Une minuscule amélioration du Théorème des Indécomposables

Bruno POIZAT[1]

Abstract. We revise the hypothesis and the proof of Zilber's Indecomposability Theorem, for groups of finite Morley rank, following a version of this theorem by Wagner valid in the broader context of supersimple groups : it consists in attaching to any definable subset X of the group a definable subgroup e(X) which is easy to characterize (in the finite Morley rank case). We observe that old and new consequences of the theorem get a very smooth proof when we follow this new approach.

Mots-clefs. Groupes de rang de Morley fini, Théorème des Indécomposables, Conjecture d'Algébricité de Cherlin-Zilber, groupes finiment engendrés.

Introduction.

L'indispensable Théorème des Indécomposables, de Zilber, décrit des circonstances où une partie définissable d'un groupe de rang de Morley fini engendre un sous-groupe définissable. Dans la deuxième section de cet article, j'en minimise les hypothèses et en révise la démonstration en attachant à n'importe quelle partie définissable X un sous-groupe définissable e(X) caractérisé dans la Proposition 7 de cette section. Bien que j'en tire quelques conséquences qui me semblent ne pas toutes avoir été remarquées jusqu'à présent, le but principal de cette nouvelle visite des fondements de la théorie des groupes de rang de Morley fini est de clarifier et de simplifier la présentation des résultats de définissabilité qui sont exposés dans les prolégomènes des manuels classiques : de fait, je regrette amèrement de ne pas avoir suivi cette approche dans POIZAT 1987.

La plus ancienne référence accessible au Théorème des Indécomposables est ZILBER 1977, mais nous nous reporterons ici à son traitement dans POIZAT 1987, p. 45. Quant au groupe e(X) , ou plus exactement son fantôme à commensurabilité près, ce n'est pas ici qu'il apparait pour la première fois, mais dans le Theorem 5.4.5 de WAGNER 2000, valable dans le cadre bien plus général des groupes supersimples ; nous constatons dans cet article que son maniement est particulièrement aisé dans la cas d'un groupe de rang de Morley fini.

La façon naturelle d'aborder le Théorème des Indécomposables est de le déduire des propriétés du monoïde des types au-dessus d'un groupe de rang de Morley fini, lesquelles sont décrites dans la première section. Cependant, pour convaincre les lecteurs qui trouveraient cette méthode trop modèle-théorique, j'offre aussi une preuve alternative aux résultats des deuxième et troisième sections à partir de deux cas particuliers du Théorème des Indécomposables originel, ce qui est d'ailleurs très simple. La lecture de la Section 1 n'est donc pas

---

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

indispensable à la compréhension de la suite, bien que ses Lemmes 4 et 6 aient été à l'origine de la motivation de cet article.

Dans la troisième section, on constate qu'il n'y a pas besoin d'inverser beaucoup d'élément de X pour engendrer $e(X)$.

Quant à la quatrième et dernière section, elle étudie un problème curieux surgi naturellement des précédentes, qui semble indiquer - du moins si on croit à la Conjecture d'Algébricité - que, pour ce qui est de la génération finie, les groupes de rang de Morley fini sont à l'opposé des groupes hyperboliques, qui sont devenus ces derniers temps une source de nouveaux groupes stables. Au passage, je montre dans la Proposition 12 l'existence d'un exposant fini résiduel pour tout groupe de rang de Morley fini.

1.Prologue : produits de types de rang fini

Le produit $p.q$ de deux types (complets, en une variable) au-dessus d'un groupe G de rang de Morley fini est ainsi défini : si p est réalisé par x et q est réalisé par y , de manière indépendante au-dessus de G , $p.q$ est le type de $x.y$. Ce produit est associatif ; en identifiant les points de G aux types réalisés dans G , on plonge le groupe G dans le monoïde $M_1(G)$ ainsi obtenu ; G est formé des inversibles de $M_1(G)$. Si G_1 est une extension élémentaire de G , l'héritage définit un plongement de $M_1(G)$ dans $M_1(G_1)$.

Cette définition fait sens si le groupe G est seulement stable, et c'est en fait un avatar modèle-théorique de la notion bien classique de produit de deux ultafiltres aux-dessus d'un groupe ou d'un demi-groupe. Mais ici nous consacrons notre attention aux conséquences de la finitude du rang.

Si a est un point de G , $a.p$ est tout simplement le translaté de p à gauche, tandis que $p.a$ est son translaté à droite ; nous notons F_p le fixateur de p à gauche, c'est-à-dire l'ensemble des points a de G tels que $a.p = p$, et ${}_pF$ son fixateur à droite ; ce sont deux sous-groupes définissables de G .

Lemme 1. $RM(p), RM(q) \leq RM(p.q) \leq RM(p) + RM(q)$

Démonstration. Si x et y sont indépendants, $RM(x/G) = RM(x/G^\wedge y) = RM(x.y/G^\wedge y) \leq RM(x.y/G)$, et de même de l'autre côté ; $RM(x/G) + RM(y/G) = RM(x^\wedge y/G) \geq RM(x.y/G)$. **Fin**

Lemme 2. $RM(p.q) = RM(q)$ *si et seulement si* p *est dans* $a.F_q$ *pour un* a *de* G *, ce qui signifie encore que* $p.q = a.q$.

Démonstration. On réalise p en x et q en y de manière indépendante, et on pose $z = x.y$; comme q et son héritier ont même fixateur, si p satisfait à la formule définissant $a.F_q$, alors z et $a.y$ ont même type sur $G^\wedge x$, si bien que $p.q = a.q$, qui a bien même rang que q . Réciproquement, si $RM(p.q) = RM(q)$, comme alors $RM(z/G^\wedge x) = RM(y/G^\wedge x) = RM(y/G)$, z et x sont indépendants au-dessus de G ; si φ est une formule à paramètres dans G qui isole q des types de même rang de Morley, $\varphi(x^{-1}.z)$ est satisfaite, et comme ça ne dévie pas il existe a dans G tel que $\varphi(a^{-1}.z)$ soit satisfaite, si bien que $p.q = a.q$. **Fin**

Lemme 3. $RM(F_p)$, $RM({}_pF) \leq RM(p)$; $RM({}_pF) = RM(p)$ *si et seulement si* p *est le générique d'une cossette* a.H *, où* a *est dans* G *et où* H *est un sous-groupe définissable connexe de* G *, et alors* $RM(F_p) = RM({}_pF) = RM(p)$.

Démonstration. Si q est le type générique de ${}_pF°$, $RM(p.q) = RM(p) \geq RM(q)$; idem de l'autre côté. Si de plus $RM(p.q) = RM(q)$, p est dans a.H pour un a de G , où $H = F_q = {}_pF°$; vu son rang, il est le générique de cette cossette ; son fixateur à droite est H , tandis que son fixateur à gauche est $a.H.a^{-1}$. **Fin**

Lemme 4. $RM(p^n) = RM(p)$ *pour un* $n \geq 2$ *si et seulement si* $RM(p^n) = RM(p)$ *pour tout* $n \geq 2$ *, et si et seulement si* p *est le type générique d'une cossette* a.H = H.a *où* H *est un sous-groupe définissable connexe normalisé par* a .

Démonstration. Comme la suite $RM(p^n)$ est croissante, si $RM(p^n) = RM(p)$ pour un $n \geq 2$, alors $RM(p^2) = RM(p)$; dans ce cas, d'après le Lemme 2, p est dans une cossette $a.F_p$, et d'après le Lemme 3 il est le générique d'une cossette a.H , où $H = F_p$ est un sous-groupe définissable connexe ; H stabilise p^2 à droite, et vu l'égalité des rangs H est le stabilisateur à droite de p^2 , qui est le générique d'une cossette b.H ; de même p et p^2 ont même stabilisateur à gauche, soit encore $a.H.a^{-1} = b.H.b^{-1}$, $a^{-1}.b$ normalise H ; mais p^2 est dans a.H.aH , si bien que b appartient à a.H.a , et que a normalise H . La réciproque est claire. **Fin**

Lemme 5. *Un type* p *est le générique d'un sous-groupe définissable connexe si et seulement s'il est idempotent, c'est-à-dire si* $p^2 = p$ *; il est générique dans un sous-groupe définissable si et seulement si* $p^n = p$ *pour un* $n \geq 2$.

Démonstration. S'il satisfait l'hypothèse, p est le générique de a.H = H.a ; si $p^2 = p$, $a^2 = a$ modulo H , c'est-à-dire que a est dans H ; si $p^n = p$, $a^n = a$ modulo H , soit encore a^{n-1} est dans H , et p est générique dans le groupe engendré par a et H . La réciproque est évidente. **Fin**

Lemme 6. (i) *A tout type* p *est associé un unique sous-groupe définissable connexe* H *et un point* a *de* G *normalisant* H *tel que* p *soit dans* a.H = H.a *et que, pour* n *assez grand,* p^n *soit le générique de la cossette* $a^n.H$.
(ii) *Plus généralement, à toute famille de types ...* p_i *, ... est associé un unique sous-groupe définissable connexe* H *tel que chaque* p_i *soit dans une cossette* $a_i.H = H.a_i$ *, où* a_i *est un élément de* G *normalisant* H *, et tel que tous les produits de rang maximum d'un nombre fini de* p_i *soient génériques dans leur cossette modulo* H .

Démonstration. (i) Pour n assez grand, la suite $RM(p^n)$ atteint son maximum ; comme $RM(p^{2n}) = RM(p^n)$, p^n est générique dans $b.H = H.b$, où H est définissable et connexe (Lemme 4) ; comme $RM(p^{2n+1}) = RM(p^n)$, p^{n+1} doit être dans une cossette modulo H , qui est son fixateur, et il est le générique de $c.H = H.c$; par conséquent p est congru à $a = c.b^{-1}$ modulo H .
(ii) Soit q un produit de p_i de rang maximum ; comme $RM(q^2) = RM(q)$, q est générique dans une cossette $b.H = H.b$, et son fixateur (à droite comme à gauche) est H ; soit q' un autre produit de rang maximum ; comme $RM(q'.q) = RM(q) = RM(q')$, q' est dans une cossette modulo H , et il est générique dans cette cossette, si bien que q et q' sont associés au même H . Pour chaque p_i , $RM(q) = RM(p_i.q)$, si bien que $p_i.q$ est générique dans $b_i.H = H.b_i$, et que p_i est dans $b_i.b^{-1}.H$. **Fin**

2. Génération E

Les résultats de la première section concernaient les types au-dessus d'un groupe G de rang de Morley fini ; nous examinons maintenant leur impact sur les parties de G définissables (avec paramètres), tout en offrant une porte de sortie au lecteur peu intéressé par le prologue.

Nous dirons que le sous-groupe définissable H de G est *elliptiquement engendré* par la partie définissable X de G si chaque point de H est produit d'au plus n éléments de $X \cup X^{-1}$, où n est un nombre fixé (attention : nous ne disons pas que H est tout le sous-groupe engendré par X).

Nous rappelons le célèbre Théorème des Indécomposables, de Zilber, qui généralise un classique de la Géométrie Algébrique concernant les fermés de Zariski irréductibles d'un groupe algébrique : *Dans un groupe de rang de Morley fini* G *, si un ensemble définissable* X *est indécomposable à gauche (c'est-à-dire que* X *ne peut se répartir en un nombre fini supérieur à un de cossettes* $a.H$ *modulo un sous-groupe définissable* H *de* G *) et contient l'élément neutre, alors le sous-groupe engendré par* X *est définissable, connexe et elliptiquement engendré.*

Lemme préparatoire. *Dans un groupe de rang de Morley fini :*
(i) *Le sous-groupe engendré par deux sous-groupes définissables connexes est définissable, connexe et elliptiquement engendré.*
(ii) *Une partie définissable infinie engendre elliptiquement un certain sous-groupe définissable infini.*

Première démonstration. (i) On applique le Lemme 6 (ii) à l'ensemble $\{p_1,p_2\}$ des génériques respectifs de nos deux groupes H_1 et H_2 ; comme H_1 est génériquement inclus dans une certaine cossette de H , H_1 est contenu dans H , et il en est de même de H_2 ; le générique q de H est produit d'éléments de $H_1 \cup H_2$, et puisque tout élément de H est produit de deux de ses points génériques, H est elliptiquement engendré par $H_1 \cup H_2$.

(ii) On applique semblablement le Lemme 6 (i) à un type non-algébrique dans l'ensemble infini. **Fin**

Deuxième démonstration. (i) est un cas particulier du Théorème des Indécomposables ; pour (ii), on applique ce théorème à une partie fortement minimale de l'ensemble, à laquelle on enlève un morceau fini pour la rendre indécomposable à gauche, puis qu'on translate à droite pour qu'elle contienne l'élément neutre (voir ZILBER 1977, et POIZAT 1987, Théorèmes 2.7 et 2.13). **Fin**

Proposition 7. *A toute partie définissable* X *de* G *est associé un unique sous-groupe de* G*, que nous notons* $e(X)$*, ayant les trois propriétés suivantes :*
(i) $e(X)$ *est le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par* X *;*
(ii) $e(X)$ *est le plus petit sous-groupe définissable normalisé par* X *qui divise ce dernier en un nombre fini de cossettes ;*
(iii) $e(X)$ *est l'unique sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par* X*, normalisé par* X*, et qui divise ce dernier en un nombre fini de cossettes.*

Démonstration. Comme deux groupes connexes elliptiquement engendrés par X en engendrent un troisième, un tel groupe de rang maximal est plus grand que tous les autres, et c'est celui que nous notons $e(X)$. Si a est dans X, $a.e(X).a^{-1}$ est aussi elliptiquement engendré par X, si bien que a normalise $e(X)$.

Si $X/e(X)$ était infini, X engendrerait elliptiquement modulo $e(X)$ un groupe définissable infini, ce qui contredit la maximalité de $e(X)$.

Supposons que H soit un sous-groupe définissable, normalisé par X, tel que X se répartisse en un nombre fini de cossettes modulo H ; il en est de même pour $e(X)\cap H$, si bien que, par génération elliptique, ce dernier groupe est d'indice fini dans $e(X)$. Comme $e(X)$ est connexe, il est inclus dans H.

Le troisième point est conséquence directe des deux premiers. **Fin**

Remarque 1. Si H est un sous-groupe définissable de G, $e(H)$ est sa composante connexe $H°$.
Remarque 2. Si $e(X)$ n'a pas de sous-groupe propre (non définissable) d'indice fini, on peut se passer de la définissabilité dans le point (ii) de la Proposition 7. Par exemple, si G est sans torsion, le plus petit groupe définissable contenant un de ses points est divisible, si bien que les sous-groupes définissables de G n'ont pas de sous-groupes propres d'indice fini ; $e(X)$ est alors le plus petit sous-groupe de G normalisé par X et le divisant en un nombre fini de cossettes. Nous verrons d'autres cas de ce genre dans la Proposition 12.
Remarque 3. On a l'habitude de considérer le groupe G dans un langage £ qui peut être plus étendu que celui des groupes ; que se passe-t-il si on renforce ce langage en £' , tout en restant de rang de Morley fini ? A chaque X définissable dans £ sont associés un groupe $e(X)$ au sens de £ et un groupe $e'(X)$ au sens de £' . D'après le point (ii) de la Proposition 7, $e'(X)$ est inclus

dans $e(X)$, et d'après son point (i) $e'(X)$ est la composante connexe de $e(X)$ au sens de £' .

Exemple 1. Si X est fini $e(X)$ est réduit à l'élément neutre. Plus généralement, si $X = a_1.H_1 \cup \ldots \cup a_n.H_n$ est réunion d'un nombre fini de cossettes modulo des sous-groupes définissables, $e(X)$ est le sous-groupe engendré par leurs composantes connexes $H_1°$, ... $H_n°$ et les conjuguées de celles-ci par les éléments du groupe engendré par X . Naturellement, seul un nombre fini de ces conjuguées participent à la génération de $e(X)$.

Exemple 2. Si G est un groupe algébrique, considéré comme une structure dans le langage de la Géométrie, et si F est un fermé de Zariski irréductible non vide, on considère le groupe définissable connexe H engendré par $a^{-1}.F$ ou a est un point de F ; $e(F)$ est le groupe engendré par H et ses conjugués par les points du groupe engendré par F . Si F est un fermé de Zariski, on considère les groupes H_1 , ... H_n associés à ses composantes irréductibles : $e(F)$ est engendré par leurs conjugués par les éléments du groupe engendré par F . Si X est un ensemble constructible dont la clôture de Zariski est F , d'après la point (ii) de la Proposition 7, $e(X) = e(F)$.

Exemple 3. Si $X = a^G$ est la classe de conjugaison d'un point a de G et si $Y = [a,G]$ est l'ensemble de ses commutateurs, $e(Y) = e(X)$; en effet, comme $[a,x]^y = [a,y]^{-1}.[a,yx]$, $e(Y)$ est normal dans G , il est elliptiquement engendré par X et a n'a qu'un nombre fini de conjugués dans $G/e(Y)$.

Exemple 4. Si le groupe G est connexe, a est central modulo $e(a^G) = e([a,G])$, et ce dernier est le groupe engendré par $[a,G]$. En général, le groupe engendré par $[a,G]$ n'est pas définissable ; par exemple, si G est le produit semi-direct d'un groupe abélien A par une involution qui l'inverse, et si a est dans A , $[a,G] = \{1, a^2\}$, qui engendre un groupe définissable seulement si a est d'ordre fini. Plus généralement, si H est un sous-groupe définissable connexe normalisé par a , alors $e(a^H) = e([a,H])$, qui est le groupe engendré par $[a,H]$. En effet, a et H normalisent $e([a,H])$, et H centralise a modulo $e([a,H])$.

Exemple 5. Si X est une classe de conjugaison infinie, $e(X)$ est un sous-groupe définissable normal infini ; d'où le résultat bien connu que, pour un groupe de rang de Morley fini, simple équivaut à définissablement simple.

Exemple 6. Si G est simple et si X est une partie définissable infinie de G , ou bien X est contenue dans un sous-groupe définissable propre de G , ou bien elle engendre elliptiquement G ; en effet $e(X)$ est infini et X est contenue dans son normalisateur.

Exemple 7. Si K est un corps infini de rang de Morley fini, on dispose de générations elliptiques additive et multiplicative ; et si un sous-groupe définissable infini de K^+ est préservé sous l'action d'une infinité de scalaires, il est égal à K^+ tout entier. Si donc X une partie définissable infinie de K , en caractéristtique nulle $K = e_a(X)$, et en toute caractéristique $K = e_a(e_m(X))$.

On note en passant que $e(X)$ est le groupe associé par le Lemme 6 à la famille de tous les types satisfaisant à X .

En posant $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, on étend immédiatement la Proposition 7 à une famille finie d'ensembles définissables ; pour les familles infinies il faut l'aménagement suivant, qui se démontre de la même façon :

Proposition 7bis. *A tout ensemble de parties définissables* $\ldots X_i, \ldots$ *de* G *est associé un groupe noté* $e(X_i)$ *ayant les trois propriétés suivantes :*
(i) $e(X_i)$ *est le plus grand sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini de* X_i *;*
(ii) $e(X_i)$ *est le plus petit sous-groupe définissable normalisé par les* X_i *pour lequel chacun de ces derniers se divise en un nombre fini de cossettes.*
(iii) $e(X_i)$ *est l'unique sous-groupe définissable connexe elliptiquement engendré par un nombre fini de* X_i *, normalisé par les* X_i *, et pour lequel chaque* X_i *se divise en un nombre fini de cossettes.*

Exemple 8. Si les X_i sont les parties finies de G , le groupe $e(X_i)$ est réduit à l'élément neutre.
Exemple 9. Si G est connexe et si les X_i sont ses classes de conjugaison, le groupe $e(X_i)$ est le dérivé de G ; en effet, $e(X_i)$ est le plus petit sous-groupe définissable rendant central chaque élément de G ; il doit donc contenir le dérivé, et ce dernier est définissable d'après l'Exemple 3 ci-dessus.
Exemple 10. Si K est un corps de rang de Morley fini et de caractéristique p , et X une de ses parties infinies définissable, $K = e_a(a_1.X, \ldots a_n.X)$ pour un nombre fini de paramètres $a_1, \ldots a_n$ algébriques (voir WAGNER 2001).

Aucun de ces exemples ne constitue un résultat de définissabilité bouleversant ; la nouveauté, c'est la rapidité avec laquelle on les obtient grâce à l'introduction de ce groupe $e(X)$ attaché à n'importe quel ensemble définissable X , qui éclaire la portée du Théorème des Indécomposables et permet d'en rendre plus directes les applications.

La conclusion du Théorème des Indécomposables, c'est que le sous-groupe engendré par l'ensemble définissable X est définissable, connexe et elliptiquement engendré, ce qui signifie tout simplement que X est inclus dans $e(X)$. Par conséquent, dans son hypothèse, le seul H pour lequel il importe que X soit indécomposable est le groupe $e(X)$ lui-même ! On peut donc l'améliorer en remplaçant l'indécomposabilité à gauche par l'*indécomposabilité normale,* où on ne considère que des H normalisés par X .

Pour en permettre l'utilisation dans la pratique, la voie traditionnelle est d'en établir péniblement des versions où la famille des groupes H à considérer est restreinte par des propriétés de X ; ces adaptations deviennent immédiates quand on suit notre approche, où il est évident qu'il suffit de considérer les H préservés par les automorphismes de la structure de G (laquelle peut être plus forte que la seule loi de groupe) qui conservent X , et par les automorphismes définissables du pur groupe G qui conservent X, puisque ces applications préservent la notion de sous-groupe définissable. Comme la Proposition 7 montre que $e(X)$ est conservé par extension élémentaire, on voit, en montant à un modèle saturé, que $e(X)$ est définissable avec les mêmes paramètres que X. En bref, à défaut d'obtenir des résultats nouveaux de nature algébrique, on trouve de gros avantages d'exposition à considérer ce groupe $e(X)$.

La même chose vaut bien sûr pour la version du Théorème des Indécomposables associée à une famille infinie d'ensembles définissables.

Nous avons pris soin d'établir simplement nos Propositions 7 et 7bis sans passer par les produits de types, à partir du Théorème de Zilber original ; mais, bien sûr, le Théorème des Indécomposables est conséquence de notre prologue.

3. Génération P

La conclusion du Théorème des Indécomposables tel qu'il apparait dans POIZAT 1987 p.45, sous les hypothèses originelles (X est indécomposable à gauche et contient l'élément neutre), est un peu plus forte que celle que nous avons donnée ici : en fait $e(X)$ est dans ce cas positivement engendré par X, chacun de ses éléments étant produit de n éléments de X, pour un entier n fixé. Cette courte section est consacrée à l'éclaircissement de ce point.

Proposition 8. (i) *Si* X *est une partie définissable du groupe de rang de Morley fini* G *, il existe une partie finie* Y *de* X^{-1} *et un entier* n *tel que tout point de* $e(X)$ *soit le produit de* n *éléments de* $X \cup Y$.
(ii) *Si de plus* X *est inclus dans* $e(X)$ *, il existe un entier* n *tel que chaque élément de* $e(X)$ *soit le produit de* n *éléments de* X.

Première démonstration. (i) On applique le Lemme 6 à la famille formée des types d'éléments de X ; le groupe H est normalisé par X, et comme la cossette modulo H de chaque type satisfaisant à X est connue, par compacité il n'y a qu'un nombre fini de telles cossettes ; si p est un produit de rang maximum de types satisfaisant à X, il est le générique d'une cossette $aH = Ha$, et $a^{-1}.p = p.a^{-1}$ est donc le générique de H ; chaque point de H, étant produit de deux génériques, s'écrit $x_1. \ldots .x_n.a^{-2}.y_1. \ldots y_n.$, où les x et les y sont dans X. Comme H est elliptiquement engendré par X, il est égal à $e(X)$. On voit qu'il suffit d'inverser un seul produit de points de X, et qu'on n'emploie cet inverse qu'une fois.
(ii) Si X est inclus dans $H = e(X)$, p est le type générique de $e(X)$. En fait on n'a pas besoin d'inversion si X engendre un groupe périodique modulo $e(X)$, car alors une puissance de p sera le générique de H. **Fin**

Deuxième démonstration. (i) Soit $e'(X)$ le plus grand sous-groupe définissable connexe engendré de la façon indiquée ; il est normalisé par X. Par ailleurs, on remarque que la première comme la deuxième démonstration de la deuxième partie du Lemme préparatoire ne demande l'inversion que d'un seul élément de

X ; par conséquent X se divise en un nombre fini de cossettes modulo $e'(X)$, et ce dernier est donc égal à $e(X)$. Cette démonstration ne permettant pas de conclure pour la deuxième partie, nous devons en chercher une autre.
(i') Considérons un ensemble de la forme $Y = X. \ldots .X$ de rang de Morley r maximum, et p un type de rang r dans Y ; comme $Y.Y$ est aussi de rang r, il n'y a qu'un nombre fini de translatés $a.p$ de p par un point a de Y, si bien que ce dernier se répartit en un nombre fini de cossettes modulo le stabilisateur à gauche H de p, et que p est dans $b.H°$ pour un b de Y ; comme $H°$ est de rang au plus r, p est le type générique de cette cossette, et en fait $H = H°$.

Nous avons besoin d'un petit calcul de dimension. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes définissables de G, X_1 est une partie définissable du premier et X_2 une partie définissable du second, les fibres de la surjection canonique du produit cartésien $X_1 \times X_2$ sur $X_1.X_2$ sont de rang de Morley inférieur à celui de $H_1 \cap H_2$, si bien que $RM(X_1.X_2) \geq RM(X_1) + RM(X_2) - RM(H_1 \cap H_2)$; comme d'autre part $RM(H_1.H_2) = RM(H_1) + RM(H_2) - RM(H_1 \cap H_2)$, ce dernier nombre est le rang de Morley de $X_1.X_2$ quand X_1 est générique dans H_1 et X_2 est générique dans H_2.

Par conséquent, comme $bH.bH = b^2.b^{-1}Hb.H$, le produit du type générique de bH par lui-même ne peut être de rang r que si $b^{-1}Hb = H$, c'est-à-dire si b normalise H. On montre de même que X se répartit en un nombre fini de cossettes à gauche modulo H, et que, pour chaque a de X, $a.p$ est le générique d'une cossette normalisante modulo un groupe définissable connexe de rang r, qui ne peut être que H. On en conclut que $H = e(X)$, et on termine comme ci-dessus.
(ii) Si X est inclus dans $e(X)$, p est le type générique de $e(X)$. **Fin**

4. Génération F

Dans cette section, nous envisageons la possibilité paradoxale de l'existence de sous-groupes définissables engendrés non elliptiquement par un ensemble définissable X. Nous commençons par une remarque très simple :

Corollaire 9. *Dans un groupe de rang de Morley fini localement fini, le sous-groupe engendré par n'importe quelle partie définissable est définissable, et elliptiquement engendré.*

Démonstration. En effet, $X/e(X)$ étant fini, X engendre un groupe fini modulo $e(X)$. **Fin**

Dans le cas général, si H est un groupe définissable engendré par X, il normalise $e(X)$, si bien que le groupe $H.e(X)$ est définissable ; si nous notons $Ne(X)$ le normalisateur de $e(X)$, le groupe total engendré par X a une image finiment engendrée Γ dans $Ne(X)/e(X)$; si H n'est pas elliptiquement engendré, son image dans Γ est un groupe définissable infini.

Il est clair que si G est ω-saturé les seuls sous-ensembles définissables de Γ sont ses parties finies. Est-il possible de se passer de l'hypothèse de saturation pour montrer cela ? Autrement dit :

Question 1. *Un sous-groupe finiment engendré d'un groupe de rang de Morley fini peut-il contenir un sous-ensemble définissable infini, soit encore un sous-groupe définissable infini ?*

Ou plus particulièrement :

Question 2. *Un groupe infini de rang de Morley fini peut-il être finiment engendré ?*

Lemme 10. *La réponse à la Question 1 est négative dans le cas d'un groupe nilpotent.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que tout sous-groupe d'un groupe Γ nilpotent finiment engendré est finiment engendré. C'est vrai s'il est commutatif, car l'anneau des entiers est noethérien. On fait ensuite une induction sur sa classe n de nilpotence ; soient Z le centre de Γ, et Z_1 son deuxième centre ; par hypothèse d'induction, Z_1/Z est finiment engendré ; par bilinéarité des commutateurs ($[a,bc] = [a,b].[a,c]^b$, et vaut $[a,b].[a,c]$ si a ou c est dans Z_1), $[Z_1,\Gamma]$ est un sous-groupe Z_0 de Z finiment engendré ; comme Γ/Z_0 est nilpotent de classe $n-1$, chacun de ses sous-groupes est finiment engendré, ainsi que chaque sous-groupe de Z_0 .

Mais un groupe infini de rang de Morley fini doit avoir un sous-groupe abélien infini divisible, ou bien un sous-groupe abélien infini d'exposant premier, lesquels ne sont pas finiment engendrés. **Fin**

Ce genre d'argument a ses limites : si K est un corps de caractéristique p , et a et b sont deux éléments de K^* , le second étant d'ordre infini, le groupe engendré par $(a,1)$ et $(0,b)$ dans le produit semi-direct de K^+ par K^* contient un groupe abélien infini d'exposant p .

Proposition 11. *Si* X *est une partie définissable normale du groupe de rang de Morley fini* G *, il y a un plus grand sous-groupe définissable de* G *engendré par* X *, et* $e(X)$ *est d'indice fini dans ce dernier.*

Démonstration. Notons H le quotient de G par son sous-groupe normal $e(X)$, et Y l'image de X modulo $e(X)$; comme Y est fini, il est centralisé par $H°$. Si a et b centralisent $H°$, le commutateur $[a,b]$ ne dépend que des classes de a et de b modulo $H°$, si bien que $Z(H°)$ n'a qu'un nombre fini de commutateurs ; d'après un résultat de R. Baer (voir BOROVIK-NESIN 1994, Ex. 22 p. 8 ; ou même seulement Ex. 21 p. 7) son dérivé est fini, et après division par ce dernier on obtient une image T de Y qui est commutative. Un groupe définissable engendré par X doit avoir une image définissable dans le groupe engendré par T ; les seuls sous-groupes définissables de ce groupe sont ses sous-groupes finis, contenus dans son plus grand sous-groupe fini, formé de sa torsion ; la même propriété vaut pour Y . **Fin**

Remarque 4. En se plaçant dans le normalisateur de X , on voit qu'il suffit pour obtenir ce résultat que X normalise X .

Exemple 11. Si X est normale, le groupe qu'elle engendre est définissable seulement si chaque point de X est d'ordre fini modulo $e(X)$; c'est ainsi que le groupe engendré par les éléments d'ordre n est toujours définissable, tandis que le groupe engendré par a^G n'est définissable que si a est d'ordre fini modulo $e(a^G) = e([a,G])$.
Exemple 12. On montre de même que le groupe engendré par $[a,G]$ est définissable si et seulement si tous les commutateurs de a sont d'ordre fini modulo $e([a,G])$.

Notre dernier exemple mérite une proposition :

Proposition 12. (i) *Dans un groupe de rang de Morley fini, quel que soit l'entier* n *, le groupe engendré par les puissances* $n°$ *est définissable et elliptiquement engendré.*
(ii) *Tout groupe* G *de rang de Morley fini a un plus petit sous-groupe normal* G^* *tel que le quotient* G/G^* *soit d'exposant fini ; ce groupe* G^* *est définissable, étant le groupe engendré par les puissances* $n°$ *pour n'importe quel entier* n *divisible par l'exposant de* G/G^* .

Démonstration. (i) Soit P_n l'ensemble des puissances $n°$ dans le groupe G ; les puissances $n°$ dans le quotient $G/e(P_n)$ viennent des éléments de P_n , et sont en nombre fini ; ce quotient n'a donc pas d'élément d'ordre infini ; dans $G/e(P_n)$, comme les puissances $n°$ centralisent un sous-groupe d'indice fini, elles commutent modulo un groupe fini, et engendrent un groupe fini.
(ii) Comme il s'agit de sous-groupes définissables, il existe un entier r tel que le groupe G^* engendré par P_r soit minimal. Si H est un sous-groupe normal tel que G/H soit d'exposant n , G^* est engendré par les puissances $nr°$, si bien qu'il est contenu dans H . **Fin**

Corollaire 13. *Un groupe algébrique connexe, sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini.*

Démonstration. Le quotient G/G^* est un groupe algébrique d'exposant fini ; en caractéristique nulle, c'est un groupe fini. **Fin**

Remarque 5. Le groupe G^* est connexe, n'ayant pas de sous-groupe propre d'indice fini, ni même de sous-groupe normal propre dont le quotient soit d'exposant fini ; en effet, $(G^*)^*$ est caractéristique dans G^* , donc normal dans

G , et égal à G^* . Nous appellerons l'exposant de G/G^* *exposant résiduel de* G ; G^* lui-même est d'exposant résiduel un.

Remarque 6. Il n'est pas toujours divisible : comme me l'a fait remarquer Adrien Deloro, dans $SL_2(K)$ l'opposé d'un unipotent non-trivial n'est jamais un carré, même en caractéristique nulle.

Remarque 7. Si H est un sous-groupe normal d'indice fini dans G , l'exposant de G/H divise l'exposant résiduel de G . Rappelons que, sous hypothèse de la Conjecture d'Algébricité, la composante connexe de G/G^* est nilpotente ; quand c'est le cas, G^* est l'intersection des sous-groupes d'indice fini de G .

Lemme 14. *La Question 2 se réduit à celle de l'existence d'un groupe infini simple, de rang de Morley fini, et finiment engendré.*

Démonstration. Nos questions ne concernent que des groupes G connexes ; en effet, si Γ est un sous-groupe finiment engendré de G , comme $\Gamma \cap G^\circ$ est d'indice fini dans Γ , il est lui aussi finiment engendré.

Supposons donc G connexe et finiment engendré, et divisons-le par un sous-groupe définissable connexe propre et maximal. Comme ce quotient ne peut être commutatif, c'est un groupe simple à un centre fini près. **Fin**

Si deux sous-groupes de G définissables et connexes sont chacun contenu dans un groupe finiment engendré, il en est de même du groupe qu'ils engendrent ; autrement dit, il existe un plus grand sous-groupe $f(G)$ de G qui soit définissable, connexe et contenu dans un sous-groupe finiment engendré ; $f(G)$ est bien sûr normal dans G .

Par conséquent, dans le cas d'un groupe G simple, les Questions 1 et 2 sont équivalentes : si $f(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre, $f(G) = G$, c'est-à-dire que G lui-même est finiment engendré. Si cela pouvait se produire, la situation modèle-théorique serait assez troublante : la théorie de G est ω_1-catégorique, et ses modèles dénombrables non-saturés forment une suite ascendante ; quels sont ceux d'entre eux qui pourraient être finiment engendrés ?

Nous poursuivons un peu plus loin l'analyse de la Question 1 :

Proposition 15. *La réponse à la Question 1 est négative dans le cas d'un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire.*

Démonstration. Rappelons que "définissablement linéaire" signifie que le corps K muni de la relation n^2-aire interprétant G comme sous-groupe de $GLn(K)$ est une structure de rang de Morley fini.

Si $f(G)$ est infini, les coordonnées de ses points forment un ensemble définissable infini contenu dans un sous-corps finiment engendré de K , qui devrait lui être égal (Exemple 7), ce qui est impossible pour un corps algébriquement clos. **Fin**

Proposition 16. *Si la Conjecture de Cherlin-Zilber est vérifiée,* $f(G)$ *est résoluble quel que soit le groupe* G *de rang de Morley fini.*

Démonstration. Notons R le plus grand sous-groupe définissable connexe et résoluble de $f(G)$; il est normalisé par G. S'il ne contient pas $f(G)$, après division par R, puis par un centre fini, nous obtenons un exemple ou $f(G)$ n'a qu'un nombre fini S_1, ... S_n de sous-groupes normaux minimaux, qui sont définissables, simples et normalisés par $G°$ (voir POIZAT 1987, p. 97).

Si S_1 est un groupe algébrique, d'après le Theorem 8.4 de BOROVIK-NESIN 1994, tout groupe connexe d'automorphismes de S_1 définissable dans un contexte de rang de Morley fini est formé d'automorphismes intérieurs ; puisqu'il est question de relecture des fondements, nous remarquons en passant qu'il est possible d'obtenir ce résultat de façon plus modèle-théorique, sans inspection minutieuse de la structure algébrique de S_1, grâce à une version du Théorème de Borel-Tits pour les automorphismes, qui malheureusement ne figure pas dans POIZAT 1987 (il faut tout-de-même savoir que les automorphismes extérieurs algébriques sont en nombre borné).

Par conséquent $G°$ est engendré par S_1 et son centralisateur ; en divisant par ce dernier, on voit que S_1 est finiment engendré, ce qui contredit la Proposition 12. **Fin**

On peut préciser ainsi cette proposition dans un contexte minimal :

Proposition 17. *Soit* G *un groupe connexe de rang de Morley minimal pour avoir un* $f(G)$ *non trivial. Si le centre de* G *est infini,* $f(G)$ *est central dans* G. *Sinon,* $f(G)$ *est ou bien un groupe simple non-algébrique à un centre fini près, ou bien un groupe commutatif divisible sans torsion ou d'exposant premier contenu dans le centre de* R *ou dans celui du dérivé de* R.

Démonstration. Par hypothèse de minimalité, $f(G)$ est contenu dans tout sous-groupe de G infini, normal et définissable ; si G a un centre infini, $f(G)$ est donc central ; si G a un centre fini, $G/Z(G)$ n'a ni centre ni sous-groupe fini normal. Dans ce dernier cas, $f(G)$ est le plus petit sous-groupe normal définissable de G modulo $Z(G)$, et s'il n'est pas abélien c'est au centre près un groupe simple non-algébrique d'après la proposition précédente.

Supposons donc $f(G)$ abélien. Si R a un centre infini, il contient $f(G)$; sinon R' est nilpotent et son centre infini contient $f(G)$; les sous-groupes R-minimaux de $f(G)$ sont alors munis de structures de corps définissables. On peut aussi ajouter que $f(G)$ est d'exposant premier, ou bien divisible ; s'il est divisible avec torsion il est central dans G, et s'il est divisible sans torsion mais non central dans G l'action de G sur $f(G)$ est définissablement linéaire d'après LOVEYS-WAGNER 1993. **Fin**

L'impression générale, c'est qu'il semble douteux qu'on puisse répondre inconditionnellement à ces questions sans avoir à résoudre la Conjecture, mais que c'est peut-être possible sous réserve de la Conjecture.

Références

BOROVIK-NESIN 1994 Aleksandr Borovik et Ali Nesin, *Groups of Finite Morley Rank,* Clarendon Press

LOVEYS-WAGNER 1993 J. Loveys et F. Wagner, Le Canada Semi-Dry, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 118, 217-221

POIZAT 1987 Bruno Poizat, *Groupes Stables,* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

WAGNER 2000 Frank Wagner, *Simple Theories,* Kluwer

WAGNER 2001 Frank Wagner, Fields of finite Morley Rank, *The Journal of Symbolic Logic,* 66, 703-706

ZILBER 1977 Boris Zilber, Groupes et anneaux de théorie catégorique (en russe), *Fundamenta Mathematicae,* 95, 173-188

Version du 11 juillet 2016