.j)$ ne contient pas d'involutions ; cela a pour conséquence que, si H est un sous-groupe définissable propre normal dans G , S/H est aussi un symétron formé d'involutions ; on remarque aussi que i et j sont conjugués dans $d(i, j)$, ce qui est conforme à notre Lemme 1(vii).

Théorème 15. *Sous l'hypothèse de la Conjecture d'Algébricité, dans un groupe de rang de Morley fini, un sous-ensemble définissable d'involutions formant un symétron engendre un groupe résoluble.*

Démonstration. Comme $G/G°$ est résoluble d'après le Théorème de Glauberman, il suffit de montrer que $G°$ l'est ; nous le supposons infini.

Montrons d'abord que le groupe G engendré par notre symétron S n'est pas connexe ; sinon, comme G serait égal à son dérivé, en quotientant par un groupe normal définissable maximal, on est ramené au cas où il est simple, soit encore algébrique par hypothèse ; comme S est une classe de conjugaison de G , on contredit notre Théorème 11.

On remarque ensuite que les points de S qui sont congrus à l'un d'entre eux modulo $G°$ forment un ensemble convexe, si bien que, si S est connexe, G est le produit semi-direct de $G°$ par un point s de S ; l'ensemble $S_s = s.S$ est alors formé des points de la forme $s.(x.s.x^{-1}) = x^s.x^{-1}$ où x parcourt $G°$, si bien qu'une copie du symétron est définissable dans la structure formée du groupe $G°$ et de son automorphisme σ induit par s .

Dans un premier temps, on suppose S connexe. Si $G°$ n'est pas résoluble, on note $R°$ son plus grand sous-groupe définissable résoluble connexe normal, et R l'ensemble des éléments centraux modulo $R°$; R est normalisé par $G°$, et aussi par s , et le quotient $G°/R$ est semi-simple : s'il n'est pas trivial ses groupes normaux minimaux N_1 , ... N_n sont définissables et simples, et le groupe qu'ils engendrent est de la forme $N_1 \times ... \times N_n$. Si s échange deux N_i , on obtient un sous-groupe définissable de la forme $N \times N$ sur lequel σ agit par échange des coordonnées, si bien que les symétries de N forment une partie définissable convexe de S ; comme ce doit être un symétron, il est nécessaire que N n'ait pas d'involutions, ce qui est impossible pour un goupe algébrique simple. Sinon s les normalise tous, et au prix d'un quotient on est ramené au cas où il n'y en n'a qu'un, soit N , qui par hypothèse est algébrique ; d'après la remarque qui suit le Théorème 11, chaque point de $G°$ agit par automorphisme intérieur sur N , dont le centralisateur est trivial, si bien que $G° = N$; $(G°,\sigma)$ est pseudo-localement fini d'après le Théorème 11, et le groupe des translations du symétron S_σ , qui est isomorphe à $G°$, ne doit pas contenir d'involutions, ce qui est impossible pour une groupe algébrique simple.

Revenons au cas général, et considérons la décomposition de S en composantes connexes $S = S_1 \cup ... \cup S_d$; chaque S_i engendre un groupe résoluble G_i ; comme G permute les S_j par conjugaison, les $G_i°$ les fixent, et se normalisent les uns les autres ; ils engendrent donc un groupe connexe résoluble H , qui est bien sûr normal dans G . Comme S/H est fini, $H = G°$. **Fin**

Ce théorème implique, sous la Conjecture d'Algébricité, que le groupe des translations d'un symétron S borné de rang de Morley fini est résoluble ; comme $T(S)$ est le dérivé de $ST(S)$, cela interdit à une symétrie d'être une translation, sauf si S est réduit à un point.

Sa démonstration est très peu satisfaisante ; c'est comme si, dans le cas fini, on s'appuyait sur la classification pour montrer le Théorème de Glauberman ! Une réponse positive à la question qui suit montrerait que le seul obstacle au Théorème 15 serait l'existence de groupes simples sans involutions.

Question 4. ABC 2008 contient-il suffisamment de matériaux pour éliminer inconditionnellement les groupes simples avec involutions qui apparaissent dans la démonstration du Théorème 15 ?

Le dernier théorème de la section est inconditionnel, son corrolaire conditionnel étant que la Conjecture d'Algébricité implique qu'un symétron borné de rang de Morley fini n'a pas de translations involutives, qu'il est isomorphe au symétron d'une partie définissable convexe d'un groupe de rang de Morley fini sans involutions.

Théorème 16. *Si le groupe des translations d'un symétron borné de rang de Morley fini est résoluble, il ne contient pas d'involutions.*

Démonstration. Soit S l'ensemble des symétries de ce symétron, qui engendrent un groupe définissable G ; comme $ST(S)$ est le quotient de G par son centre, G est résoluble. Soit N le dérivé de $G°$, qui est définissable ; il n'est pas possible que S soit inclus dans $G°$, car sinon $G°/N$ serait réduit à deux points.

Dans un premier temps, on quotiente par N pour se ramener au cas où $G°$ est commutatif ; on décompose S en ses composantes connexes S_1 , ... S_d , qui sont chacune dans une même cossette modulo $G°$; on en déduit que les paires de points de chaque S_i engendrent un groupe commutatif H_i connexe sans involutions ; comme dans la démonstration du théorème précédent, les H_i engendrent $G°$, et le groupe dérivé de G n'a pas d'involutions.

Revenons au cas général ; G'/N n'ayant pas d'involutions, tous les 2-éléments de G' sont dans N , et comme ce dernier est nilpotent, il n'a qu'un seul 2-sylow Σ (voir POIZAT & WAGNER 2000). Chaque point i de S est contenu dans un 2-sylow Σ_i de G , qui ne peut en contenir un deuxième j puisque ij n'est pas un 2-élément ; i est donc central dans Σ_i , qui est le groupe engendré par Σ et i . On voit donc que S centralise Σ , qui est central dans G , et que $G'/Z(G)$ n'a pas d'involutions. **Fin**

9. Symétrons quotients

Comme les symétrons forment une variété (dans le langage de la symétrie et du milieu), l'image d'un symétron par un homomorphisme f est un symétron $f(S)$; l'équivalence $f(x) = f(y)$ est alors appelée *congruence* (de symétron).

Par exemple, si G est un groupe médial et H est un sous-groupe normal de G , l'équivalence modulo H est une congruence de symétron à condition que G/H soit médial.

On voit qu'une classe C de la congruence E est un sous-symétron de S ; elle détermine E , puisque les autres classes de E s'obtiennent par symétries à partir de C .

Comme les points de $ST(S)$ sont définis par des termes, le groupe $ST(S/E)$ est une image du groupe $ST(S)$, par un homomorphisme surjectif dont le noyau Ker(E) détermine lui aussi la congruence, ainsi d'ailleurs que $\mathrm{Ker(E)}\cap T_1(S)$; nous appellerons T-*noyau* l'intersection de T(S) avec le noyau.

Si N est un sous-groupe normal de ST(S) , par passage au quotient on obtient une structure de protosymétron (surjectif) sur S/N ; la condition pour que ce quotient soit un protosymétron injectif est qu'*aucun élément de* $T_1(S)$ *ne devienne une involution modulo* N (c'est-à-dire que, si t^2 est dans $N\cap T_1(S)$, t y est aussi) ; pour que ce soit un symétron, il faut en outre que *tout point* t *de* $T_1(S)$ *qui commute modulo* N *avec une symétrie soit dans* N (c'est-à-dire que, si $[t,s_u]$ est dans N , t y est aussi) ; cela suffit car, si dans le quotient s_w conjugue s_u et s_v , $s_w.s_{m(u,v)}$ commute modulo N avec s_u .

Si $T_1(S)$ est périodique, ou bien si S est oméga-stable et $N\cap T_1(S)$ est définissable, ces deux conditions sont toujours réalisées ; en effet, dans le premier cas le groupe engendré par le produit $s_u.s_v$ de deux symétries est cyclique d'ordre impair, et dans le deuxième cas ce produit est contenu dans un sous-groupe définissable médial de $T_1(S)$, si bien que dans le quotient s_u et s_v sont égales ou ne commutent pas ; ce quotient est donc un protosymétron injectif, et un symétron d'après le Lemme 6.

On observe que les groupes qui définissent la même congruence que N sont ceux qui sont compris entre le groupe engendré par $N\cap T_1(S)$ et le noyau.

Lemme 17. *Si* S *est un sous-symétron définissable d'un groupe médial de rang de Morley fini* G *et* E *est une congruence définissable de* S *, le groupe des translations de* S/E *est médial.*

Démonstration. Dans ce contexte, un groupe définissable est médial dès qu'il n'a pas d'involutions. On sait par le Lemme 3 que le groupe T des translations de S est une section définissable de $G\times G^i$, et qu'il respecte l'équivalence E ; le groupe des translations de S/E est isomorphe à T/T_E , où T_E est le groupe des translations de S qui fixent chaque classe de E ; comme c'est une section définissable du groupe médial T , il n'a pas d'involutions. **Fin**

Si S est un symétron oméga-stable, sa partition en composantes connexes est une congruence, dont le noyau est formé des points qui fixent chaque type générique de S . Sous les hypothèses du Lemme 15, on peut se passer du Théorème de Glauberman pour montrer que le groupe des translations de ce symétron fini n'a pas d'involutions.

Plus généralement, l'équivalence décrite dans le Théorème 14(iii) est une congruence de symétron.

Question 5. Cette relation d'équivalence E est-elle toujours la trace sur S(X) d'une congruence définissable entre éléments du plus petit sous-symétron définissable contenant X ?

Exemple 3. La relation d'équivalence dont les classes sont les orbites du centre C du groupe des translations du symétron S est une congruence de symétron.

En effet, si $s_u.s_v.s_u = s_w.t$, où t est centrale, comme les symétries inversent les points de C , $t^{1/4}.s_u.t^{-1/4}.s_v.t^{1/4}.s_u.t^{-1/4} = s_w$, si bien que $t^{1/4}.s_u.t^{-1/4}$ est le milieu de s_v et de s_w , et qu'il y a unicité du milieu modulo C . Cependant, $T(S/C)$, étant le quotient de $T(S)$ par les translations qui fixent modulo C chaque symétrie, n'est pas en général égal à $T(S)/C$. On vérifie sans peine que le T-noyau est compris entre C et le deuxième centre de $T(S)$, et qu'il contient strictement C quand S est le symétron d'un groupe médial 3-nilpotent non 2-nilpotent.

10. Axiomatisation

Nous avons rencontré au cours de cet article un certain nombre de conditions qui éliminent les translations involutives ; il semble que la plus forte - la médialité du groupe des translations - ne puisse s'exprimer au premier ordre, car on ne voit pas comment affirmer l'existence d'une racine carrée d'un point de T_n sans préciser dans quel T_m elle se trouve. Par contre, les conditions suivantes correspondent à la satisfaction d'une infinité d'axiomes du premier ordre (un axiome par longueur possible des mots). On exclut de la discussion les symétrons réduits à un point.

A. Translations et inversions sont disjointes, c'est-à-dire qu'une symétrie ne peut être une translation, qu'une inversion ne peut être égale à l'identité.

B. Les inversions ou translations involutives sont les symétries.

C. Pas de translations involutives.

D. Chaque translation a les même points fixes que son carré.

E. Deux translations de même carré sont égales.

F. Chaque inversion a au plus un point fixe.

G. Chaque inversion a exactement un point fixe.

Il est clair que G implique F, que D implique C, et que C implique A ; par ailleurs, nous avons vu dans le Corollaire 8 que E implique F et D, et que C implique B.

L'introduction de cette cascade d'axiomes pose la question de leur indépendance, et de leur indépendance dans des contextes particuliers. Nous remarquons qu'ils sont tous vérifiés dans le cas d'une partie définissable convexe d'un groupe de rang de Morley fini sans involutions, mais nous ne savons pas si le groupe des translations d'un symétron de rang de Morley fini est toujours borné (voir le Lemme 5(v)), même dans le cas d'un symétron définissable dans un corps algébriquement clos.

Pour ces éventuels symétrons de rang de Morley fini non bornés, se posera aussi la question de l'égalité des rangs de Morley, de Cantor et de Lascar (ce n'est pas le cas pour les symétrons bornés, qui ne sont que des groupes dans un langage augmenté ; voir la préface de POIZAT 1987).

Références

ABC 2008 Tuna Altinel, Aleksandr Borovik et Gregory Cherlin, **Simple Groups of Finite Morley rank,** American Mathematical Society

BOROVIK & NESIN 1994 Aleksandr Borovik et Ali Nesin, **Groups of Finite Morley Rank**, Oxford, Clarendon Press

BOROVIK & POIZAT 1990 Aleksandr Borovik et Bruno Poizat, *Tores et p-groupes,* **The Journal of Symbolic Logic**, 55, 565-583

FRECON 2018 Olivier Frécon, *Simple groups of Morley rank three are algebraic,* **Journal of the American Mathematical Society**, 31, 643-659

GLAUBERMAN 1966 George Glauberman, *Central Elements in Core-free Groups,* **Journal of Algebra**, 4, 403-420

OLSHANSKII 1982 Aleksandr Ol'shanskii, *Groupes d'exposant fini dont les sous-groupes sont d'ordre premier* (en russe), **Algebra i Logika**, 21, 553-618

POIZAT 1987 Bruno Poizat, **Groupes Stables**, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah ; traduit en anglais par Moses Klein, **Stable Groups**, American Mathematical Society, 2001

POIZAT 1988 Bruno Poizat, *MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense,* **The Journal of Symbolic Logic**, 53, 124-131

POIZAT 2001 Bruno Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner,* **The Journal of Symbolic Logic**, 66,1637-1648

POIZAT 2018 Bruno Poizat, *Milieu et symétrie, une étude de la convexité dans les groupes sans involutions,* **Journal of Algebra**, 497, 143-163

POIZAT & WAGNER 2000 Bruno Poizat et Frank Olaf Wagner, *Liftez les sylows !,* **The Journal of Symbolic Logic**, 53, 703-704

ROSENLICHT 1961 Maxwell Rosenlicht, *On a result of Baer,* **Proceedings of the American Mathematical Society**, 12, 984-988

WAGNER 2001 Frank Olaf Wagner, *Fields of finite Morley rank,* **The Journal of Symbolic Logic**, 66, 703-706