

Convexité et symétrie dans les groupes sans involutions

Bruno POIZAT¹

Abstract. Motivated by a recent result of Olivier Frécon, we develop a general notion of convex set in a group, which behaves decently in the absence of involutions, and in particular in a group of finite Morley rank without involutions. We show that the geometry of a minimal bad group degenerates, its only convex subsets being points, lines and the whole space.

Mots-clefs. Involutions, groupes de rang de Morley fini, mauvais groupes.

Introduction.

Cet article a pour point de départ un théorème récent d'Olivier Frécon (FRECON 201?), affirmant l'inexistence des mauvais groupe de rang trois définis il y a presque quarante ans dans (CHERLIN 1979). Le rang est ici le rang de Morley, qui est une abstraction de la dimension en Géométrie Algébrique, venue de la Théorie des Modèles : nos mauvais groupes seraient des groupes simples G de dimension trois, sans involutions, avec un sous-groupe B de dimension un autonormalisant, dont les conjugués recouvriraient G et s'intersecteraient deux-à-deux trivialement.

Si on convient d'appeler droites les translatés $a.B.b$ de B , on voit que par deux points distincts x et y passe une droite et une seule, la droite $xB' = yB'$, où B' est le conjugué de B qui contient $x^{-1}.y$, ce qui semble être un bon début. La démonstration de Frécon se décompose en deux parties : dans un premier temps, à partir des commutateurs de G , il construit un plan, c'est-à-dire un ensemble convexe de dimension deux ; et dans un deuxième temps, il montre qu'il n'y a pas de plans, que les seuls ensembles convexes sont les points, les droites et l'espace tout entier.

Ce résultat motive l'étude systématique de la convexité entreprise ici : par définition, une partie X du groupe G est dite convexe si deux quelconques de ses points sont reliés par une cossette modulo un sous-groupe de G incluse dans X . Dans notre première partie, cette étude est générale, sans hypothèse sur le groupe ; on y décrit en particulier le lien entre les ensembles convexes et les automorphismes involutifs de G .

Les propriétés des ensembles convexes sont perturbées par la présence d'involutions dans G ou dans certaines de ses sections ; la façon la plus radicale de s'en débarrasser est de se placer dans un groupe périodique sans involutions, ce qui est fait dans une courte deuxième partie.

Une façon plus subtile est d'abandonner la pure Théorie des Groupes pour entrer dans la Théorie des Modèles, et d'étudier les groupes ω -stables sans involutions, qui justement n'ont pas d'involutions dans leur sections définissables. La troisième partie étudie les propriétés des sous-ensembles

¹ Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

définissables convexes de ces groupes, et montre entre autres choses leur décomposition en composantes connexes.

Dans la quatrième partie, on se place dans le cadre plus restreint où le rang de Morley est un nombre fini au lieu d'être un ordinal arbitraire, comme dans le cas général de groupes ω -stables. On y développe une théorie d'ensembles approximativement convexes, qui sont presque égaux à des ensembles convexes de même dimension ; il s'agit d'un développement d'idées de Frécon, qui sont indispensables pour la construction de son plan.

Dans la cinquième partie, nous introduisons les mauvaises paires, qui sont des groupes de Frobenius sans base, de rang de Morley fini, qui n'ont pas d'analogues finis. Elles sont liées aux mauvais groupes, qui sont pour l'essentiel des groupes simples de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes résolubles sont nilpotents ; là non plus, il n'y a pas d'analogue dans le cas fini.

Nous montrons en conclusion que le deuxième versant de l'argument de Frécon se généralise au-delà de toute espérance, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de plans dans les mauvaises paires, et même que, dans un mauvais groupe minimal, les seuls ensembles convexes sont les points, les droites et l'espace tout entier. Mais ce n'est pas le cas de sa première moitié, la construction d'un plan, et nous ne connaissons rien de décisif contre l'existence d'un mauvais groupe de dimension quatre.

Première partie. Le cas général

Etant donnée une partie X d'un groupe G , son *normalisateur* est le groupe $N(X)$ des u tels que $uX = Xu$; nous définissons son *twisteur* (à gauche) comme étant l'ensemble $\text{Twg}(X)$ des u pour lesquels il existe v tel que $uX = Xv$, et son *fixeur* (à gauche) comme l'ensemble $\text{Fixg}(X)$ des u tels que $uX = X$; son twisteur à droite et son fixeur à droite sont définis symétriquement. Nous omettons les lettres g et d quand les deux notions coïncident.

Le premier lemme justifie le choix du nom "twisteur", et explicite le comportement de cette notion vis-à-vis de l'inversion et des translations.

Lemme 1. (i) *Les twisteurs et les fixeurs de X sont des sous-groupes de G , chaque fixeur étant normal dans le twisteur de même côté ; la correspondance qui à u associe un v tel que $uX = Xv$ induit un isomorphisme f entre $\text{Twg}(X)/\text{Fixg}(X)$ et $\text{Twd}(X)/\text{Fixd}(X)$.*

(ii) $\text{Twg}(X^{-1}) = \text{Twd}(X)$ et $\text{Fixg}(X^{-1}) = \text{Fixd}(X)$; si X est clos par inversion, f est donc un automorphisme de $\text{Tw}(X)/\text{Fix}(X)$.

(iii) $\text{Twg}(aXb) = a.\text{Twg}(X).a^{-1}$, $\text{Fixg}(aXb) = a.\text{Fixg}(X).a^{-1}$, $\text{Twd}(aXb) = b^{-1}.\text{Twd}(X).b$ et $\text{Fixd}(aXb) = b^{-1}.\text{Fixd}(X).b$.

(iv) $\text{Fixg}(X) = G$ si et seulement si $X = G$ ou $X = \emptyset$.

Démonstration. (i) Si $uX = Xv$, alors $Xv^{-1} = u^{-1}X$, si bien que le twisteur est clos par inversion ; comme il est clairement clos par produit, c'est un groupe. De

même, si $uX = X$, alors $X = u^{-1}X$, si bien que le fixeur est un groupe. Si $uX = Xv$ et $wX = X$, alors $uwu^{-1}X = uwXv^{-1} = uXv^{-1} = uu^{-1}X = X$, si bien que le twisteur normalise le fixeur. Même chose de l'autre côté.

Si u est dans $\text{Twg}(X)$, tous les v tels que $uX = Xv$ sont dans $\text{Twd}(X)$ et dans une même classe modulo $\text{Fixd}(X)$; en associant à u cette classe on obtient un homomorphisme surjectif de $\text{Twg}(X)$ sur $\text{Twd}(X)/\text{Fixd}(X)$, dont le noyau est $\text{Fixg}(X)$.

(ii) Si $uX = Xv$, $X^{-1}u^{-1} = v^{-1}X^{-1}$; si $uX = X$, $X^{-1} = X^{-1}u^{-1}$.

(iii) Si $uX = Xv$, $aua^{-1}.aXb = aXvb = aXb.b^{-1}vb$; si $uX = X$, $aua^{-1}.aXb = aXb$; même chose de l'autre côté.

(iv) Si $\text{Fixg}(X) = G$ et a est dans X , $G.a = G$ et est inclus dans X . **Fin**

Une remarque rassurante : si H un sous-groupe de G , il est son propre fixeur, son twisteur est égal à son normalisateur, et l'automorphisme f de $N(H)/H$ défini par le Lemme 1 est l'identité.

Si $\{a\}$ est un singleton, ses fixeurs sont réduits à l'unité, ses twisteurs sont G tout entier, et l'automorphisme f est la conjugaison par a ; son normalisateur est son centralisateur. On sait qu'un ensemble X a même normalisateur que l'ensemble inverse X^{-1} , mais il n'y a pas de formule permettant de calculer $N(aXb)$ en fonction de $N(X)$.

Nous appelons *symétrie* de centre x l'application qui à y associe $xy^{-1}x$, et *symétriseur* $\text{Sym}(X)$ de X l'ensemble des centres des symétries conservant X ; $\text{Sym}(X)$ est donc l'ensemble des x tels que, pour tout y de X , $xy^{-1}x$ soit dans X ; comme les symétries sont involutives, cela signifie encore que $xX^{-1}x = X$, que $xX^{-1} = Xx^{-1}$, que $X^{-1}x = x^{-1}X$.

Plus généralement, le symétriseur $\text{Sym}(X,Y)$ d'une paire d'ensembles X et Y est l'ensemble des x tels que $xX^{-1}x = Y$; en prenant les inverses, on voit que $\text{Sym}(X,Y) = \text{Sym}(Y,X)$.

Lemme 2. (i) $\text{Sym}(a.X.b, a.Y.b) = a.\text{Sym}(X,Y).b$, et $\text{Sym}(X^{-1}, Y^{-1}) = \text{Sym}(X,Y)^{-1}$.

(ii) $\text{Sym}(X,Y)$ est non-vide si et seulement s'il existe a tel que $a.X$ soit l'ensemble des inverses des points de $a.Y$.

(iii) $\text{Sym}(a.X.b) = a.\text{Sym}(X).b$; $\text{Sym}(X^{-1}) = \text{Sym}(X)^{-1}$; $\text{Sym}(X)$ est non-vide si et seulement si X se translate sur un ensemble égal à son inverse.

(iv) Si X est close par inversion, son symétriseur est clos par inversion et est contenu dans son twisteur, et deux points de $\text{Sym}(X)$ qui commutent ont leur produit également dans $\text{Sym}(X)$.

Démonstration. (i) C'est vrai si l'un des ensembles X , Y ou $\text{Sym}(X,Y)$ est vide. Sinon, on considère u dans $\text{Sym}(X,Y)$, x dans X et y dans Y ; $aub.(axb)^{-1}.aub = aux^{-1}ub$ est dans Y , et de même $aub.(ayb)^{-1}.aub$ est dans X , si bien que $a.\text{Sym}(X,Y).b$ est inclus dans $\text{Sym}(a.X.b, a.Y.b)$; donc $\text{Sym}(X,Y) \subseteq a^{-1}.\text{Sym}(a.X.b, a.Y.b).b^{-1} \subseteq \text{Sym}(X,Y)$, et il y a en fait égalité. Par ailleurs

$(u^{-1}xu^{-1})^{-1} = ux^{-1}u$ est dans Y , et $(u^{-1}yu^{-1})^{-1}$ est dans X , si bien que $\text{Sym}(X)^{-1}$ est contenu dans $\text{Sym}(X^{-1})$, $\text{Sym}(X) \subseteq \text{Sym}(X^{-1})^{-1} \subseteq \text{Sym}(X)$, et il y a égalité.

(ii) Si $\text{Sym}(X, Y)$ n'est pas vide, il se translate sur un ensemble contenant l'unité, et les translatés correspondants de X et de Y sont inverses l'un de l'autre.

(iii) Spécialisation de (i) et (ii) au cas où $X = Y$.

(iv) Si $X = X^{-1}$, $\text{Sym}(X)$ est formé des x tels que $x.X = X.x^{-1}$. **Fin**

Nous appelons *cossette* une partie X de G qui a la propriété que, pour tous x, y et z dans X , $xy^{-1}z$ soit aussi dans X ; comme une cossette contenant l'élément neutre est un groupe, et qu'une translatée de cossette est une cossette, une cossette non-vide est bien l'objet familier obtenu par translation d'un sous-groupe H de G : $X = aHb = ab.b^{-1}Hb = aHa^{-1}.ab$.

Nous dirons enfin que X est *convexe* si, pour tous x et y dans X , $xy^{-1}x$ est aussi dans X , c'est-à-dire si X est contenue dans son symétriseur; X est donc symétrique par rapport à chacun de ses points. Cela signifie que, pour chaque x de X , $xX^{-1} = Xx^{-1}$, soit encore que tout translaté de X qui contient l'unité est clos par inversion.

Exemples d'ensembles convexes. Une cossette; l'ensemble des involutions de G ; le même augmenté de l'élément neutre; un ensemble commutatif d'involutions; une classe de conjugaison d'involutions; l'intersection de deux ou plusieurs ensembles convexes; si H est un sous-groupe normal de G , l'image réciproque d'une partie convexe de G/H , ou l'image directe d'une partie convexe de G ; l'ensemble des points inversés par un automorphisme de G , et en particulier celui des x tels que $axa^{-1} = x^{-1}$.

Voici les premières propriétés des ensembles convexes :

Lemme 3. (i) Si X est convexe, ses translatés $a.X.b$ le sont aussi, et il en est de même de X^{-1} .

(ii) Si X est convexe et N est un sous-groupe normalisé par X , $X.N = N.X$ est aussi convexe.

(iii) Si X et Y sont deux parties de G , $\text{Sym}(X, Y)$ est convexe.

(iv) Le symétriseur de n'importe quel ensemble X est convexe.

(v) Si un ensemble convexe contient l'élément neutre, il est clos pour toutes les opérations $x \rightarrow x^n$, où n est un entier relatif.

(vi) Pour qu'un ensemble convexe contienne l'élément neutre, il suffit qu'il soit non-vide et clos par élévation au carré.

(vii) Si X est convexe et clos par inversion, il normalise son fixeur, et dans le quotient $N(\text{Fix}(X))/\text{Fix}(X)$, $\text{Fix}(X/\text{Fix}(X)) = \{1\}$.

(viii) Tout ensemble convexe fini est contenu dans une cossette finie.

Démonstration. (i) C'est une conséquence du Lemme 2 (i).

- (ii) Comme $X.N = N.X$, N fixe cet ensemble à droite comme à gauche, ainsi que son ensemble inverse $X^{-1}.N = N.X^{-1}$; soient x dans X et y dans N ; $x.y.X^{-1}.N.x.y = x.X^{-1}.N.x.y = x.X^{-1}.x.N.y = X.N$.
- (iii) Supposons que $uX^{-1}u = vX^{-1}v = Y$; alors $uv^{-1}u.X^{-1}.uv^{-1}u = uv^{-1}.Y.v^{-1}u = u.X^{-1}.u = Y$.
- (iv) On applique (iii) au cas où $X = Y$.
- (v) C'est vrai pour $n = -1$ car $1.x^{-1}.1 = x^{-1}$; on montre alors que c'est vrai pour $n \geq 0$, par une récurrence qui s'amorce pour $n = 0$ et 1 , car $x^n.x^{n-1}.x^n = x^{n+1}$.
- (vi) Cela vient de ce que $x.x^{-2}.x = 1$.
- (vii) Si x est dans X , $xX = Xx^{-1}$, si bien que X est inclus dans son propre twisteur qui normalise $\text{Fix}(X)$. La deuxième partie vient de ce que $\text{Fix}(X)$ est le plus grand sous-groupe tel que X soit réunion de cosettes $\text{Fix}(X).a$.
- (viii) Soit X un ensemble convexe fini contenant l'unité; il faut voir qu'il engendre un groupe fini; après division par son fixateur, on est ramené au cas où $\text{Fix}(X) = \{1\}$. Soit alors H son twisteur, et f l'automorphisme défini par le Lemme 1; pour tout x de H , $xX = Xf(x)$, si bien que $f(x) = xa$ pour un a dans X . Si $x^{-1}.f(x) = y^{-1}.f(y)$, $yx^{-1} = f(y).f(x)^{-1} = f(yx^{-1})$, si bien que yx^{-1} est un point fixe de f ; par conséquent, le groupe des points fixes de f , qui est le normalisateur de X , est d'indice fini dans H , et il en est de même du centralisateur Z de X ; si u et v sont deux points du centralisateur C de Z , leur commutateur $[u,v]$ ne dépend que de leurs classes modulo Z , si bien que C n'a qu'un nombre fini de commutateurs, ce qui implique que son dérivé est fini (voir ROSENBLIGHT 1961). Comme chacun de ses éléments est d'ordre fini, X engendre un groupe fini. **Fin**

Le lemme suivant explique le choix du mot "convexe".

- Lemme 4.** (i) X est convexe si et seulement si chaque paire de ses points est reliée par une cosette incluse dans X (ce qui signifie que, si x et y sont dans X , $xA = yA$ est contenue dans X , où A est le groupe engendré par $x^{-1}y$).
- (ii) Si X est convexe, il existe même une famille de cosettes uniformément définissables à partir de X telle que chaque paire de points de X soit reliée par une cosette de cette famille incluse dans X .

Démonstration. (i) Si x et y sont dans une cosette, celle-ci contient $xy^{-1}x$. Pour la réciproque, on se ramène par une translation au cas où $y = 1$; d'après le Lemme 3, X est alors une réunion de sous-groupes.

(ii) Soient x et y dans X , et posons $u = x^{-1}y$, qui est dans le convexe $U = x^{-1}X$; l'intersection de U et du centre du centralisateur de u est un ensemble convexe commutatif γ' contenant u et 1 ; on voit alors que les carrés des points de γ' sont dans son fixateur; par conséquent, que u soit ou non dans $\text{Fix}(\gamma')$, $\gamma = u.\text{Fix}(\gamma') \cup \text{Fix}(\gamma')$ est un groupe inclus dans U , si bien que la cosette $\delta = x.\gamma$ est incluse dans X et contient x et y . Ces cosettes δ sont uniformément définissables. **Fin**

Nous examinons maintenant le lien entre ensembles convexes et automorphismes involutifs, qui est moins direct que ce qu'on pourrait croire.

Lemme 5. Soient f un automorphisme involutif du groupe G , F l'ensemble des points fixes de f , I l'ensemble des points inversés par f . Alors :

- (i) F est un groupe qui normalise I ; I est convexe, et deux points de I ont leur produit dans I si et seulement s'ils commutent ; $\text{Fix}(I)$ est le centre de I .
- (ii) G *twiste* I , et plus précisément $a.I = I.f(a)$ pour tout a de G ; G normalise $\text{Fix}(I)$, ainsi que l'ensemble $I.I$ et le groupe engendré par I .
- (iii) I est son propre symétriseur dans les circonstances suivantes : si $\text{Fix}(I)$ est trivial, ou bien si G ne contient pas d'élément $\neq 1$ conjugué de son inverse, ou bien si G ne contient pas d'involutions et I engendre G .
- (iv) Si G est simple, $\text{Fix}(I) = \{1\}$ et I engendre G , sauf si $f = \text{Id}$ et G ne contient pas d'involutions.

Démonstration. (i) Soient x et y dans F et u et v dans I ; $f(xy) = f(x)f(y) = xy$; $f(uvu) = f(u)f(v)f(u) = u^{-1}v^{-1}u^{-1} = (uvu)^{-1}$; $f(uv) = u^{-1}v^{-1}$ et n'est l'inverse de uv que si u et v commutent ; comme I contient l'unité, il contient $\text{Fix}(I)$, qui est formé des points de I qui commutent avec tous les autres.

(ii) Soient a dans G et u dans I ; posons $a.u = v.f(a)$, c'est-à-dire $v = a.u.f(a^{-1})$; $f(v) = f(a).u^{-1}.f^2(a^{-1}) = f(a).u^{-1}.a^{-1} = v^{-1}$ et v est dans I ; autrement dit $a.I = I.f(a)$, si bien que G est le *twisteur* de I , et qu'il normalise $\text{Fix}(I)$.

Soient a dans G et u et v dans I ; $a.uv.a^{-1} = u'f(a).va^{-1} = u'.v'.a.a^{-1} = u'.v'$, où u' et v' sont dans I .

(iii) Quand $\text{Fix}(I) = \{1\}$, $f(a)$ est l'unique b tel que $a.I = I.b$, si bien que le symétriseur de I est l'ensemble des points inversés par f , c'est-à-dire I lui-même. Dans le cas général, le symétriseur de I est formé des x tels que $f(x) = u.x^{-1}$ où u est dans $\text{Fix}(I)$; en appliquant f , on obtient $x = u^{-1}.f(x^{-1})$, soit encore $f(x^{-1}) = ux$ et $f(x) = x^{-1}.u^{-1}$, si bien que x conjugue u et u^{-1} ; si de plus I engendre G , comme u est central dans I , $u = u^{-1}$.

(iv) Comme $\text{Fix}(I)$ est commutatif et normal, il est trivial ; si I n'engendre pas G , il est réduit à l'unité, l'automorphisme f associé est l'identité, et G ne contient pas d'involutions. **Fin**

Corollaire 6. Si G est un groupe simple, il y a correspondance bijective entre d'une part ses parties génératrices propres, contenant l'unité et égales à leur propre symétriseur, et d'autres part ses automorphismes involutifs si G contient des involutions, ou bien ses automorphismes involutifs propres (i.e. $\neq \text{Id}$) si G ne contient pas d'involutions.

Démonstration. Soit X un tel sous ensemble de G ; comme X est inclus dans $\text{Tw}(X)$, ce dernier est égal à G , qui normalise $\text{Fix}(X)$; comme nous avons supposé que $X \neq G$, $\text{Fix}(X) \neq G$, et en conséquence $\text{Fix}(X) = \{1\}$; le Lemme 1 nous donne un automorphisme f de G qui inverse X , si bien que f^2

vaut l'identité sur le groupe G qu'il engendre ; l'ensemble des points inversés par f est le symétriseur de X , égal à X . La réciproque est donnée par le Lemme 6. **Fin**

Exemples. (i) Si X est une partie close par inversion du groupe commutatif A , $\text{Sym}(X)$ est le groupe des points dont le carré est dans $\text{Fix}(X)$; par conséquent, si A_n est le groupe des points d'ordre divisant 2^n , $\text{Inv}(A_n) = A_{n+1}$, ce qui peut produire une chaîne infinie de symétriseurs successifs. Si g est un générateur du groupe cyclique d'ordre 8, l'automorphisme de ce dernier qui à g associe g^3 est involutif ; l'ensemble I des points inversés par f est le sous-groupe d'ordre 4, qui n'est pas son propre symétriseur.

(ii) Dans le groupe $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, les couples dont l'une au moins des coordonnées est paire forment un ensemble X convexe engendrant G et strictement inclus dans son symétriseur. La raison en est claire : si le groupe $G = \text{Tw}(X)$ n'a pas d'involutions, ce n'est pas le cas du groupe $\text{Tw}(X)/\text{Fix}(X)$.

(iii) Plus significatif est l'exemple du groupe libre F_2 , muni de l'automorphisme f qui inverse ses générateurs a et b ; I est l'ensemble des palindromes, dont le fixe est trivial ; il se divise en trois ensembles convexes, clos par inversion, de symétriseur I et de fixe trivial, celui I_0 des palindromes de longueur paire, celui I_a des palindromes centrés sur a ou a^{-1} , et celui I_b des palindromes centrés sur b ou b^{-1} ; $I_a \cup I_b$ est convexe, engendre G mais ne contient pas l'unité, tandis que $I_a \cup I_0$ est convexe, contient l'unité mais n'engendre pas G .

(iv) Ce qui serait vraiment intéressant, c'est de trouver un groupe simple G , avec un sous ensemble convexe X contenant l'unité, engendrant G et strictement inclus dans son symétriseur.

Deuxième partie. Groupes périodiques sans involutions

L'impression générale donnée par la première partie est que la présence d'involutions, dans G ou dans certaines sections de G , gâche la beauté des théorèmes. Nous allons nous en débarrasser, en commençant par la méthode la plus radicale : nous considérons dans cette courte section un groupe G périodique sans involutions, c'est-à-dire un groupe dans lequel tout élément est d'ordre fini impair (par exemple un groupe fini sans involutions). Si x est dans G , x et x^2 sont chacun une puissance de l'autre, si bien que x a une unique racine carrée, et que tout sous-groupe H de G qui contient x^2 contient x ; cela implique qu'aucun point $\neq 1$ n'est conjugué de son inverse.

On remarque aussi que, quels que soient x et y , il existe un unique z tel que $zx^{-1}z = y$; en effet, cette condition signifie que zx^{-1} est la racine carrée de yx^{-1} . Nous appellerons $z = m(x,y)$ le *milieu* de x et de y .

Notons que $m(x,y) = m(y,x)$, $m(x,y)^{-1} = m(x^{-1},y^{-1})$, $a.m(x,y).b = m(axb,ayb)$.

Lemme 7. *Soit G un groupe périodique sans involution ; alors :*

- (i) Toute partie de G convexe non vide est égale à son propre symétriseur.
- (ii) Dès qu'un convexe non-vide est clos par inversion, il contient l'unité.
- (iii) Pour que X soit convexe, il faut et il suffit que, pour tous x et y dans X , ce dernier contienne le milieu $m(x,y)$ de x et de y .

Démonstration. (i) Grâce à une translation nous pouvons supposer que cet ensemble X contient l'unité ; si alors x est dans $\text{Sym}(X)$, x^2 est dans X , ainsi que x qui en est une puissance.

(ii) Si X est clos par inversion, son symétriseur contient l'unité.

(iii) Pour vérifier que X convexe contient le milieu $m(x,y)$ de deux de ses points x et y , on se ramène par translation au cas où $x = 1$; X est alors une réunion de sous-groupes, et contient bien la racine carrée de y .

Réciproquement, considérons un ensemble X non-vide clos par prise de milieu, et translatons-le de manière à obtenir un ensemble Y contenant l'unité ; soient x dans Y , et H le groupe cyclique engendré par x , dont nous notons la loi additivement ; pour chaque u pris dans l'ensemble $U = Y \cap H$, $(x+u)/2$ est dans U , et leur ensemble est en fait égal à U puisqu'il a le même nombre d'éléments ; par conséquent il contient 0 , et l'inverse de x est dans U . En conséquence, tout translaté de X qui contient l'unité est clos par inversion, ce qui signifie que X est convexe. **Fin**

Naturellement, dans un groupe uniquement 2-divisible général, la condition de clôture par symétrie et celle de clôture par prise de milieu n'ont rien d'équivalent.

Nous voyons aussi que, si G est simple, périodique et sans involutions, il y a correspondance bijective entre ses automorphismes involutifs non triviaux et ses parties propres convexes, contenant l'unité, et qui l'engendrent.

Pour éviter les répétitions, je ne dis rien de plus sauf que tous les résultats de la section suivante qui ne mentionnent pas le rang de Morley, et en particulier le Lemme 8, sont aussi valables pour un groupe périodique sans involutions.

Troisième partie. Groupes ω -stables sans involutions

Dans cette section, G est un groupe ω -stable sans involutions ; tous les lemmes s'appuient sur le fait bien connu suivant :

Fait. Tout point de G a une unique racine carrée ; si x^2 appartient à un sous-groupe définissable H de G , x est aussi dans H ; si $x \neq 1$, x et x^{-1} ne sont pas conjugués dans G ; quels que soient x et y , il existe un unique z tel que $zx^{-1}z = y$, que nous appelons le milieu $m(x,y)$ de x et de y .

Démonstration. Soient a un point de G , et A le plus petit sous-groupe définissable le contenant ; c'est un groupe commutatif sans involutions, si bien que l'élevation au carré définit un endomorphisme injectif de A dans A , dont l'image a même rang et même degré de Morley que A , et lui est égale ; par

conséquent a a une unique racine carrée α dans A . Soit β une racine carrée de a ; comme elle commute avec a , elle normalise A et commute avec α ; $(\alpha\beta^{-1})^2 = \alpha^2\beta^{-2} = 1$, et $\alpha = \beta$ puisqu'il n'y a pas d'involutions.

Chaque x appartient au plus petit sous-groupe définissable contenant x^2 ; si y conjugue x et x^{-1} , y^2 commute avec x , ainsi que y , et donc $x = x^{-1} = 1$. L'existence et unicité du milieu est équivalente à l'existence et unicité de la racine carrée. **Fin**

Lemme 8. Soient f un automorphisme involutif de G (définissable ou non), F le groupe des points qu'il fixe et I le convexe des points qu'il inverse. Alors :

(i) Tout point de G s'écrit de manière unique comme produit d'un point de F et d'un point de I , et aucun point $\neq 1$ de F n'est conjugué d'un point de I ; $I.I$ est l'ensemble des conjugués des points de I .

(ii) I est son propre symétriseur; son centre $\text{Fix}(I)$ est le plus grand sous-groupe de I normal dans I , et le normalisateur de I est engendré par F et $\text{Fix}(I)$; le normalisateur de F est engendré par F et les points de I qui le centralisent.

Démonstration. (i) Pour tout a de G , $a^{-1}.f(a)$ est dans I ; l'inverse b de son unique racine carrée est aussi dans I , et $b^{-1}.f(b) = b^{-2} = a^{-1}.f(a)$, si bien que $a.b^{-1} = f(a).f(b^{-1}) = f(a.b^{-1})$ est un point fixe de f . Soient x et y dans f et u et v dans I ; si $xu = yv$, uv^{-1} est dans F , $f(uv^{-1}) = uv^{-1} = u^{-1}v$, si bien que $u^2 = v^2$ et $u = v$, et la décomposition est unique.

L'ensemble des x tel que $f(x)$ soit conjugué de x contient F , tandis que l'ensemble des u tel que $f(u)$ soit conjugué de u^{-1} contient I ; ces deux ensembles sont normaux et s'intersectent sur l'unité.

Pour tous a de G et u de I , il existe v dans I tel que $aua^{-1} = vf(a)a^{-1}$; or les points de I sont précisément ceux de la forme $f(a).a^{-1}$.

(ii) D'après le Lemme 5 (iii), I est égal à son symétriseur. Soient x dans F et u et v dans I ; si uvu^{-1} est dans I , $f(uvu^{-1}) = u^{-1}v^{-1}u = (uvu^{-1})^{-1} = uv^{-1}u^{-1}$, et u^2 commute avec v , ainsi que u ; si uxu^{-1} est dans F , $f(uxu^{-1}) = u^{-1}xu = uxu^{-1}$, et u^2 commute avec x , ainsi que u . **Fin**

Exemple. Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, G le groupe $U_3(K)$ des matrices triangulaires unipotentes $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on définit un automorphisme involutif de G par $f(M(a,b,c)) = M(-a,b,-c)$; les points inversés sont définis par l'équation $2b = ac$ et leur centre est trivial. Ils forment un ensemble convexe qui n'est pas une cossette, et qui n'a qu'un seul type générique quand K est algébriquement clos.

Lemme 9. (i) Si X et Y sont deux parties non-vides de G , $\text{Sym}(X,Y)$ s'injecte dans X , par une injection définissable quand X est définissable.

(ii) Si X et Y sont deux parties définissables convexes de G et X est strictement incluse dans Y , X s'injecte définissablement dans $Y - X$.

- (iii) Si X est définissable, convexe et non-vide, elle est égale à son propre symétriseur ; si en outre elle est commutative, c'est une cossette.
- (iv) Si X est définissable, convexe, non-vide et close par inversion, elle contient l'unité ; elle est alors close par extraction de racine carrée, et le produit de deux éléments de X est dans X si et seulement s'il commutent modulo $\text{Fix}(X)$; ce dernier est le plus grand sous-groupe de X normalisé par X .
- (v) Soient X un convexe définissable contenant l'unité, et H le plus petit sous-groupe définissable le contenant ; alors tout convexe définissable Y compris entre X et H est de la forme $Y = \text{Fix}(Y).X$, $\text{Fix}(Y)$ pouvant être n'importe quel sous-groupe définissable normal de H contenant $\text{Fix}(X)$.

Démonstration. (i) On peut supposer que $\text{Sym}(X,Y)$ n'est pas vide et, au prix d'une translation, que X contient l'élément neutre, et alors, si x est dans $\text{Sym}(X,Y)$, x^2 est dans Y , qui est translaté de X^{-1} ; or élévation au carré, inversion et translations sont bijectives.

Quand X est définissable, $\text{Sym}(X,Y)$ l'est aussi, soit parce qu'il est vide, soit parce que Y est également définissable.

(ii) Si x est dans X et y dans $X - Y$, il n'est pas possible que $xy^{-1}x$ soit dans X , car sinon $y = x.(xy^{-1}x)^{-1}.x$ serait dans X ; par conséquent X est contenue dans le symétriseur de $Y - X$, et s'y injecte définissablement.

(iii) Si X est convexe et contient l'unité, $\text{Sym}(X)^2 \subseteq X \subseteq \text{Sym}(X)$, si bien que X et $\text{Sym}(X)$ ont même rang et même degré de Morley, et sont donc égaux (autre démonstration : X est réunion de groupes définissables, et donc clos par prise de racine carrée). Par conséquent, si deux éléments de X commutent, leur produit est dans X .

(iv) Comme $X = X^{-1}$, son symétriseur, qui lui est égal, contient l'unité, et il est clos par extraction de racine carrée puisque c'est une union de sous-groupes définissables.

Pour la suite, un quotient nous ramène au cas où $\text{Fix}(X) = \{1\}$; le Lemme 1 nous donne un automorphisme f du twisteur de X tel que le symétriseur de X , c'est-à-dire X , soit l'ensemble des points inversés par f ; X étant inclus dans le groupe H des points fixes de f^2 , il ne reste plus qu'à invoquer le lemme précédent.

(v) $\text{Fix}(Y)$ est le plus grand sous-groupe normal de H contenu dans Y ; d'après le Lemme 3 (ii), $Z = \text{Fix}(Y).X$ est un convexe intermédiaire entre X et Y ; il a même fixe que Y , et on veut montrer que Y et Z sont égaux. Au prix d'un quotient, on est ramené au cas où $\text{Fix}(Y) = \text{Fix}(Z) = \{1\}$.

Le Lemme 1 donne alors un automorphisme définissable du twister f de Z qui inverse Z , et tel que $a.Z = Z.f(a)$; comme H est fixé par f^2 , on obtient par restriction un automorphisme involutif g de H ; Y donne de la même façon un automorphisme g' de H qui l'inverse, et comme g et g' ont même restriction à Z , ils sont égaux ; Y est contenu dans le symétriseur de Z , c'est-à-dire dans Z lui-même, et lui est égal. **Fin**

Une conséquence du Corollaire 6 et du Lemme 8 est que, dans un groupe G simple ω -stable sans involutions, il y a correspondance bijective entre les automorphismes involutifs définissables non triviaux et les parties propres définissables convexes génératrices et contenant l'unité. D'après le Lemme 8 (v), le seul ensemble convexe définissable contenant strictement l'une d'entre elles est le groupe G tout entier.

On obtient aussi la condition de chaîne descendante sur les convexes définissables : si X est strictement inclus dans Y , il y a décroissance du rang de Morley, ou bien du degré de Morley.

Nous dirons que deux parties définissables de G de même rang de Morley sont presque égales si leur différence symétrique est de rang inférieur ; une autre conséquence du Lemme 8 est que deux parties définissables convexes presque égales sont égales, car elles sont presque égales à leur intersection, qui est aussi convexe. En particulier, si G est connexe, ses parties définissables convexes génériques lui sont égales.

Si p est un 1-type complet au-dessus d'un modèle G de la théorie T de groupe considérée, le symétriseur de p est l'ensemble des x de G tel que $x\alpha^{-1}x$ soit de type p pour α réalisant p . Il s'agit d'un ensemble convexe, non-vidé si p est translatable sur un type égal à son type inverse, qui est définissable si T est ω -stable ; en effet, si $\varphi(y, \underline{a})$ est une formule isolant p des types de même rang de Morley, il s'agit des x tels que $\varphi(xy^{-1}x, \underline{a})$ soit satisfaite par p .

Plus généralement, si $\{p_1, \dots, p_n\}$ est un ensemble fini de types, on peut définir son symétriseur comme étant l'ensemble des x de G qui le conservent par l'opération $xp_i^{-1}x$; comme, à x fixé, cette opération est involutive, chaque point de du symétriseur définit une permutation de l'ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$.

On montre comme dans le Lemme 3 que, étant donnés deux 1-types p et q au-dessus de G , l'ensemble $\text{Sym}(p, q)$ des x de G tels que $xp^{-1}x = q$ forment un ensemble convexe définissable.

Si X est une partie définissable convexe d'un groupe ω -stable G , nous appellerons *types génériques* de X ses types de rang de Morley maximum, et nous dirons que X est *connexe* s'il est de degré de Morley un, c'est-à-dire s'il n'a qu'un seul type générique. Le lemme suivant étend aux ensembles convexes la décomposition d'un groupe définissable en cosettes de degré de Morley un, montrée pour la première fois dans CHERLIN 1979.

Lemme 10. (i) *Toute partie définissable convexe non-vidé d'un groupe ω -stable sans involutions est le symétriseur de l'ensemble de ses types génériques.*
(ii) *Elle se décompose de manière unique en un nombre fini de parties définissables convexes connexes deux-à-deux disjointes.*
(iii) *Si X est convexe, définissable et connexe, la plus petite cosette définissable la contenant est aussi connexe, et $\text{Fix}_g(X)/\text{Fix}_g(X)^\circ$ est commutatif.*

(iv) Soient Y est définissable et convexe, et X une de ses composantes connexe ; $\text{Fix}g(Y)^\circ$ est inclus dans $\text{Fix}g(X)$, et c'est sa composante connexe si si en outre la plus petite cossette définissable contenant Y est connexe ; si le groupe est sans torsion, toutes ses parties définissables convexes sont connexes.

(v) Une partie définissable d'un groupe ω -stable sans involutions est convexe si et seulement si elle est close par prise de milieu.

Démonstration. (i) Soit $\{p_1, \dots, p_d\}$ l'ensemble des types génériques du convexe X . Si x est dans X , chaque $xp_i^{-1}x$ est un type générique de X , si bien que X est inclus dans $\text{Sym}(\{p_1, \dots, p_d\})$. Réciproquement, si x est dans $\text{Sym}(\{p_1, \dots, p_d\})$, X et $xX^{-1}x$ sont presque égaux, donc égaux, et x est dans le symétriseur de X , c'est-à-dire dans X .

(ii) Nous nous plaçons au-dessus d'un ensemble de paramètres permettant de distinguer les types génériques, et nous fixons l'un d'entre eux, soit p ; soient x un point de X générique, α une réalisation de p indépendante de x , et $\beta = x\alpha^{-1}x$; β réalise le type générique $q = xp^{-1}x$; comme x et β se correspondent par une bijection définissable avec α comme paramètre, ils ont même rang de Morley $\text{RM}(X)$ au-dessus de α , ce qui signifie que α et β sont indépendants ; par conséquent, si y est un autre point générique de X dans $\text{Sym}(p,q)$, il a même type que x . Comme il faut bien que les d types génériques de X trouvent chacun sa place, les $X \cap \text{Sym}(p,p_i)$ constituent une partition de X en d ensembles convexes connexes.

Si $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ est une partition de X en ensembles convexes connexes, chaque X_i qui contient un type générique de X est l'involuteur de ce dernier, et se retrouve dans la partition précédente ; le reste est vide.

(iii) Si on décompose la plus petite cossette définissable C contenant le convexe connexe X en ses composantes connexes $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$, X est presque contenu, et donc contenu, dans celle d'entre elles qui contient le type générique de X .

Si X contient l'unité, le plus petit groupe définissable H qui le contient est connexe et normalise $\text{Fix}(X)$; le groupe fini $\text{Fix}(X)/\text{Fix}(X)^\circ$ est normal dans le groupe connexe $H/\text{Fix}(X)$; il est donc commutatif.

(iv) On suppose que Y contient l'unité ; vu l'unicité de la décomposition, $\text{Fix}(Y)$ opère par translation à gauche sur ses composantes connexes, et $\text{Fix}(X)^\circ$ fixe chacune d'elle.

On suppose que le plus petit groupe G définissable contenant Y est connexe ; après division, par $\text{Fix}(Y)^\circ$, on est ramené au cas où $F = \text{Fix}(Y)$ est fini, et il faut montrer que chaque composante connexe de Y a un fixateur fini ; comme F est normal dans G connexe, il y est central.

Dans le groupe G/F , Y/F est l'ensemble des points inversés par un automorphisme f involutif ; comme tout point de G/F s'écrit de manière unique comme produit d'un point fixé et d'un point inversé par f , Y/F est connexe. En conséquence, si p et q sont les types génériques de deux

composantes connexes X et X' de Y , $p = a.q$ pour un a de F , et $X = a.X'$; comme a est central, toutes les composantes connexes de Y ont même fixateur, qui est inclus dans $\text{Fix}(X)$.

Quand il n'y a pas de torsion, il n'y en a pas non plus dans les sections définissables, et tous les groupes définissables sont convexes.

(v) Si X est convexe, elle est close par prise de milieu, car, pour chacun de ses éléments x , $X.x^{-1}$ est clos par extraction de racine carrée, étant réunion de groupes définissables.

Considérons réciproquement X définissable, convexe, non-vide et close par prise de milieu; soit $\{p_1, \dots, p_d\}$ l'ensemble de ses types génériques. Si x et α sont deux points de X , α étant générique sur x , $\beta = m(x, \alpha)$ correspond à α par une bijection définissable avec x comme paramètres; β est donc un point de X générique sur x , et comme il détermine le type de α , son type parcourt l'ensemble $\{p_1, \dots, p_d\}$ quand celui de α le fait. En conséquence, si α est générique sur x , $\alpha x^{-1} \alpha$ est aussi dans X .

Notons Y le symétriseur de $\{p_1, \dots, p_d\}$; comme chacun de ses points se trouve au milieu de deux p_i , son rang de Morley est au plus celui de X , et ses seuls types de rang maximal sont ceux de X : X et Y sont presque égaux.

Comme tout point de Y est le milieu de deux points génériques, qui sont dans X , Y est inclus dans X . S'il y avait un point x de X en dehors de Y , pour tout y de Y $m(x, y)$ serait aussi dans X mais pas dans Y , ce qui contredit la presque-égalité de X et de Y . X et Y sont donc égaux. **Fin**

Exemple. On obtient un ensemble convexe non connexe dont la plus petite cosette le contenant est connexe dans la situation suivante, réalisé dans $U_3(K)$ en caractéristique impaire. Soit X un ensemble convexe connexe de fixateur trivial et contenant l'unité, engendrant un groupe définissable connexe, de la forme $G = N.X$ où N est le groupe des points fixes par l'automorphisme involutif f défini par X ; le centre de G est formé de points fixes, et si F en est un sous-groupe fini non trivial $X.F$ n'est pas connexe et engendre G .

Quatrième partie. Groupes de rang de Morley fini sans involutions

Nous travaillons maintenant dans un groupe G de rang de Morley fini, car nous avons besoin de la définissabilité et de l'additivité du rang. Nous commençons par un premier lemme valable dans tous les cas, même s'il y a des involutions.

Nous disons que le groupe H est *elliptiquement engendré* par l'ensemble X si chaque élément de H est le produit de n éléments de $X \cup X^{-1} \cup \{1\}$, où n est un entier fixé.

Lemme 11. *Dans un groupe G de rang de Morley fini, le groupe engendré par un ensemble convexe définissable X contenant l'unité est elliptiquement engendré (et définissable).*

Démonstration. D'après le Théorème des Indécomposables, de Zilber, il existe un plus grand groupe H définissable connexe elliptiquement engendré par X ; X normalise H , et X/H est fini, toujours d'après ce théorème (voir POIZAT 1987 Théorèmes 2.7 et 2.9) ; d'après le Lemme 3 (viii), X engendre un groupe fini modulo H . **Fin**

Si G est de rang de Morley fini, la presque-égalité est une relation d'équivalence définissable pour ses familles uniformes de parties définissables. Nous introduisons les presque-normalisateur, presque-twisteur et presque-fixeur d'une partie définissable X , qui sont des groupes définissables ; de même, le presque-symétriseur de X , qui est l'ensemble des x tels que $xX^{-1}x$ soit presque-égal à X , est un ensemble convexe définissable, qui n'est pas vide seulement si X peut être translaté sur un ensemble presque-égal à son inverse ; deux ensembles presque-égaux ont le même presque-symétriseur, le même presque-twisteur, le même presque-fixeur, et les Lemmes 1 et 2 se généralisent à ce contexte approximatif.

Quand il n'y a pas d'involutions, comme deux ensembles définissables convexes presque-égaux sont égaux, le presque-twisteur d'un ensemble définissable convexe est son twisteur, son presque-fixeur est son fixeur, et il est égal à son presque-symétriseur.

L'additivité du rang permet d'établir un principe de Fubini : une propriété définissable est valable pour presque tous (x,y) de $X \times Y$ ssi pour presque tout x de X elle est valable pour presque tout y de Y , ssi pour presque tout y de Y elle est valable pour presque tout x de X .

Nous dirons que X est presque-convexe si les couples (x,y) de $X \times X$ tels que $xy^{-1}x$ soient dans X forment un ensemble presque-égal à $X \times X$; cela signifie encore que X est presque-contenu dans son presque-symétriseur, puisque nous pouvons associer et commuter les presques. Le lemme suivant permet de choisir un représentant canonique de la classe de presque-égalité d'un ensemble presque-convexe.

Lemme 12. *Dans un groupe de rang de Morley fini sans involutions, le presque-symétriseur d'un ensemble définissable non-vide s'injecte presque dans ce dernier, et un ensemble définissable presque-convexe non-vide est presque-égal à son presque-symétriseur.*

Démonstration. Pour tout x dans $\text{PSym}(X)$, pour presque tout y dans X , $xy^{-1}x$ est dans X ; par conséquent, pour presque tout y dans X , pour presque tout x dans $\text{PSym}(X)$ $xy^{-1}x$ est dans X : soit a un tel y ; pour presque tout x dans $\text{PSym}(X)$, $xa^{-1}xa^{-1}$ est dans Xa^{-1} , et l'élevation au carré injecte presque un translaté de $\text{PInv}(X)$ dans un translaté de X .

Si X est presque-inclus dans $\text{PSym}(X)$, ces deux ensembles ont donc même rang et même degré de Morley, et sont presque-égaux. **Fin**

Cinquième partie. Mauvaises paires

Un sous-groupe propre B du groupe G est dit *malnormal* s'il est autonormalisant et disjoint de ses conjugués ; cela veut dire que $B \neq \{1\}$, et que, pour tout a qui n'est pas dans B , $B \cap aBa^{-1} = \{1\}$. En Théorie des Groupes Finis, on appelle groupe de Frobenius un groupe fini possédant un sous-groupe malnormal, et la structure très particulière de ces groupes ont fait l'objet de nombreux travaux, qui sont le point de départ du Théorème de Feit et Thompson, et de la classification des groupes simples finis.

Un argument de comptage immédiat montre qu'il n'est pas possible que, dans un groupe de Frobenius fini, G soit la réunion des conjugués de B .

Nous appellerons *mauvaise paire* la donnée d'un groupe connexe G de rang de Morley fini possédant un sous-groupe propre malnormal B dont G soit la réunion des conjugués ; bien que ces groupes soient qualifiés de groupes de Frobenius remplis dans JALIGOT 2001, nous préférons ce nom plus bref car ces paires sont liées aux *mauvais groupes*.

En généralisant les mauvais groupes de rang trois apparus dans CHERLIN 1979, POIZAT 1987 (p. 105) définit ces *mauvais groupes* comme étant les groupes de rang de Morley fini connexes non-nilpotents, dont tous les sous-groupes résolubles définissables connexes sont nilpotents. Les études indépendantes de CORREDOR 1989 et BOROVIK-POIZAT 1990, s'appuyant sur NESIN 1989 (indispensable même dans le cas de dimension trois), montrent qu'un mauvais groupe minimal est une mauvaise paire.

Ces mauvais groupes n'ont pas d'analogues dans le cas fini, puisqu'il est facile de voir qu'un groupe fini non-nilpotent contient un sous-groupe résoluble non-nilpotent ; en effet, dans un contre-exemple minimal, les sous-groupes maximaux sont disjoints ; il y a trop de place pour qu'ils soient conjugués, et pas assez pour qu'ils ne le soient pas. Dans le cas des groupes de rang de Morley fini, ce type d'argument bute sur la possibilité d'existence des mauvaises paires.

L'existence des mauvais groupes, et aussi des mauvaises paires qui produisent des groupes simples sans involutions, contredirait la Conjecture d'Algébricité, postulant qu'un groupe simple de rang de Morley fini doit être un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos ; cette conjecture a été démontrée pour les groupes possédant des involutions (ABC 2008), mais elle résiste quand il n'y en a pas, en l'absence d'une version même très rudimentaire d'un analogue au Théorème de Feit et Thompson.

Nous poursuivons donc dans un contexte très hypothétique, par un lemme précisant certaines conclusions de BOROVIK-NESIN 1994 et de JALIGOT 2001.

Lemme 13. *Soit (G,B) une mauvaise paire.*

(i) *G ne contient pas d'involutions.*

(ii) *Tout sous-groupe fini ou résoluble de G est contenu dans un conjugué de B ; tout ensemble convexe fini se translate (bilatèrement) dans B .*

(iii) *B est infini, définissable et connexe, et $\text{RM}(G) > 2.\text{RM}(B)$.*

- (iv) Si H est un sous-groupe définissable connexe de G non inclus dans un conjugué de B , et si C est une intersection non triviale de H et d'un conjugué de B , (H,C) est une mauvaise paire.
- (v) Si C est un sous-groupe propre de G contenant strictement B , C est définissable et connexe, et (G,C) et (C,B) sont des mauvaises paires.
- (vi) Si (G,B') est une autre mauvaise paire, et si C est une intersection non triviale d'un conjugué de B et d'un conjugué de B' , (G,C) est une mauvaise paire.
- (vii) G a un unique sous-groupe normal non-trivial minimal, qui est un groupe simple définissable S , et $G = S.B$.

Démonstration. (i) Soient i et j des involutions, contenues dans des conjugués de B distincts ; chacune inverse par conjugaison leur produit ij , et doit appartenir au conjugué de B contenant ce produit, ce qui est absurde.

(ii) Si R est un sous-groupe résoluble, il normalise un groupe abélien A non trivial, qui est inclus dans le conjugué de B contenant un quelconque de ses points $a \neq 1$; R est aussi dans ce conjugué de B . Si F est un groupe fini, on peut montrer le résultat sans faire appel au Théorème de Feit et Thompson ; en effet, si F intersectait un conjugué de B sans lui être inclus, il s'exprimerait comme une réunion de sous-groupes malnormaux disjoints, ce qui est impossible. Pour les convexes, on utilise le Lemme 3 (viii).

(iii) G a un sous-groupe abélien infini définissable et connexe, qui est contenu dans un conjugué de B ; ce dernier contient donc un groupe définissable connexe infini A ; d'après le Théorème des Indécomposables, le groupe engendré par les conjugués de A sous l'action des éléments de B est définissable ; B est son normalisateur, et est définissable lui-aussi.

Si B n'était pas connexe, G se décomposerait en deux sous-ensembles de rang de Morley maximal, la réunion des conjugués de B° et celle des conjugués de $B-B^\circ$, ce qui contredit sa connexité.

Soit a un point hors de B ; comme les deux groupes B et aBa^{-1} sont disjoints, $RM(BaBa^{-1}) = RM(BaB) = 2.RM(B)$; si les classes doubles BaB et $Ba^{-1}B$ étaient génériques dans G , qui est connexe, elles seraient égales, si bien que $a^{-1} = bab'$ avec b et b' dans B , et que $(ab)^2$ serait dans B , ce qui est impossible.

(iv) Comme C est malnormal dans H , la réunion de ses conjugués dans H est générique, et comme ce dernier est connexe toute intersection non-triviale de H avec un conjugué de B est conjuguée de C dans H .

(v) D'après le Théorème des Indécomposables, le groupe D engendré par les conjugués de B par les points de C est définissable et connexe ; d'après le point précédent (D,B) est une mauvaise paire, et chaque conjugué de B contenu dans D est conjugué de B par un point de D ; en conséquence, chaque point de C est congru à un point de D modulo le normalisateur de B , qui est B lui-même, et $D = C$.

Si $C \cap aCa^{-1}$ n'est pas vide, il intersecte non-trivialement un conjugué B' de B , qu'il contient ; B' est donc conjugué de B par un c de C , et conjugué de aBa^{-1} par un d de aCa^{-1} ; en conséquence $c^{-1}.d.a$ est dans B , et a est dans C . Il est donc malnormal, et il est clair que ses conjugués recouvrent G .

(vi) On peut supposer que $C = B \cap B'$ et que c'est un sous-groupe propre de B ; comme la paire (B,C) est mauvaise, C est disjoint de ses conjugués qui sont dans B , et comme la paire (G,B) est mauvaise, il est disjoint de ceux qui sont dans un autre conjugué de B ; il est clair que ses conjugués recouvrent G .

(vii) Comme G n'a pas de sous-groupe normal résoluble, son socle est un produit de groupes simples $S_1 \times \dots \times S_n$ (POIZAT 1987, p. 97), et il ne peut y en avoir qu'un seul : sinon S_1 commuterait avec S_2 , et serait inclus dans un conjugué de B , ce qui l'empêcherait d'être normal.

Comme S est normal dans G , il intersecte non trivialement chaque conjugué de B ; comme $(S, S \cap C)$ est une mauvaise paire, les conjugués de B sont conjugués par des éléments de S , si bien que chaque point de G est conjugué d'un point de S modulo le normalisateur de B , qui est B . **Fin**

Si nous prenons H de rang de Morley minimal dans le point (iv) de ce dernier lemme, nous obtenons une mauvaise paire (H,C) telle que tous les sous-groupes définissables propres de H soient contenus dans un conjugué de C ; dans ce cas, nous dirons que la mauvaise paire est *spéciale* ; H est alors un groupe simple. Puisque nous travaillons dans un contexte hypothétique, il est bon de remarquer que l'existence d'une mauvaise paire implique celle d'une mauvaise paire spéciale, et que l'existence d'un mauvais groupe implique l'existence d'une mauvaise paire spéciale (G,B) avec B nilpotent.

Le point (vi) montre aussi que, pour un G donné, s'il existe B tel (G,B) soit une mauvaise paire, il en existe un minimal qui est unique à conjugaison près ; par exemple, si B normalise un sous-groupe abélien, il est minimal.

Lemme 14. *Si (G,B) est une mauvaise paire spéciale, alors :*

(i) *Tout automorphisme f de G involutif définissable est trivial.*

(ii) *Toute partie propre définissable convexe de G se translate dans B .*

(iii) *Toute partie définissable presque-convexe est générique ou se translate presque dans B .*

(iv) *Si B est commutatif, toute partie de G définissable convexe est une cosette.*

Démonstration. (i) Comme les conjugués de B sont les sous-groupes définissables maximaux de G , $f(B)$ est conjugué de B ; si f n'est pas trivial, son groupe de points fixes est contenu dans un conjugué de B , et d'après le Lemme 7 il en existe un autre, B' qui contient un point non trivial inversé par f ; comme l'intersection de B' et de $f(B')$ n'est pas triviale, ces deux groupes sont égaux, et f définit par restriction un automorphisme de B' sans points

fixes ; d'après ce même lemme il est inversé par f , et tout point de G est conjugué d'un point inversé par f , ce qui est impossible.

(ii) On suppose qu'elle contient l'unité ; si elle n'engendre pas G , d'après le Lemme 10 elle est contenue dans un conjugué de B ; si elle engendre G , son fixeur est normal, et il n'est pas possible qu'il soit trivial, car sinon on obtiendrait un automorphisme involutif de G qui l'inverse ; donc son fixeur, et elle-même, sont égaux à G .

(iii) C'est une conséquence du Lemme 12.

(iv) C'est une conséquence du Lemme 11. **Fin**

Lemme 15. *Si (G,B) est une mauvaise paire, toute partie X de G définissable convexe contenant une cossette aBb est une cossette, et son rang ne peut être $2.RM(B)$.*

Démonstration. En translatant, on peut supposer que X contient B . Le groupe H engendré par X est définissable et connexe, et $\text{Fix}(X)$ est normal dans H .

Si $X = B$, ça baigne. Sinon (H,B) est une mauvaise paire ; si $\text{Fix}(X) = \{1\}$, on obtient un automorphisme involutif f de H qui inverse tous les points de B ; comme tout point de H est conjugué d'un point inversé par f , ce dernier n'a pas de points fixes $\neq 1$, et H est inversé par f ; cela implique que H est commutatif, une absurdité. Par conséquent, comme $\text{Fix}(X)$ est normal dans H , $H = B.\text{Fix}(X)$, et $H = X$; on sait que $RM(H) > 2.RM(B)$. **Fin**

Conclusion : points de Frécon et ensembles de Frécon

Si (G,B) est une mauvaise paire, on peut considérer les translats aBb de B comme les droites d'une géométrie ; en effet, par deux points distincts x et y passe une droite et une seule, la droite $xB' = yB'$, où B' est l'unique conjugué de B contenant $x^{-1}.y$. On peut assimiler la droite aBb à son paramètre canonique, image imaginaire du couple (a,b) .

On peut aussi considérer les ensembles B -convexes, qui avec deux points distincts contiennent la droite passant par ces deux points. D'après le Lemme 14, il s'agit d'une géométrie sans plans, c'est-à-dire sans ensembles B -convexes de dimension $2.RM(B)$.

Mais ces ensembles ne suffisent pas pour obtenir la contradiction trouvée par Frécon, qui a besoin de montrer qu'il n'existe pas non plus d'espèces de plans approximativement B -convexes, dont nous espérons que les propriétés sont éclairées par notre quatrième partie.

Si X est une partie définissable de G , les droites qui sont presque contenues dans X forment une famille définissable $D(X)$; en calculant de deux façons le rang des couples de points de X incidents à une droite de $D(X)$, on voit que $RM(D(X)) \leq 2.RM(X) - 2.RM(B)$; s'il y a égalité, nous dirons que X est un *ensemble de Frécon*.

On voit de même que, si x est un point de G , les droites passant par x et presque incluses dans X forment un ensemble $D(x,X)$, dont le rang de

Morley est majoré par $RM(X) - RM(B)$; s'il y a égalité, on dit que x est un point de Frécon de X .

Lemme 16. *Si X est de degré de Morley un, ses points de Frécon font partie de son presque symétriseur ; si Z est l'ensemble des points de Frécon de X qui ne sont pas dans X , $RM(Z) < RM(X)$.*

Démonstration. Si a est un point de Frécon de X , 1 est un point de Frécon de $a^{-1}.X$; comme ce dernier ensemble est presque égal à son inverse, 1 est dans son presque symétriseur, et a est dans $PSym(X) = a.PSym(a^{-1}.X)$.

En évaluant de deux façons le rang de l'ensemble des couples (x,d) , où x est un point de Z sur une droite d presque incluse dans X , nous obtenons : $RM(Z) + RM(X) - RM(B) \leq 2.RM(X) - 2.RM(B) + RM(B) - 1$, puisque $RM(d \cap Z) < RM(B)$; d'où $RM(Z) \leq RM(X) - 1$. **Fin**

Lemme 17. (i) *Dans une mauvaise paire spéciale, tout ensemble définissable dont les points de Frécon forment un ensemble de rang de Morley strictement supérieur à $RM(B)$ est générique.*

(ii) *Si X est de degré de Morley un, il est de Frécon si et seulement si l'ensemble de ses points de Frécon est de même rang que lui ; dans ce cas, il est presque égal à l'ensemble de ses points de Frécon, qui forment une cossette contenant une droite.*

(iii) *Si X est de Frécon et $RM(X) > RM(B)$, alors $RM(X) > 2.RM(B)$; si de plus la paire est spéciale, X est générique.*

Démonstration. (i) Si a est un point de Frécon de $X \cup Y$, c'est un point de Frécon de X ou un point de Frécon de Y ; on se ramène donc au cas où le degré de Morley de l'ensemble vaut un, et c'est une conséquence des Lemmes 12 et 14.

(ii) Soit Y l'ensemble des points de Frécon de X ; si $RM(Y) = RM(X)$, X et Y sont presque égaux, et X est presque convexe, et presque égal à $PSym(X)$; ces trois ensembles ont les mêmes points de Frécon, si bien que $PSym(X)$ en contient au moins un ; il contient presque au moins une droite, c'est-à-dire la contient, et est une cossette modulo un groupe contenant un conjugué de B ; c'est donc un ensemble B -convexe, égal à celui de ses points de Frécon ; c'est également un ensemble de Frécon, et il en est de même de X . Pour la réciproque, on montre que X est presque égal à ses points de Frécon.

(iii) On se ramène au cas où X est de degré de Morley un, et égal à un groupe contenant B . **Fin**

La conclusion est que non seulement il n'y a pas de plans, c'est-à-dire d'ensembles B -convexes de dimension $2.\dim(B)$, mais qu'il n'y a pas non plus de plans de Frécon, c'est-à-dire d'ensembles de Frécon de cette dimension.

Pour obtenir une contradiction à l'existence d'un mauvais groupe de rang trois, Frécon procède ainsi : soient a un commutateur non trivial, et X

l'ensemble des x pour lesquels il existe y tels que $xyx^{-1}y^{-1} = a$, et Y celui des y pour lesquels il existe x tels que $xyx^{-1}y^{-1} = a$; on voit facilement que $\text{RM}(D(X)) \geq \text{RM}(Y) = \text{RM}(X)$, et donc que $\text{RM}(X) \geq 2$; il n'est pas possible que $\text{RM}(X) = 2$, car sinon on obtiendrait un plan de Frécon; il n'est pas possible non plus que $\text{RM}(X) = 3$, car alors a serait conjugué de son inverse.

Cet argument a été généralisé par WAGNER 201? pour montrer que, dans une mauvaise paire (G, B) où B est commutatif, $\text{RM}(G) > 2 \cdot \text{RM}(B) + 1$, mais la dégénérescence de la Géométrie ne donne pas de contradiction dans les autres cas; par exemple, si $\text{RM}(G) = 4$, cela montre seulement que $\text{RM}(X) = 3$.

Références

- ABC 2008 Tuna Altinel, Aleksandr Borovik et Gregory Cherlin, *Simple Groups of Finite Morley rank*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 145, A.M.S.
- BOROVIK-NESIN 1994 Aleksandr Borovik et Ali Nesin, *Groups of finite Morley rank*, Oxford
- BOROVIK-POIZAT 1990 Aleksandr Borovik et Bruno Poizat, *Groupes simples de rang de Morley fini sans sous-groupes connexes non-nilpotents* (en russe), mémoire déposé à VINITI
- CHERLIN 1979 Gregory Cherlin, Groups of small Morley rank, *Annals of Mathematical Logic*, 17, 1-28
- CORREDOR 1989 Luis Jaime Corredor, Bad Groups of finite Morley Rank, *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 768-773
- FRECON 201? Olivier Frécon, *Bad Groups in the sense of Cherlin*, prépublication
- JALIGOT 2001 Eric Jaligot, Full Frobenius Groups of finite Morley rank and the Feit-Thompson Theorem, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7, 115-328
- NESIN 1989 Ali Nesin, Nonsolvable groups of Morley rank three, *Journal of Algebra*, 124, 199-218
- POIZAT 1987 Bruno Poizat, *Groupes Stables*, Villeurbanne
- ROSENLICHT 1961 Maxwell Rosenlicht, On a result of Baer, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17, 984-988
- ZILBER 1977 Boris Zilber, Groupes et anneaux de théorie catégorique (en russe), *Fundamenta Mathematica*, 95, 173-188
- WAGNER 201? Frank Wagner, *Remarques sur un résultat de Frécon*, prépublication

Version du 15 février 2017